République Tunisienne
Ministère de l'Education

Mathématiques

4ème année de l'enseignement secondaire

sciences de l'informatique

Auteurs

Mahfoudh BRAHIM
Inspecteur principal

Mohamed nacer SOUIBKI
Inspecteur

Mounir BEN MANSOUR
Professeur principal

Mohamed DGA
Professeur principal

Evaluateurs

Khalifa TURKI

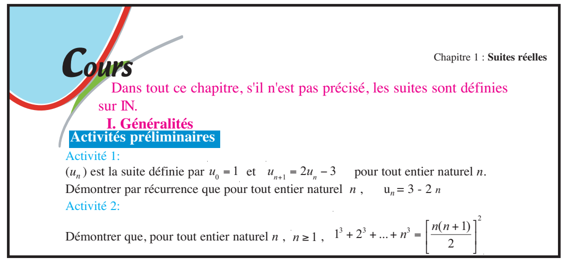
Amor JERIDI

Centre National Pédagogique

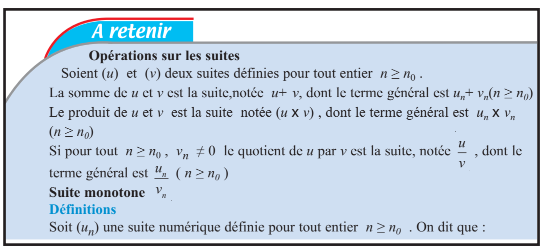
Présentation et mode d'emploi

Les programmes de $4^{ème}$ année et de $3^{ème}$ année ne peuvent être lus indépendemment l'un de l'autre. C'est sur les deux ans que la plupart des notions sont à construire et à installer, que les spécificités de la section sont à développer. C'est pourquoi ce manuel, conforme au programme de $4^{ème}$ année secondaire sciences de l'informatique, est conçu dans le même esprit que celui de la $3^{ème}$ année. Chaque chapitre est conçu en paragraphes dont généralement chacun comporte :

Plan du chapitre

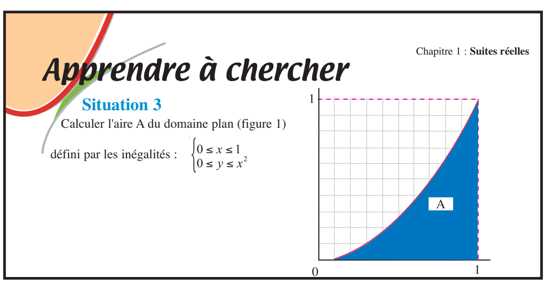


Préparation et consolidation des acquis antérieurs

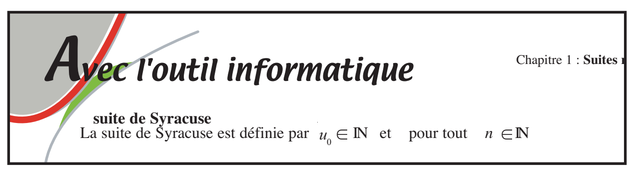


Tout ce qu'on doit savoir

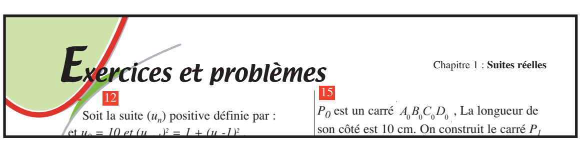
Des applications immédiates pour mettre en pratique les savoirs



Des problèmes à l'étude avec explications, aides ou méthodes



Des travaux pratiques faisant appel de façon pertinente à des logiciels pour la découverte expérimentale de notions et résultats



Des exercices pour faire fonctionner les notions et méthodes du chapitre mais aussi celles des chapitres antérieurs

Des éléments d'information sur la contribution des mathématiques à la compréhension de phénomènes et quelques points d'histoire

Sommaire

Chapitre 1

SUITES RÉELLES

Paul Erdös (1913-1996)
Mathématicien hongrois, l'une des figures marquantes du XX$^{\text{ème}}$ siècle.

Dans tout ce chapitre, s'il n'est pas précisé, les suites sont définies sur $\mathbb{N}$.

I. Généralités

Activités préliminaires

Activité 1 :

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout entier naturel n.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 3 - 2^n$

Activité 2 :

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Activité 3 :

On donne le terme général de la suite (u_n). Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

a) $u_n = 3n + 2$; b) $u_n = 3^{n-2}$; c) $u_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$.

Activité 4 :

Une seule des trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) est géométrique. Laquelle?

a) $a_n = 2^{2n+1} \times 5^{3-n}$; $b_n = n^2$; $c_n = \sqrt{c_{n-1}^{\;2} + 1}$

Activité 5:

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 1{,}5$ et de premier terme $u_1 = -30$.

1)Exprimer u_n en fonction de n.

2)Montrer que $u_p - u_m = (p - m)r$.

3)Vérifier que: $u_{10} = -16{,}5$ et en déduire u_{20}.

Activité 6:

Soit la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = 1{,}2u_n$ et $u_0 = 100$

1)Exprimer u_n en fonction de n et en déduire la valeur de u_{20}.

2)Exprimer en fonction de n la somme: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

3)Calculer cette somme pour $n = 20$.

Activités de découverte

Activité 1 :

On considére la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $x_n = \dfrac{-3n^2 + 5}{n+1}$

On considère les suites réelles (y_n), (z_n) et (t_n) définies sur $\mathbb{N}$ respectivement par :

$y_n = x_n + 3n$, $z_n = \dfrac{x_n}{n}$ et $t_n = x_n \times y_n$

Déterminer, pour chacune de ces suites, les valeurs de n pour lesquelles elle est définie et calculer son terme général.

➢ On peut, comme dans le cas des fonctions, effectuer sur les suites les opérations d'addition, de multiplication et de division.

Activité 2 :

Soit la suite $(u\ )$ définie par: $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 2u_n - 5$

1) Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 5$.
2) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

➢ On dit que la suite (u_n) est **croissante**.

Activité 3 :

Considèrons la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $v_n = \dfrac{1}{n^2}$.

1) Calculer les cinq premiers termes de cette suite.
2) Ranger ces cinq termes dans l'ordre croissant
3) a) Exprimer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ en fonction n puis comparer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à 1.

b) Déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} \leq v_n$

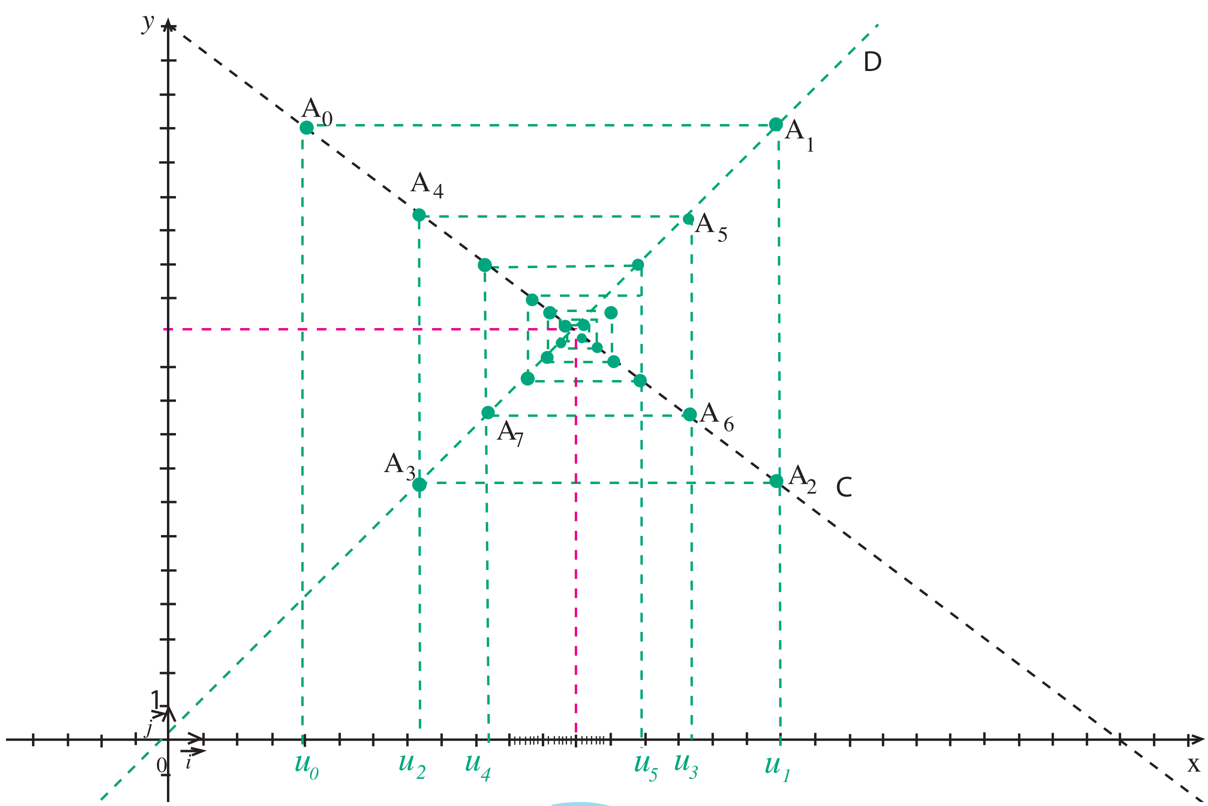
➢ On dit que la suite (v_n) est **décroissante**.

➢ Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

Activité 4 :

On considére la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = -\ 0{,}75\ u_n + 21$ et $u_0 = 4$.

Dans un repére orthonormé, on a tracé la courbe C_f représentant la fonction $f : x \mapsto -0{,}75x + 21$ et la droite D d'équation $y = x$. On a représenté les premiers termes de la suite (u_n) de la façon suivante: partant du point de coordonnées $(u_0\ ;\ f(\ u_0))$ on trace une ligne polygonale dont les cotés sont parallèles alternativement à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées et les sommets $(u_n\ ;\ f(u_n))$ et $(u_n;\ u_n)$.



1) Refaire le dessin et placer sur l'axe des abscisses : u_6, u_7, u_8 et u_9 .
2) Montrer que la suite (u_n) n'est pas monotone. Que peut-on conjecturer sur sa limite quand n tend vers $+\infty$?
3) Calculer l'abscisse du point d'intersection de D et C_f.
4) On pose $v_n = u_n - 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
Détérminer sa limite, puis retrouver la limite de la suite (u_n).
➢ La suite (u_n) admet une limite réelle: on dit qu'elle est **convergente**.

Activité 5 :

Considérons la suite (u) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 3 - \frac{1}{n}$.
Montrer que $2 \leq u_n \leq 3$.
➢ On dit que la suite (u_n) est **majorée** par 3 (3 est un majorant de (u_n)) et est **minorée** par 2 (2 est **un minorant** de (u_n)).
➢ Une suite majorée et minorée est dite **bornée**.

Activité 6 :

On considère la suite définie par: $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ pour $n \geq 1$.

1) Calculer $u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots, u_{10}$., et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
2) Que peut-on conjecturer sur les valeurs de (u_n) quand n tend vers $+\infty$?
3) Montrer que si $n \geq 300$ alors $|u_n - 2| \leq \frac{1}{100}$
4) Pour quelles valeurs de n a-t-on $|u_n - 2| \leq \frac{1}{10^7}$?

Plus généralement, on montre que si ε est un réel strictement positif, il existe un entier p tel que: si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq p$ alors $|u_n - 2| \leq \varepsilon$.
➢ Le résultat précédent se traduit par “ pour tout intervalle I contenant 2 il existe un entier p tel que pour tout entier $n \geq p$, on a $u_n \in I$ “.

A retenir

Opérations sur les suites

Soient (u) et (v) deux suites définies pour tout entier $n \geq n_0$.
La somme de u et v est la suite,notée $u + v$, dont le terme général est $u_n + v_n (n \geq n_0)$
Le produit de u et v est la suite notée $(u \times v)$, dont le terme général est $u_n \times v_n$ $(n \geq n_0)$
Si pour tout $n \geq n_0$, $v_n \neq 0$ le quotient de u par v est la suite, notée $\frac{u}{v}$, dont le terme général est $\frac{u_n}{v_n}$ ($n \geq n_0$)

Suite monotone

Définitions

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq n_0$. On dit que :

•La suite (u_n) est **croissante** lorsque, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq u_{n+1}$.

•La suite (u_n) est **décroissante** lorsque, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n+1}$.

•La suite (u_n) est **monotone** lorsqu'elle est croissante **ou** décroissante.

Suite majorée, suite minorée

Définitions

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq n_0$. On dit que :

•La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq M$

•La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq m$

•La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois **majorée et minorée**.

Suite convergente

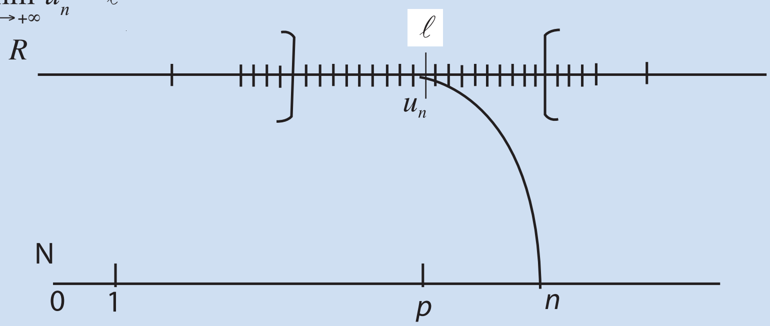
Définition 1 :

• Soit (u_n) une suite définie pour tout entier $n \geq n_0$ et ℓ un nombre réel.

On dit que la suite (u_n) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ si :

Pour réel $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que: $(n \in \mathbb{N}$ et $n \geq p) \Rightarrow (|u_n - \ell| < \varepsilon)$

On écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$



•Une suite non convergente est dite **divergente**.

Définition 2 :

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier $n \geq n_0$.

On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand n tend vers $+\infty$ si:Pour tout réel $A > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que: $(n \in \mathbb{N}$ et $n \geq p) \Rightarrow u_n > A$ (resp. $u_n < -A$) . On écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$)

Remarques

1. Si une suite est convergente, sa limite est **unique**.
2. Toute suite géométrique de raison q telle que $|q| < 1$ est convergente vers 0
3. Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
4. Si $q < -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite

1 Q.C.M. Trouver la seule bonne réponse.

1) Soit la suite (u_n)définie sur IN par $u_n = 3 - \dfrac{2}{n+1}$.. Cette suite est :

a. croissante b. décroissante c. non monotone

2) Soit la suite (u_n) définie sur IN par $u_n = \dfrac{5n-1}{n+3}$. (u_n) est :

a. majorée par 5 b. minorée par 1

3) Soit la suite (u_n) définie sur IN par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = -3 + u_n$. Cette suite est :

a. croissante b. décroissante c. non monotone

4) Si $u_n = \dfrac{1{,}01^n}{10^5}$ alors la suite (u_n) :

a. converge vers 0 b. a pour limite $+\infty$ c. n'a pas de limite

5) Si $u_n = \dfrac{2n+3}{n+3}$ alors la suite (u_n) :

a. converge vers 0 b. converge vers 2 c. diverge

6) Si $u_n = 2 - 0{,}5^n$, alors la suite (u_n) :

a. converge vers 0 b. converge vers 2 c. diverge

2 **Vrai ou Faux**. Corriger les énoncés faux:

1) la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 0{,}1 \end{cases}$ est une suite décroissante.

2)Soit la suite (u_n) définie par $u_n = -\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Cette suite est décroissante.

3)La suite telle que $u_n = \dfrac{1}{n}$, pour $n > 0$, est une suite majorée par 1 et minorée par 0.

4)Si une suite (u_n) $(n \in \mathbb{N})$est décroissante, alors elle est majorée par u_0 .

5)Si une suite (u_n) $(n \in \mathbb{N})$ est croissante, alors elle est minorée par u_0 .

3 Montrer que la suite définie sur IN* par $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ n'est pas monotone.

4 1) Montrer à l'aide de la définition que la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0.

2) Montrer à l'aide de la définition que la suite de terme général $u_n = n$ a pour limite $+\infty$

(On montre de façon générale que si p est un entier strictement positif, la suite de terme général $(\dfrac{1}{n^p})$ converge vers 0 et la suite de terme général (n^p) admet pour limite $+\infty$).

II. Opérations sur les limites

Activités de découverte

Activité 1 :

On considère les deux suites u et v définies respectivement sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = -3 + \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n-2}{2n}$$

1) Montrer, à l'aide de la définition, que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -3$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2}$

2) Soient les suites $w = u + v$ et $t = u.v$. Que peut-on conjecturer sur limites respectives de w et de t ?

➢ Plus généralement, on montre que si u et v sont deux suites telles que

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell'$ alors on a :

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell' \quad ; \quad \lim_{n \to +\infty} (u_n . v_n) = \ell . \ell'$$

Activité 2 :

Soit, pour $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{1}{n + (-1)^n}$.

1) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $\dfrac{1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n-1}$.

2) Que peut-on conjecturer sur la limite de (u_n) ?

➢ Plus généralement, on montre que si u , v et w sont trois suites réelles vérifiant :

$$\begin{cases} \text{- Pour tout } n > n_0,\ v_n \leq u_n \leq w_n \\ \qquad\qquad \text{et} \\ \text{- } \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

Activité 3 :

1)Soit la suite (u_n) définie pour $n > 0$ par : $u_n = \dfrac{n^2 + 2n + 2}{n}$.

Démontrer que pour tout $n > 0$, $u_n > n$. Que peut-on conjecturer sur la limite de (u_n) ?

2) Soit la suite définie pour $n > 0$, par : $v_n = \dfrac{-1-n}{\sqrt{n}}$.

Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $v_n < \sqrt{n}$. Que peut-on conjecturer sur la limite de (v_n)?

Opérations sur les limites

Théorème

Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$ (a et b désignent des réels ou l'un des symboles $+\infty$ et $-\infty$). On peut conclure sur la limite de la somme, du produit et du quotient dans certains cas, consignés dans les tableaux suivants :

1) la somme $(u_n + v_n)$

a \ b	b réel	$+\infty$	$-\infty$
a réel	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	X
$-\infty$	$-\infty$	X	$-\infty$

2) le produit $u_n \cdot v_n$

a \ b	b réel	$+\infty$	$-\infty$
a réel	ab	$\pm\infty$ $(a \neq 0)$	$\pm\infty$ $(a \neq 0)$
$+\infty$	$\pm\infty$ $(b \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$ $(b \neq 0)$	$-\infty$	$+\infty$

3) Le quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$

a \ b	b réel $\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
a réel	$\dfrac{a}{b}$	0	0
$+\infty$	$\pm\infty$	X	X
$-\infty$	$\pm\infty$	X	X

Remarques

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors on ne peut pas conclure pour $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n)$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ et, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors on ne peut pas conclure pour $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n)$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ et, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \infty$, ou si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors on ne peut pas conclure pour $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

Théorèmes de comparaison

Nous admettons les résultats énoncés dans le tableau suivant :
-les quatre premiers permettent de déterminer le comportement à l'infini d'une suite par comparaison à d'autres suites dont le comportement est connu ;
-le dernier résultat autorise le passage à la limite dans une inégalité.

hypothèse 1 : une inégalité (à partir d'un certain rang)	**hypothèse 2 : Comportement à l'infini**	**conclusion**
$u_n \leq x_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$
$x_n \leq u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$
$u_n \leq x_n \leq v_n$	(u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ	(x_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$
$\lvert x_n - \ell \rvert \leq u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	(x_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$
$x_n \leq y_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$ et	$\ell \leq \ell'$

1 Etudier la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = 3n^2 - 1 + \frac{1}{n}$; b) $u_n = 1 - 5^n$; c) $u_n = (1-3n)(n^2+n-2)$

d) $u_n = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^n}$; e) $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3$; f) $u_n = \frac{1}{n+5^n}$

2 Etudier la limite de la suite (u_n) à l'aide d'un théorème de comparaison.

a) $u_n = \cos n - n$; b) $u_n = 2n + (-1)^n$; c) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

3 Considèrons les suites $u_n = \sqrt{n^2+n}$ et $v_n = -n$.

1) Déterminer la limite de (u_n) puis la limite de (v_n).

2) Peut-on déterminer la limite de $(u_n + v_n)$ à partir du tableau précédent ?

3) Montrer que $u_n + v_n = \dfrac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$ pour tout n > 0, en déduire la limite de $(u_n + v_n)$.

III. Convergence de suites monotones

Activités de découverte

Activité 1 :

On pose $u_1 = 1{,}38$; $u_2 = 1{,}338$; ......; $u_n = 1{,}33...38$ (n chiffres 3 suivis du chiffre 8).

1) Vérifier que $u_n - 1 = 3\sum_{i=1}^{n} 10^{-n} + 8 \times 10^{-n-1}$

2)Montrer que cette suite est décroissante et minorée.

3)Montrer que, pour tout n > 0, $0 \le \left| u_n - \frac{4}{3} \right| \le 10^{-n}$. Que peut-on déduire ?

Activité 2 :

Soit la suite de terme général $u_n = 2^n - n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Utiliser la calculatrice pour calculer les dix premiers termes de cette suite.

Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (u_n) et sur sa limite ?

2) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n \ge 0$

3) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $u_n \ge 2^{n-1}$. Conclure.

A retenir

Convergence de suites monotones

Théorème (admis)

- Si une suite est **croissante** et **majorée** , alors elle est **convergente**.
- Si une suite est **décroissante** et **minorée**, alors elle est **convergente**.

Remarques

- Si une suite (u_n) est **croissante** et **non majorée**, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si une suite (v_n) est **décroissante** et **non minorée** , alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Applications

1 On pose $u_1 = 0{,}2$; $u_2 = 0{,}23$
$u_3 = 0{,}235$;.....; $u_7 = 0{,}2357111317$
(u_n s'écrit 0 virgule, suivi de la juxtaposition des n premiers nombres premiers).
Montrer que la suite (u_n) est convergente.

La limite l de cette suite est un réel mystérieux imaginé par le mathématicien Paul Erdös (mathématicien hongrois, l'une des figures marquantes du XXè siècle).

2 On considère la suite définie par $u_n = \dfrac{3^n}{n^2}$
1) Etudier la monotonie de la suite u.
2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 13$, $u_n \geq 2^n$.
3) En déduire la limite de la suite u.

3 On pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} + 4$
1) Conjecturer graphiquement le comportement de la suite (u_n).
2) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 16$
3) Déduire que la suite (u_n) est convergente.

4 Que penses-tu des affirmations suivantes ?
1) Une suite non majorée n'a pas nécessairement pour limite $+\infty$
(vérifier avec $u_n = \left[(-1)^n + 1\right]n$).
2) 1,999999 est un majorant de la suite $v_n = 2 - \dfrac{1000}{n}$

5 On pose, pour tout $n \geq 1$,
$u_n = 1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{n^3}$. ;
1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$
$u_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$
2) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

1,202056903159594…

C'est la limite de la suite (u_n) de l'exercice 5 .
Le français Robert Apéry a prouvé, en 1979, que ce nombre est irrationnel. Est-il transcendant ?
Nul ne le sait à ce jour.
(un nombre est transcendant s'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers)

IV. Suites et fonctions

Activités de découverte

Activité 1:

1) Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \sqrt{1+n+n^2}$

2) Quelle est la limite de la fonction f : $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ quand x tend vers $+\infty$

3) En posant $u_n = f(n)$, que peut-on déduire sur la limite de (u_n) en $+\infty$?

Activité 2:

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n+6}$.

1) Construire la courbe représentant la fonction définie pour $x \geq -6$, par $f(x) = \sqrt{x+6}$, puis la droite d'équation $y = x$.

2) Placer sur l'axe des abscisses les 5 premiers termes de la suite (u_n).

3) Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 3. En déduire qu'elle est convergente. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur de sa limite ?

4) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq 3 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(3-u_n)$.

En déduire, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 \leq 3 - u_n \leq \frac{1}{3^{n-1}}$.

5) Déduire la limite de la suite (u_n) et comparer avec la solution de l'équation $f(x) = x$.

A retenir

Suite du type $u_n = f(n)$

Théorème

Soit (u_n) une suite de terme général $u_n = f(n)$ où f est une fonction.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (fini ou infini), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Image d'une suite par une fonction

Théorème1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite de nombres réels de I.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$,alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$ (a,l finis ou infinis)

Théorème2

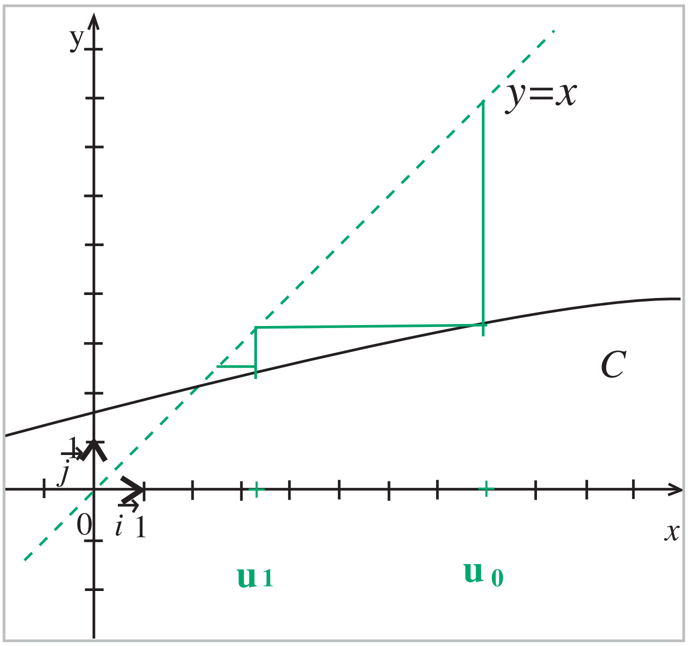
I est un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$. f est une fonction définie sur I et (u_n) une suite de nombres réels de I telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ où $\ell \in I$

- Si f est continue en ℓ , alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$
- Dans le cas où $f(I) \subset I$ et la suite (u_n) est définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = f(u_n)$ on a:

Si f est continue en ℓ , alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$ et $f(\ell) = \ell$

1 Ci-dessous, la représentation graphique C de la fonction $f(x) = \sqrt{x+3}$ pour $x > 0$ et la droite d'équation $y = x$. On a représenté sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

Quelles conjectures peut-on émettre sur cette suite ? Prouver ces conjectures.



2 On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n + 5}$.

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

c) Déterminer alors sa limite.

2) On définit, pour tout entier naturel n, la suite $v_n = \dfrac{5}{u_n}$.

a) Prouver que la suite (v_n) est arithmétique.

b) Exprimer (v_n) en fonction de n, puis (u_n) en fonction de n .

3) Retrouver la limite de la suite (u_n).

Apprendre à chercher

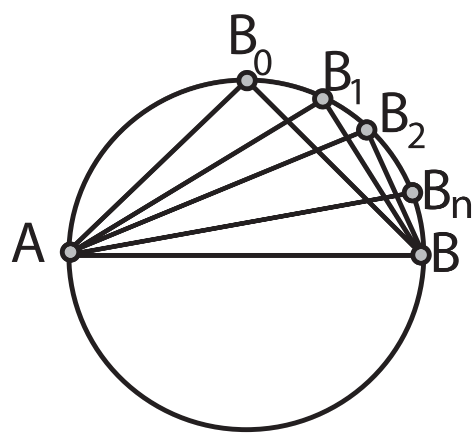
Situation 1

On considère un demi-cercle de diamètre $AB = 1$. On examine la suite de points B_0 , B_1 , B_2 ,...B_n sur ce demi-cercle définis ainsi : $B_0B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $B_1B = \frac{1}{2}$, $B_2B = \frac{1}{3}$, $B_3B = \frac{1}{4}$,.....

$B_nB = \frac{1}{n}$ Démontrer que : $AB_1 \times AB_2 \times AB_3 \times \ldots \times AB_n > AB_0$

Emettre une conjecture sur ce produit lorsque n tend vers l'infini.

Vers une solution :



La première difficulté consiste à penser à élever le produit au carré afin de faire disparaître les racines encombrantes. Ceci fait, il ne reste plus qu'à exprimer le produit en utilisant

Pythagore : $AB_1^{\,2} \times AB_2^{\,2} \times \ldots \times AB_n^{\,2} = (1 - \frac{1}{2^2}).(1 - \frac{1}{3^2})\ldots.(1 - \frac{1}{n^2})$

Puis utiliser : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

On obtient l'expression : $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} \times \frac{n}{n-1} \times \ldots \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2}$.
Ensuite simplifier.

Situation 2

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \ldots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Vers une solution

Les deux membres de l'inégalité étant positifs, il suffit d'étudier le carré du premier et ensuite de majorer toute fraction de la forme $\frac{2k-1}{2k}$ figurant deux fois par $\frac{2k}{2k+1}$.

Situation 3

Calculer l'aire A du domaine plan (figure 1)

défini par les inégalités : $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases}$

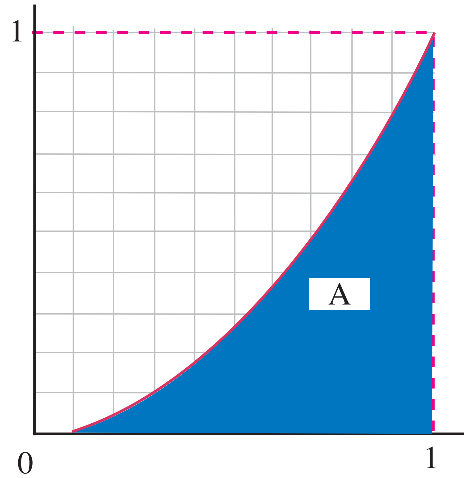
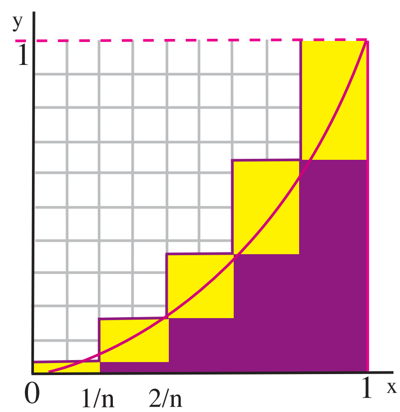


figure 1

Vers une solution

Soit n un entier ($n \ge 1$). On partage le segment $[0;1]$ en n segments de longueur $\frac{1}{n}$ et on désigne par :

- u_n la somme des aires des rectangles situés au-dessous de la courbe.
- v_n la somme des aires des rectangles situés au-dessus de la courbe.



L'évidence géométrique nous autorise à écrire que, pour tout entier $n \ge 1$, $u_n \le A \le v_n$.

Calculer u_n et v_n puis montrer que $A = \frac{1}{3}$

Situation 4

Etudier la suite de terme général $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

Vers une solution

Il est clair que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ donc $u_{n+1} - u_n \ge 0$

Le comportement de la suite (u_n) à l'infini va donc résulter de la réponse à la question : "la suite est-elle ou non majorée ?".

Pour $k \ge 2$, il est clair que $\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k(k-1)}$, c'est à dire $\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Ecrivons cette inégalité pour $k = 2, k = 3, \ldots, k = n$ puis on additionne les inégalités membre à membre en observant les simplifications. On en tire :

$u_n \le 2 - \frac{1}{n}$ ou encore $u_n \le 2$. Conclure.

suite de Syracuse

La suite de Syracuse est définie par $u_0 \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \textit{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \textit{si } u_n \textit{ est impair} \end{cases}$$

Le problème que se posent les mathématiciens est le suivant:

" Quel que soit le nombre N choisi au départ, la suite obtenue est-elle finie ? "

Aujourd'hui, les mathématiciens pensent qu'il en est ainsi mais ne l'ont pas démontré, le problème résiste depuis 50 ans. Pour avoir une idée de la difficulté, on peut faire fonctionner l'algorithme précédent à l'aide d'un tableur et essayer avec diverses valeurs pour N (exemple N=3 ; 4 ; 26 ; 27).

Taper en A1 choisir N.

Entrer un entier quelconque en B1.

En B2, taper la formule

=SI(OU (B1=1 ;B1= " ") ; " " ;SI(MOD(B1 ;2)=0 ;B1/2 ;3*B1+1))

Recopier cette formule vers le bas.

Exercices et problèmes

1 Donner, dans chaque cas, un exemple de suite (u_n) satisfaisant aux conditions suivantes :

1) (u_n) est majorée et non minorée.

2) (u_n) est strictement positive et converge vers 0

3) (u_n) est bornée et divergente

4) (u_n) converge vers 0 et n'est pas monotone

5) (u_n) est minorée par 0, non constante, et converge vers 1

6) (u_n) est bornée par 0 et 2, non constante, et converge vers 1

7) (u_n) diverge vers $+\infty$ et n'est pas croissante

8) (u_n) est non majorée et ne diverge pas vers $+\infty$.

2 On considère une suite (u_n) à termes strictement positifs et la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \frac{1}{u_n}$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (On justifiera les propositions vraies et on donnera un contre-exemple aux propositions fausses)

1) si (u_n) est croissante,alors (v_n) est décroissante.

2) si (u_n) est bornée, alors (v_n) est bornée.

3) si (u_n) est minorée par1, alors (v_n) est majorée par 1.

4) si (u_n) diverge, alors (v_n) converge vers 0.

5) si (u_n) converge, alors (v_n) converge.

3 Pour chacune des suites ci-dessous, dire si elle est arithmétique (A) , géométrique (G), ni l'une ni l'autre (N) et justifier chaque réponse.

1) $u_n = 2^n + 1$ 2) $u_n = \dfrac{1}{2^n}$

3) $u_n = -(n+3)$ 4) $u_n = -2n + 3$

5) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n$

6) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2 + u_n$

7) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -3u_n$.

4 Dans les questions ci-dessous, étudier la monotonie des suites (u_n) à l'aide de la technique indiquée.

1) Avec la différence "$u_{n+1}-u_n$":

a) $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

b) $u_n = n^2-5n$

c) $u_n = 3n+(-1)^n$

d) $u_n = n - 3^n$

2) Avec le quotient "$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$" :

a) $u_n = \dfrac{n}{3^n}$

b) $u_n = 0{,}1^n \times n^2$

c) $u_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \times \dots \times \dfrac{2n-1}{2n}$

3) Avec la fonction f "$u_n = f(n)$ "

a) $u_n = n + \cos n$; b) $u_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

c) $u_n = n^2(3-n)$.

4) Avec un raisonnement par récurrence:

a) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_n = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = \dfrac{7\pi}{22} \\ u_{n+1} = u_n{}^2 \end{cases}$

5 Montrer que chacune des suites ci-après est majorée en déterminant un majorant :

a) $u_n = 1 + \dfrac{2}{7} + \dots + \left(\dfrac{2}{7}\right)^n$

b) $u_n = 10 + 2\cos n$

c) $u_n = 9+3+1+....+3^{-n+2}$

d) $u_n = \dfrac{3n}{n+1}$ **e)** $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

6 Montrer que la suite de terme général $u_n = 1+0{,}6+0{,}6^2+...+0{,}6^n$ est majorée.

7 Trouver l'erreur commise dans le raisonnement qui suit:

" On pose: $x = 1 + \dfrac{5}{4} + \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{4}\right)^3 + ...$

alors $\dfrac{5}{4}x = \dfrac{5}{4} + \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{4}\right)^3 + ...$

Donc : $x - \dfrac{5}{4}x = 1$ et donc $x = -4$ ".

8 Soit u la suite définie par :

$$u_n = (-3)^n + 4$$

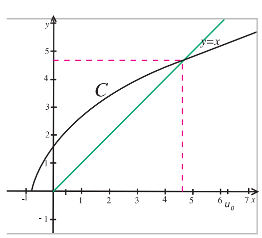
1) Calculer les 6 premiers termes de la suite.
2) Emettre une conjecture sur la convergence ou la divergence de la suite u .
3) Calculer $u_{n+1}-u_n$ puis vérifier que

$|u_{n+1} - u_n| > 1$

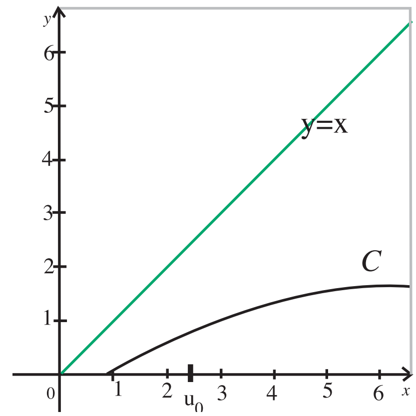
4) Soit l un réel quelconque ; trouver un intervalle ouvert de centre l qui ne contient pas à la fois u_n et u_{n+1} .

9 u est une suite définie par la donnée de u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction représentée par la courbe C dans le repère ci-dessous.
Dans chaque cas, utiliser la représentation graphique de la suite u, pour conjecturer son sens de variation et sa limite.

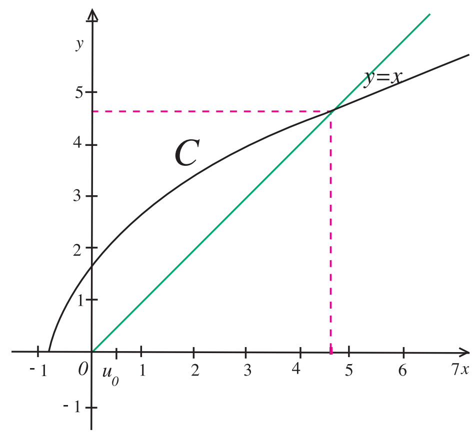
1



2



3



10 Quelle est la valeur de

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)... ?$$

11 On pose $u_1 = 0{,}1$; $u_2 = 0{,}12$;
$u_3 = 0{,}123$; ....;$u_{10} = 0{,}12345678910$
u_n est le nombre obtenu en juxtaposant successivement tous les entiers , 1, 2, ….,n après la virgule.
Montrer que la suite (u_n) est convergente.

La limite l de cette suite est appelée le nombre de Champernowne - du nom du mathématicien anglais qui l'a imaginé en 1933. Ce nombre est irrationnel, et même transcendant : résultat prouvé par l'allemand Kurt Mahler en 1961…sur son lit d'hôpital !
(un nombre est transcendant s'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers)

12 Soit la suite (u_n) positive définie par :
et $u_0 = 10$ et $(u_{n+1})^2 = 1 + (u_n-1)^2$.
1)Donner une représentation géométrique de la relation définissant u_1 .

2) Construire le carré c_0 de côté u_0 et , à l'intérieur de c_0 , le carré c_1 de côté u_1.

3) Itérer cette représentation jusqu'à u_{10}. Conjecturer la limite de la figure représentant $(u_n)^2$ quand n tend vers $+\infty$, puis celle de u_n. Valider cette conjecture par l'étude algébrique de la suite(u_n) .

13 Soit la suite positive définie par : $u_0 = 10$ et $(u_{n+1})^2 = (u_n)^2 - 3u_n + 3$

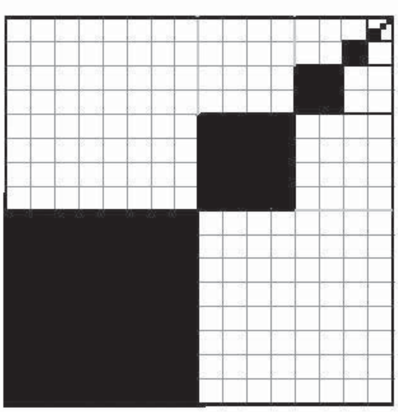
1) Vérifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,on a :

$$(u_{n+1})^2 = (u_n - 1)^2 + 1 - 2 \times (u_n - 1) \times \cos 60^\circ$$

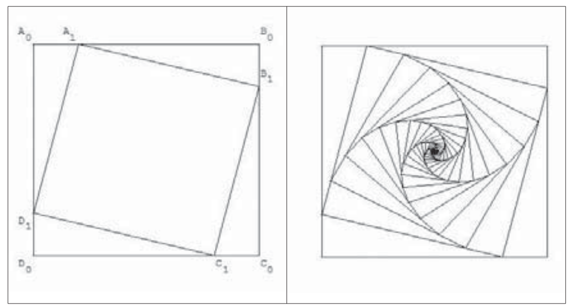
2) En s'inspirant de l'exercice précédent, interpréter géométriquement la relation entre u_0 et u_1 .

3) Itérer cette nouvelle représentation. Que se passe-t-il ? Revenir à l'étude algébrique de la suite(u_n)

14 On partage un carré en quatre carrés et on noircit le carré inférieur gauche. On applique le même procédé au carré en haut à droite. Et ainsi de suite. Quelle sera finalement l'aire de la partie noire ?



15 P_0 est un carré $A_0B_0C_0D_0$, la longueur de son côté est 10 cm. On construit le carré P_1 comme l'indique la figure : ses sommets sont situés sur les côtés de P_0 à 1 cm des sommets de P_0. On construit de la même façon les carrés P_2 , P_3 ...
En observant cette figure, on peut se demander si le dessin s'arrête et comment évoluent les côtés et les aires des carrés.



16 Soit la suite réelle u de premier terme $u_0 = 3$ et définie pour tout entier naturel n par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$

1) Démontrer que tous les termes de la suite sont positifs.

2) Si la suite est convergente, démontrer que sa limite est solution de l'équation $x^2 + x - 2 = 0$.

3) Soit la suite v de terme général défini pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

Démontrer que v est une suite géométrique convergente et préciser sa limite.

4) En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite.

17 Pour tout entier naturel n on pose :

$$u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$$

1) Prouver, pour tout entier $n > 0$, l'équivalence suivante :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 0{,}95 \quad \Leftrightarrow \quad (1+\frac{1}{n})^{10} \leq 1{,}9$$

2) On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x) = (1+\frac{1}{x})^{10}$

a) Etudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.

b) justifier l'existence dans l'intervalle $[1;+\infty[$ d'un nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1{,}9$.

c) Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$

d) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 16$ on a : $(1+\frac{1}{n})^{10} \leq 1{,}9$.

3) a) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

b) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

4) a) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, prouver que pour tout entier $n \geq 16$, on a :

$$0 \leq u_n \leq 0{,}95^{n-16} u_{16}.$$

b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

18 **1)** On considére la suite (v_n) définie par : $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = v_n + 2(n+1)$
Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n^2 + n + 1$

2) Voici un phénomène étrange : $\sqrt{1} = 1$,

$\sqrt{3+\sqrt{1}} = 2$, $\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}} = 3$

$\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}} = 4$

En considérant la suite (u_n) définie par : $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} = \sqrt{v_n + \sqrt{u_n}}$ démontrer ce phénomène.

19 On considère la suite (u_n)définie par récurrence par :

$u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et pour tout $n \geq 2$

$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n$

1) Calculer u_2 ,u_3 et u_4 .

2) Résoudre l'équation suivante : $x^2 = 6x - 5$

3) Déterminer deux réels α et β tels que: $u_n = \alpha \times 5^n + \beta$ .En déduire u_{10} .

20 On pose, pour tout $n \geq 0$.

1) A l'aide de la calculatrice, peut-on conjecturer le comportement de u_n lorsque n tend vers $+\infty$? (On calculera u_n pour $u_n = \sqrt{n^2 + 6n} - n$
$n = 10^3, 10^4, 10^5, \dots. 10^{15}$) .

2) Etablir l'égalité $u_n = \dfrac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1}$

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

3) Expliquer le comportement «anormal» de la calculatrice.

21 On considère la suite (u_n) définie par:

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier $n \geq 0$

1) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n,
on a : $u_n \geq n^2$.

b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3) Conjecturer une expression de u_n , en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

22 Etant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points A_1 milieu du segment $[A_0B_0]$ et B_1 barycentre de

$\{(A_0;1),(B_0;2)\}$; puis on définit A_2 milieu du segment $[A_1B_1]$ et B_2 barycentre de $\{(A_1;1),(B_1;2)\}$ et ainsi de suite,

A_3; B_3;.......; A_n ; B_n.

1) Placer les points A_1, B_1 , A_2, B_2 pour :
$A_0B_0 = 12$ cm.
Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n lorsque n devient très grand ?

2) On munit la droite (A_0B_0) du repère $(A_0;\vec{i})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$. Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n .
Justifier que pour tout entier naturel $n > 0$,

on a : $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

3) On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 0$ et $b_0 = 12$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}$$

a) Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = b_n - a_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.

b) Montrer que la suite (a_n), est croissante puis que la suite (b_n) est décroissante.

c) Déduire que les deux suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et ont la même limite.

d) On considére la suite (t_n) définie par $t_n = 2a_n + 3b_n$.
Montrer qu'elle est constante.

4) A partir des résultats obtenus, préciser la limite des points A_n et B_n lorsque n tend vers $+\infty$

23 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$.

1) Donner les valeurs de u_0 , v_0 , u_1, v_1, u_2, v_2, u_3 , v_3 , u_4 , v_4

2) Démontrer que les deux suites sont convergentes. Quelle est leur limite ?

3) Que peut-on dire du nombre dont l'écriture décimale est 0,9999…(avec une infinité de 9) ?

24 On considére la suite de terme général:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

1) Démontrer que, pour tout, $n \geq 1$, on a

$$S_{2n} \geq \frac{1}{2} + S_n$$

2) Démontrer par récurrence sur k que, pour tout k il existe n tel que $S_n \geq k$.
En déduire que la suite (S_n) est divergente.

25 **1)** Combien la somme $S = 1! + 2! + \dots + (n-1)!$ comporte-t-elle de termes ?

2) En déduire que $S \leq (n-1) \times [(n-1)]\,!$,
puis que $S \leq n\,!$

3) Soit la suite définie pour tout entier naturel,
$n \geq 1$ par $u_n = \frac{1! + 2! + 3! + \dots + (n-1)! + n!}{(n+1)!}$

En utilisant les résultats précédents, établir que:

$0 \leq u_n \leq \frac{2(n!)}{(n+1)!}$ En déduire que $0 \leq u_n \leq \frac{2}{n+1}$

4) Quelle est la limite de la suite de terme général $\frac{2}{n+1}$? En déduire la limite de la suite (u_n).

Suites de Farey

John Farey (1766-1826), géologue anglais, ne marqua en rien sa discipline. Il émit un jour une conjecture sur une certaine suite de fractions, conjecture prétendument démontrée quatorze ans plus tôt par un mathématicien oublié. Le nom de Farey passa à la postérité grâce à Augustin Cauchy qui reprit la question. Un siècle plus tard, Lester Ford en donna une magnifique illustration géométrique.

Dans son Apologie d'un mathématicien, " G. H. Hardy remarque : «Farey est immortel pour avoir échoué à comprendre un théorème que Haros avait parfaitement démontré quatorze ans plus tôt». Ce jugement sévère doit être tempéré. Les querelles de priorité et les erreurs d'attribution sont légion dans l'histoire des découvertes mathématiques. Le dictionary of National Biography consacre une vingtaine de ligne, à John Farey : une carrière classique de géologue qui culmine avec une contribution au Général View of the Agriculture and Minerals of Derbyshire. John Farey n'a rien boulversé dans sa discipline. Ses travaux sont oubliés. Son biographe ne fait aucune mention de sa trouvaille.

L'histoire commencé en 1816. John Farey fait parvenir au Philosophical Magazine une lettre intitulée «On a curious Property of vulgar Fractions».

«En examinant récemment les tables calculées par Henry Goodwyn, [...], j'ai eu la chance de découvrir la propriété générale suivante : Si, aprés avoir rangé dans l'ordre de grandeur les fractions irréductibles dont le dénominateur n'excède pas un nombre entier donné, on en prend trois de suite à volonté, alors en additionnant les numérateurs, d'une part, et les dénominateurs, d'autre part, de la première et de la troisième de ces fractions, on détermine une fraction, non nécessairement irréductible, égale à la fraction intermédiaire...

Je ne suis pas en mesure de préciser si cette curieuse propriété des fractions ordinaires a déjà été portée à l'attention du public ou si une démonstration en est connue. Je serais heureux de connaître sur ce sujet le sentiment de vos lecteurs mathématiciens».

La lettre de Farey fut traduite en 1816 dans le bulletin de la Société philomatique. Augustin Cauchy en donna, la même année, une démonstration. A la suite de Cauchy, la communauté mathématique adopta la terminologie «suites de Farey», suites qui, de simple curiosité devinrent avec les avancées en théorie des nombres un sujet crucial d'étude.

Les suites de Farey : Pour construire la suite de Farey F_n d'ordre n, on range, en ordre croissant, les fractions irréductibles comprises entre 0 et 1 dont le dénominateur est inférieur ou égal à n. Ainsi $F_1 = \left\{0,1\right\}$, $F_2 = \left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$ $F_3 = \left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$ $F_4 = \left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\}$

$F_5 = \left\{0,\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},1\right\}$;......

Les suites de Farey possèdent les deux propriétés caractéristiques suivantes :

1) Si $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ sont deux fractions consécutives de F_n, on a $qp' - pq' = 1$.

2) Si $\frac{p}{q}$, $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p'}{q'}$ sont trois fractions successives de, on a : $\frac{p''}{q''} = \frac{p+p'}{q+q'}$.

A l'aide de ces propriétés, on peut construire F_{n+1} à partir de F_n .

Représentation d'une suite de Farey par des cercles de Ford

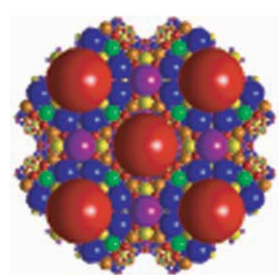


Illustration tridimensionnelle des suites de Farey

Chapitre 2

LIMITES DE FONCTIONS

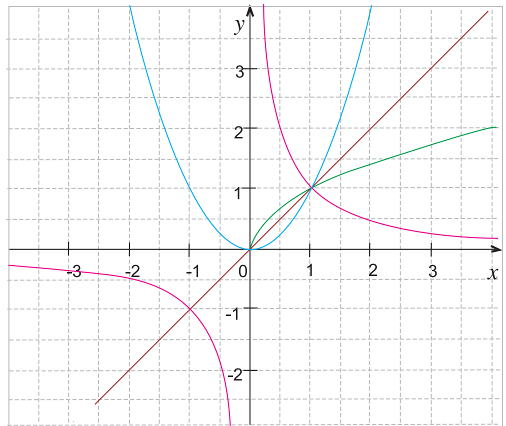
I . Généralités sur les fonctions.
II . Limite d'une fonction.
III . Limites et droites asymptotes.
IV . Limites par comparaison.

Augustin Cauchy (1789- 1857)
La définition actuelle de la limite d'une fonction en un point lui doit beaucoup

I. Généralités sur les fonctions

Activités préliminaires

Activité 1:



Ci-contre sont représentées les fonctions

$x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto \sqrt{x}$

1) Indiquer la courbe de chacune d'elles.
2) Comparer ces fonctions.
3) Pour $x \geq 0$, démontrer que la courbe représentant la fonction $f(x) = x^2$ est symétrique de la courbe représentant la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ par rapport à la droite $\Delta : y = x$.
4) Quels sont les autres éléments de symétries ?

Activité 2:

Chaque question comporte une et une seule réponse correcte, laquelle.

1) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5(x-1)^3$ est :
□ paire □ impaire □ ni paire ni impaire.

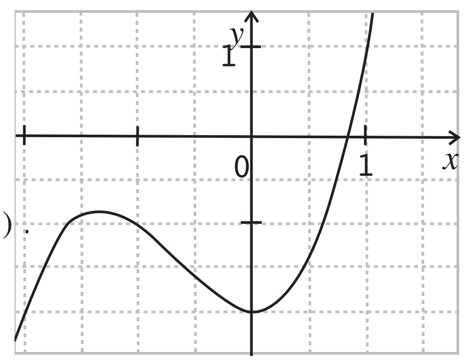
2) La fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ par : $g(x) = \dfrac{3x+4}{2x+1}$ est

□ croissante □ décroissante □ ni croissante ni décroissante.

3) L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est :

□ $\{-1;0\}$ □ $[-1;0]$ □ $\{0;1\}$ □ $[0;1]$

Activité 3 :



Cette courbe est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2;1]$.
1) Dresser le tableau de variation de f.
2) Lire graphiquement les valeurs de $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
3) Avec la précision permise par le dessin, résoudre les équations : $f(x) = -1$; $f(x) = x$.

Activités de découverte

Activité 1 :

On considére les fonctions

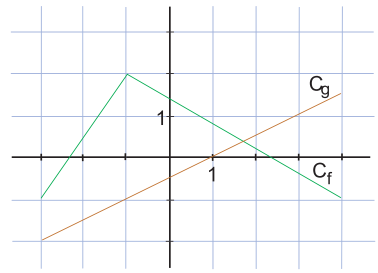
$f : \{0;1;2;3;...;10\} \mapsto \mathbb{R}$

et

$g : \{0;1;2;3;....;10\} \mapsto \mathbb{R}$

définies par le tableau ci-contre.
Compléter ce tableau.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0	2	3	5	7	10	3	4	7	5	3
$g(x)$	0	1	1	2	3	1	4	2	5	3	8
$f(g(x))$											
$g(f(x))$											

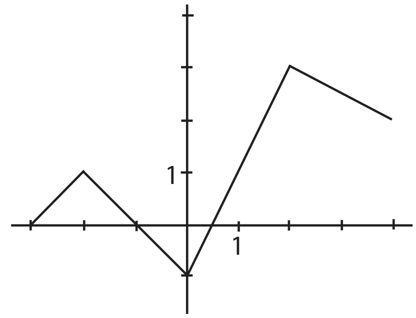


Activité 2:

Deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $\left[-3;4\right]$, sont représentées ci-contre.
Représenter les fonctions :
$-f$; $3f$; $f+g$; $f-g$.

Activité 3:

Une fonction définie sur $\left[-3;4\right]$ est représentée graphiquement ci-contre. Pour chacune des fonctions suivantes :



$f_1(x) = -f(x)$, $f_2(x) = f(-x)$, $f_3(x) = -f(-x)$,
$f_4(x) = |f(x)|$, $f_5(x) = f(x+2)$
$f_6(x) = f(x) + 1$, $f_7(x) = 3f(x)$, $f_8(x) = f(2x)$.

1) Déterminer son ensemble de définition .

2) La représenter graphiquement.

Activité 4:

On donne ci-dessous le tableau de variation de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

En déduire le tableau de variations de la fonction fog sur $\mathbb{R}$.

A retenir

Composée de deux fonctions

Définition

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D et g une fonction dont l'ensemble de définition est $f(D)$. On appelle fonction composée de f et g, la fonction notée $g\,o\,f$ et définie pour tout $x \in D$, par : $(gof)(x) = g(f(x))$

Remarque :

fog est généralement différente de gof .

Sens de variation d'une composée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur l'ensemble $f(I) = \{f(x), \text{où } x \in I\}$.

Théorème

Si f et g ont même sens de variation, alors gof est **croissante** sur I.
Si f et g ont des sens de variation contraires, alors gof est **décroissante** sur I.

Fonctions associées

Théorème admis

Soit C_f la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$

- La courbe C_g représentant la fonction g définie par $g(x) = f(x) + k$, k réel, est l'image de C_f par $t_{k\vec{j}}$.
- La courbe C_h représentant la fonction h définie par $h(x) = f(x + \lambda)$, λ réel, est l'image de C_f par $t_{-\lambda\vec{i}}$
- La courbe C_k représentant la fonction k définie par $k(x) = -f(x)$ est l'image de C_f par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
- La courbe C_l représentant la fonction l définie par $l(x) = f(-x)$ est l'image de C_f par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Applications

1 Soit f_1 et f_2 deux fonctions définies par $f_1 = x^2 - 1$ et $f_2(x) = \sqrt{x}$

1) Déterminer les domaines de définition de f_1 et f_2 .

2) a) Calculer, lorsque c'est possible : $f_1 o f_2 (3)$; $f_2 o f_1 (3)$; $f_1 o f_2 (0)$; $f_2 o f_1 (0)$ $f_1 o f_2 (-2)$; $f_2 o f_1 (-2)$.

b) Les domaines de définition de $f_1 o f_2$ et $f_2 o f_1$ peuvent ils être identiques?

3) Déterminer les domaines de définition de $f_1 o f_2$ et $f_2 o f_1$, ainsi q'une expression de ces fonctions.

2 Démontrer que la composée de deux fonctions affines est une fonction affine.

3 Ecrire la fonction f comme composée de deux fonctions connues et en déduire son sens de variation dans chacun des cas suivants :
a) f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; b) f définie sur $[-2;2]$ par $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

4 Soit $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Vérifier que $f(x) = 3 + \dfrac{2}{x-1}$. En déduire le tableau de variation de la fonction f. Préciser la transformation utilisée.

5 Soient f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x) = 2x^2 - 1$ et $g(x) = 4x^3 - 3x$
Vérifier que l'on a : $(fog)(x) = (gof)(x)$

6 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et C_f sa courbe représentative dans un repére $(O;\vec{i},\vec{j})$. Représenter dans le même repère les fonctions suivantes :

$g(x) = \sqrt{x} + 3$; $h(x) = \sqrt{x-2}$; $k(x) = \sqrt{-x}$

II. Limite d'une fonction.

Activités préliminaires

Activité 1

1) Déterminer la limite des fonctions suivantes quand x tend vers $+\infty$:

$$x \mapsto \sqrt{x};\quad x \mapsto x;\quad x \mapsto x^2;\quad x \mapsto x^n (n \in \mathbb{N}^*)$$

2) Déterminer la limite des fonctions suivantes quand x tend vers $+\infty$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\ ;\quad x \mapsto \frac{1}{x}\ ;\quad x \mapsto \frac{1}{x^2}\ ;\ x \mapsto \frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N}^*))$$

3) Donner un exemple de fonction qui n'admet pas de limite en $+\infty$

Activité 2:

Etudier la limite de la fonction f en l'endroit indiqué :

a) $f(x) = 8x^3 + 2x^2 + 1$ en $+\infty$; $-\infty$ et 0. b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ en $+\infty$; $-\infty$ et 1.

Activité 3:

Déterminer les limites suivantes (on justifiera les réponses).

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x} + 2x + 3)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3\sqrt{x} + x^2)$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{-5}{x} + x^2)$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\frac{1}{x} + 3x^2 - 2)$ e) $\lim\limits_{x \to 2^+} (\frac{3}{x-2} + 5x + 7)$ f) $\lim\limits_{x \to 2^+} (\frac{2}{x+2} + \frac{1}{2})$

Activité 4:

Dans chaque cas, tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, une courbe représentant une fonction f vérifiant les conditions suivantes :

1) f est définie sur $]-1;+\infty[$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$; $f(0) = -3$

2) f est définie sur $[0;3[$ et sur $]3;+\infty[$;

$f(0) = 2$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Activités de découverte

Activité 1:

1) Les théorèmes vus, permettent-ils de calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x})$?

Montrer que, pour tout $x > 0$, $x - \sqrt{x} = x\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, en déduire cette limite.

2) Déterminer la limite éventuelle de $f(x)$ au point a, après avoir éventuellement simplifié.

a) $f(x)=\dfrac{3x^2-8x^3}{x^2}$, $a=0$, b) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$, $a=-2$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$, $a=0$ d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}}$, $a=0$

e) $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x-3}$, $a=3$ f) $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$ $a=+\infty$

Activité 2 :

1) Ecrire $u:x\mapsto\sqrt{1+x+x^2}$ sous la forme gof , puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)$.

2) Déterminer la limite éventuelle de f au point considéré.

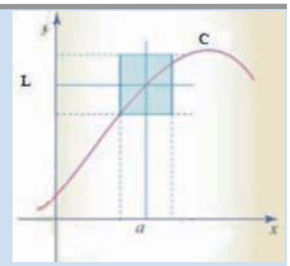
a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}$ en $+\infty$; b) $f(x)=\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$;

3) Plus généralement, a,b,l sont chacun un réel ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$,
si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ et $\lim\limits_{y\to b}g(y)=l$, quelle conjecture peut-on faire à propos de $\lim\limits_{x\to a}gof(x)$?

A retenir

Limite finie en a (a réel)

Définitions



1) Considérons une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a (sauf peut - être en a) et L un réel.
Une fonction f a pour limite L lorsque x tend vers a, si pour tout intervalle ouvert J contenant L , il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que si $x\in I\setminus\{a\}$, $f(x)\in J$.
On note $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ ou $\lim\limits_{a}f=L$

2) Considérons une fonction définie sur un intervalle ouvert de la forme $]a,b[$ et L un réel.
Une fonction f a pour limite L à droite en a si pour tout intervalle ouvert J contenant L, il existe un réel $\alpha>a$ tel que si $x\in]a,\alpha[$, $f(x)\in J$
On note $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=L$ ou $\lim\limits_{a^+}f=L$

3) Considérons une fonctions définie sur un intervalle ouvert de la forme $]b,a[$ et L un réel.
Une fonction f a pour limite L à gauche en a si pour tout intervalle ouvert J contenant L, il existe un réel $\alpha<$ a tel que si $x\in]\alpha,a[$, $f(x)\in J$.
On note $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=L$ ou $\lim\limits_{a^-}f=L$

Remarques

- Si une fonction admet une limite en a, cette limite est unique
- $(\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=L)\Leftrightarrow(\lim\limits_{x\to a}f(x)=L)$

Théorème

1) f étant une fonction polynôme ou l'une des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$, ou encore la somme, le produit, le quotient ou la valeur absolue de telles fonctions, si f est définie en a , alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ où a est un réel .

2) Si, pour $x \neq a, f(x) = g(x)$, où g est une fonction définie en a et telle que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$ alors f admet une limite en a, et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(a)$.

Limite en $+\infty$ ou $-\infty$

Théorème

A l'infini, une fonction polynôme a même limite que son terme du plus haut degré.
A l'infini, une fonction rationnelle a même limite que le quotient simplifié de ses termes du plus haut degré.

Opérations sur les limites

Nous rappelons ci-dessous les résultats algébriques qui nous renseignent, dans certains cas, sur la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.
Dans chaque cas, il s'agit de limites au même point a (a réel ou $+\infty$ ou $-\infty$).

Théorème

1) Limite d'une somme

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en a , la fonction $f + g$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau ci-contre.

$\lim\limits_{x \to a} f$ \ $\lim\limits_{x \to a} g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

2) Limite d'un produit

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en a , la fonction $f.g$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau ci-contre.

$\lim\limits_{x \to a} f$ \ $\lim\limits_{x \to a} g$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \neq 0$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ on ne peut conclure.

A retenir

3) Limite d'un quotient

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en a, la fonction $\frac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau ci-contre.

$\lim_{x\to a} f$ \ $\lim_{x\to a} g$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	0
$+\infty$	$\pm\infty$	?	?
$-\infty$	$\pm\infty$	?	?

Remarque

Si $\ell' = 0$, on ne peut conclure que lorsque g garde un signe constant au voisinage de a.
Les situations marquées ? sont appelées **formes indéterminées.**

Limite d'une fonction composée :

Théorème

a, b, l sont chacun un réel ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{y\to b} g(y) = l$, alors $\lim_{x\to a} gof(x) = l$

Applications

1 Cocher la seule bonne réponse

a) $\lim_{x\to+\infty} (x - 3 - \frac{1}{x}) =$ ○ $+\infty$ ○ 0 ○ $-\infty$

b) $\lim_{x\to 0^-} (-x + 4 + \frac{2}{x})$ ○ $+\infty$ ○ 0 ○ $-\infty$

c) $\lim_{x\to 3^+} \frac{2x-7}{x-3}$ ○ $+\infty$ ○ 0 ○ $-\infty$ ○ 2

2 On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, avec $f(x) > 0$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -2$. Alors

a) $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) =$ ○ $+\infty$ ○ $-\infty$ ○ 0 ○ on peut pas le savoir.

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) \times g(x) =$ ○ $+\infty$ ○ $-\infty$ ○ 0 ○ on peut pas le savoir.

c) $\lim_{x\to+\infty} h(x) \times g(x) =$ ○ $+\infty$ ○ $-\infty$ ○ 2 ○ on peut pas le savoir.

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{f(x)} =$ ○ $+\infty$ ○ $-\infty$ ○ 0 ○ -2

3 Trouver toutes les bonnes réponses.
Les fonctions u et g sont connues par les tableaux suivants.

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	↘	3	↘	-1	↗	2

x	$-\infty$		-2		5		2		3		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

On considère la fonction $f = g \circ u$

Soit la fonction u dont le tableau des variations est donnée ci-dessous.

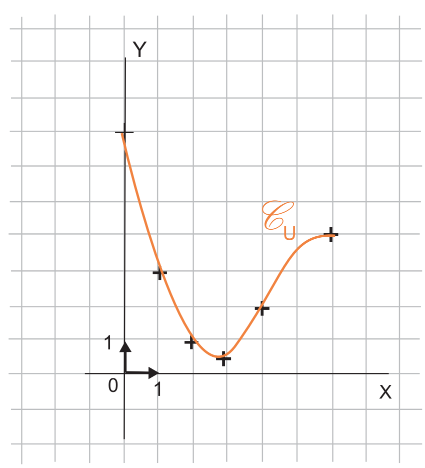
○ $f(-2) = 0$ ○ $f(-2) = 1$ ○ $f(5) = -1$ ○ $f(2) = 0$

○ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ○ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ○ $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$

4

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$u(x)$	4	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	-2

Etablir le tableau des variations complet de la fonction $\frac{1}{u}$. Pourquoi peut-on dire que le point E (2 ; 0) est exclu de la courbe de la fonction $\frac{1}{u}$.



5 On considére la fonction u définie sur $[0;6]$
et représentée par la courbe C ci-contre.
Le minimum de u est 0,5 pour $x = 3$.
1) Dresser le tableau des variations de la fonction u.
2) Etudier le sens de variation de la fonction $f = gou$
et dresser son tableau des variations où g est la fonction
$x \mapsto \frac{1}{x}$

III. Limites et droites asymptotes.

Activités préliminaires

Activité 1 :

1) Réduire au même dénominateur en indiquant les valeurs interdites.

a) $2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}$, b) $\dfrac{2x-1}{x^2}+x-1$, c) $x-3+\dfrac{4}{x^2-1}$, d) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}+1$

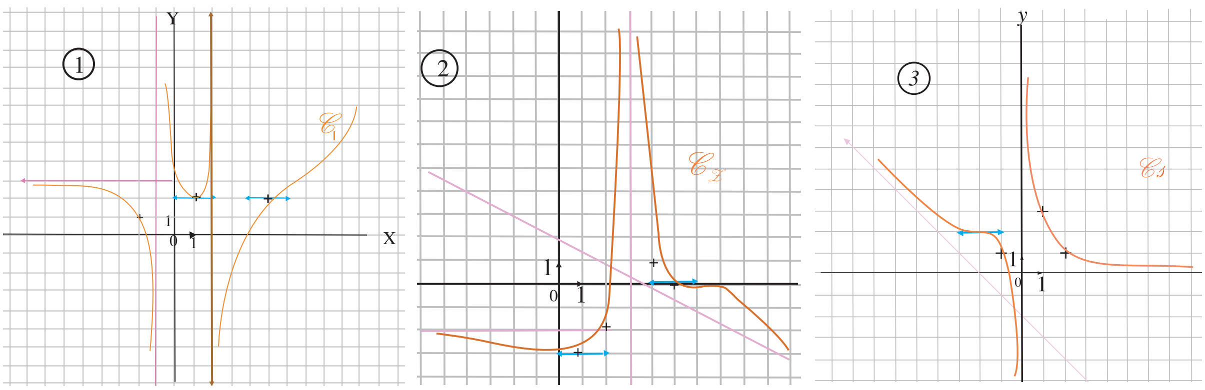
2) Déterminer a ,b et c tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$; $\dfrac{4x^2-9x}{x-2}=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{-x^3+3x^2-x-1}{x^2+1}$

Déterminer les réels a,b et c tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x^2+1}$

Activité 2 :

Chaque courbe ci-dessous est celle d'une fonction f



1) Pour chaque fonction, lire son ensemble de définition, son tableau de variation.
2) Compléter le tableau obtenue par les limites aux bornes de l'ensemble de définition

Activités de découverte

Activité 1 :

Soit f une fonction ayant le tableau des variations ci-contre.
Interpréter, graphiquement, chaque limite et tracer une allure possible de la courbe représentant cette fonction.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	-3	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

Activité 2 :

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-x^3+2x^2-x-2}{x^2-1}$.

Soit D la droite d'équation $y=-x+2$, et C la courbe représentative de la fonction f.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x-2)$. En donner une interprétation graphique.

2) Etudier la position relative de C par rapport à D sur l'intervalle $]1;+\infty[$

3) Etudier la limite de f en 1. En donner une interprétation graphique.

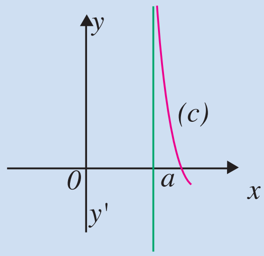
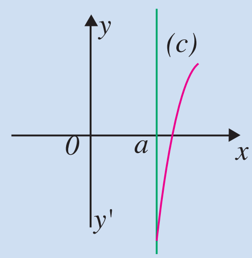
A retenir

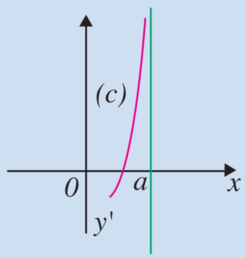
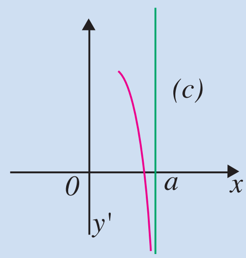
Asymptote verticale

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de borne a et C sa courbe représentative.

Définition

Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale pour la courbe C

Si $\lim\limits_{a^+} f=+\infty$	Si $\lim\limits_{a^+} f=-\infty$
	

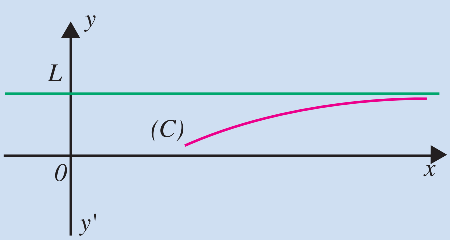
Si $\lim\limits_{a^-} f=+\infty$	Si $\lim\limits_{a^-} f=-\infty$
	

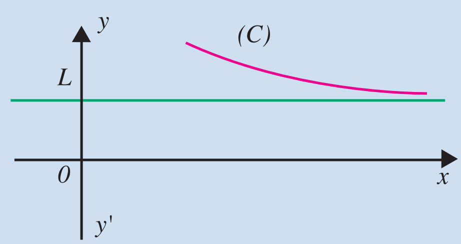
Asymptote horizontale

Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$ et C sa courbe représentative.

Définition :

Si la limite de $f(x)$ est un nombre L, quand x tend vers $+\infty$, (ou $-\infty$), alors la droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à C en $+\infty$ (ou $-\infty$)



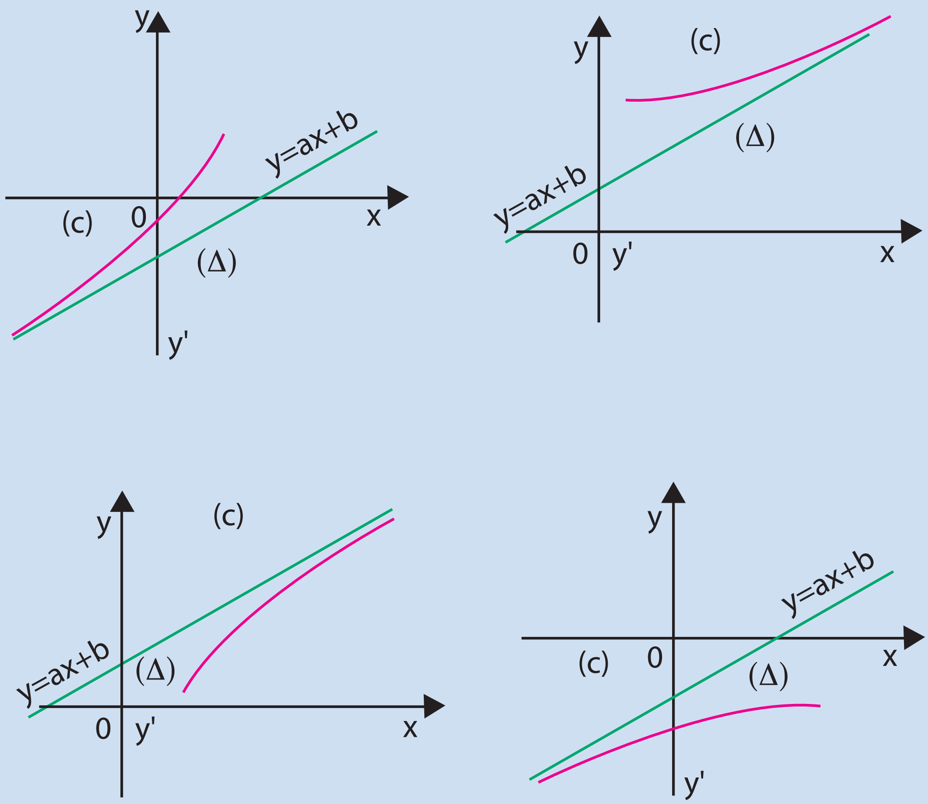


Asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$, C sa courbe représentative et D une droite d'équation $y = ax + b$ dans un repère ($a \neq 0$)

Définition :

Si la limite de la différence $f(x)-(ax+b)$ est nulle quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C en $+\infty$ (ou $-\infty$).



Méthode

1) Pour avoir une asymptote verticale, la valeur interdite ne suffit pas : il faut aussi que, en cette valeur, la limite à droite ou à gauche soit infinie.

2) a- Pour montrer qu'une droite donnée d'équation $y = ax+b$ (avec $a \neq 0$) est asymptote oblique ; on calcule la différence $d(x) = f(x) - (ax + b)$; on étudie la limite à l'infini de $d(x)$ et on doit trouver 0.

b- Pour étudier la position relative de C et de D, on étudie le signe de $d(x)$.

Applications

1 Soit f une fonction ayant le tableau des variations ci-aprés. Interpréter, graphiquement, chaque limite et tracer une allure possible de la courbe de f.

x	$-\infty$		1			$+\infty$
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	‖	0 ↘	-1 ↗	2

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+7}{x+1}$ et D la droite d'équation $y=-x+3$

1) Montrer que D est asymptote à C représentant f en $+\infty$.

2) Etudier la position relative de C par rapport à D

2 **IV. Limites par comparaison.**

Activité 1:

Activités de découverte

Soit $g(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Démontrer que, pour tout réel x, $g(x)\geq\dfrac{1}{x^2}$.

Peut-on, alors, calculer la limite de g en 0 ?

Activité 2:

Considérons une fonction croissante sur un intervalle $I=[a;b]$.

Montrer que, pour tout x de I on a : $f(a)\leq f(x)\leq f(b)$. En déduire que f est bornée sur I.

Activité 3:

Soient f, u *et* v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a;+\infty[$ ($a\in\mathbb{R}$).

1) Démontrer que, si pour tout réel x assez grand, on a $f(x)\geq u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) Démontrer que, si pour tout si pour tout réel x assez grand, on a $f(x)\leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

Activité 4:

Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle du type $[a;+\infty[$ (a réel).

Démontrer que, si pour tout réel x assez grand, on a $|f(x)-\ell|\leq u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$

A retenir

Théorème 1

Soient f et g deux fonctions définies sur le même intervalle I. Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ et si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Théorème 2

Soient f, u et v des fonctions admettant des limites en un réel a.
Si pour tout réel x assez proche de a, on a : $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) = \ell$ alors la fonction f admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

Conséquence

Soient f et g deux fonctions définies sur le même intervalle I. Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ et si pour tout $x \in I$, $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

Ces résultats s'étendent aux limites en $-\infty$, $+\infty$, a^+ et a^-

Applications

1 Soit $h : x \mapsto \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$

1) Démontrer que, pour tout réel x strictement positif :

$h(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x} + 1} - 1\right)$; pouvez-vous en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$?

2) Vérifier que les trois relations suivantes sont vraies pour tout x de $\mathbb{R}^*_+$

$0 < h(x) < \sqrt{x+1}$; $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$; $0 < h(x) < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Dire celles qui permettent de déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ déterminez cette limite

2 Déterminer la limite en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sin x$

3 Déterminer la limite en 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$

4 Une fonction f est telle que, sur $]0;+\infty[$, on a : $\dfrac{3x+4}{x+2} \leq f(x) < 3 + \dfrac{1}{x}$
Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5 Corriger les réponses fausses.

Les fonctions h et g sont données par leurs courbes respectives C et C'.
On donne des informations sur la fonction f.

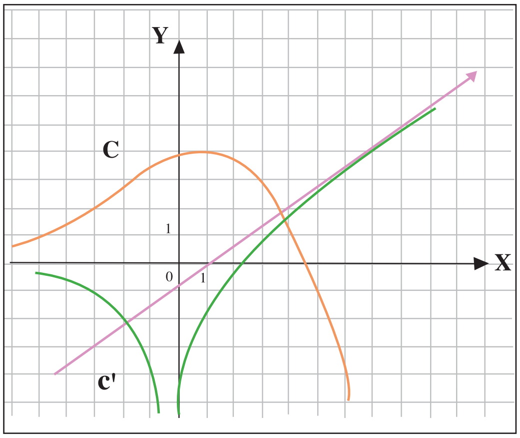
a) Si $f(x) \leq h(x)$ sur $]0;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b) Si $f(x) \leq g(x)$ sur $]0;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

c) Si $f(x) \geq g(x)$ sur $]-\infty;0[$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

d) Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ sur $]-\infty;0[$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

e) Si $f(x) \geq g(x)$ sur $]0;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Apprendre à chercher

Situation 1 : Etudier la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x} - x$.

Point méthode

Dans le cas de telles fonctions, il est parfois efficace d'utiliser la technique de multiplication par l'expression conjuguée, lorsque les théorèmes usuels ne permettent pas de conclure directement

Vérifier que, pour $x > 0$ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$ puis $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$; déduire, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et l'interpréter graphiquement.

Le théoréme sur les limites des fonctions composées et le théoréme donnant la limite d'une somme donnent $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ .Par ailleurs, $f(x) + 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x}$. Achever ce calcul et trouver l'asymptote au voisinage de $-\infty$

Situation 2 :

f est la fonction définie sur IR par $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$, C est la courbe représentative de f dans un repère donné. Démontrer que, C admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

Une solution repose sur la remarque suivante : ce qui gène, c'est la présence de x, car si , $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$ intuitivement, « pour les grandes valeurs de x, $f(x)$ se comporte comme $\sqrt{2x^2} = (\sqrt{2})x$ et donc $y = \sqrt{2}x$ est asymptote ». prouvez-le. L'idée, alors, est d'écrire f sous la forme : $\sqrt{aX^2 + b}$. Pour cela : écrire le trinome $2x^2 + x + 1$ sous la forme canonique, puis déduire que, pour tout x $f(x) = \sqrt{2(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8}}$.

Prouver, enfin, que la droite d'équation $y = \sqrt{2}(x + \frac{1}{4})$ est asymptote à C.

Situation 3 :

f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{2x + 19} - 5}$

1) Déterminer le domaine de définition D de f.
2) Etudier la limite de f en 3. Conclure.

Vers une solution

2) Montrer que pour tout x de D, $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x + 19} + 5}{2\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}$ (on multiplie le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ par l'expression conjuguée $\sqrt{x+1} - 2$ puis par l'expression conjuguée $(\sqrt{2x + 19} - 5)$.

Fonction composée et limites sous GEOPLAN

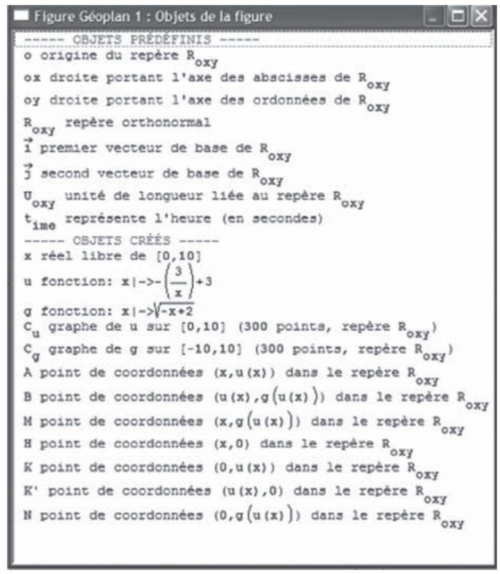
On considère la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $u(x) = -\dfrac{3}{x} + 3$ de courbe C_u dans un repère du plan.

Travail sur papier

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4 - x^2$ de courbe C_g et $f = g \circ u$.

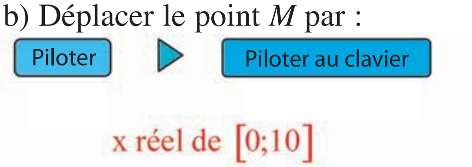
Sans calculer $f(x)$, établir le sens de variation de f sur $\left]0;+\infty\right]$ à l'aide des fonctions composées.

Création et interprétation de la figure sous GEOPLAN



a) Créer la fonction u et la fonction g ainsi que leurs courbes C_u et C_g et les points A, B et M dans le repère Roxy .

b) Déplacer le point M par :



et utiliser les fléches du clavier.

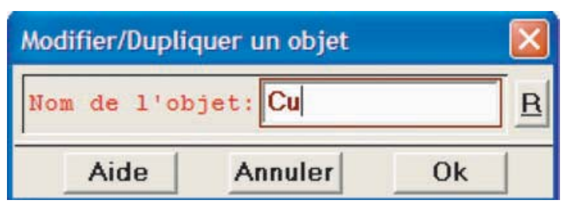
Vérifier que la composée est bien définie sur $\left]0;3\right]$.

c) Où se trouve le point A quand $x = 3$? Donner les coordonnées de A, de B et de M quand $x = 1$; puis quand $x = 2$.

d) Quand x est proche de 0, que devient l'ordonnée de A ? L'ordonnée de B ? L'ordonnée de M ?

Pour aller plus loin

Modifier la fonction u en cliquant sur puis u ; entrer $u(x) = 11 - x^2$.



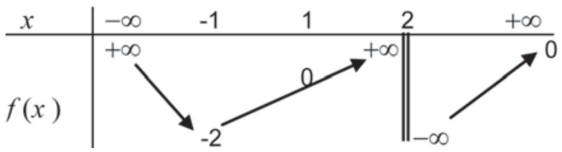
On modifie les bornes du tracé de la courbe C_u :
on modifie le réel x : x et choisir les mêmes bornes

a) Par lecture graphique, donner le tableau complet des variations de la composée $g \circ u$

b) Démontrer tous les éléments du tableau trouvé.

Exercices et problèmes

1 **Q.C.M.** Trouver toutes les bonnes réponses.
Une fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Soit C sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\,\vec{i},\vec{j}\,)$ On connait son tableau de variation.



a) Pour tout réel x de $]-\infty;2[$ $f(x)\geq -2$.
b) Dans $[-1;1]$, l'équation admet une unique solution $f(x)=-1$
c) $f(0) > 0$; $f(5) < 0$.
d) La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C.

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$; **f)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$

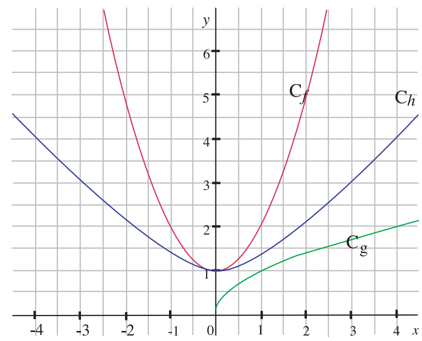
g) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=+\infty$; **h)** $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

2 Les fonctions f et g de la variable réelle x sont toutes deux croissantes sur l'intervalle $[-1;1]$
1) Est-il vrai que la somme f +g de ces deux fonctions est également croissante ?
Si oui, le démontrer ; si non, donner un contre-exemple.
2) Est-il vrai que le produit $f\times g$ de ces deux fonctions est également croissante ?
Si oui, le démontrer ; si non, donner un contre-exemple.

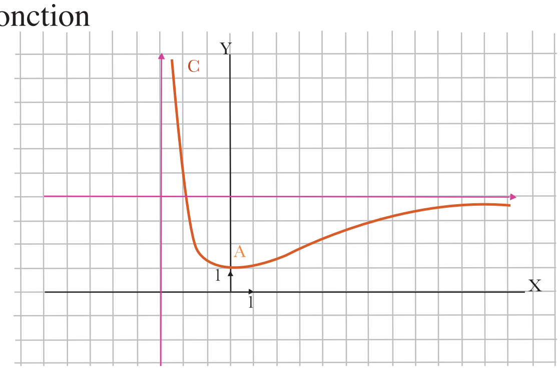
3 Deux fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, f est croissante sur $\mathbb{R}$ et g est décroissante sur $\mathbb{R}$
Peut-on déduire le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de :
a) la fonction g o f ?
b) la fonction $f\times g$? si la réponse est oui, énoncer puis démontrer le résultat. Si la réponse est non, expliquer pourquoi en s'appuyant éventuellement sur un contre exemple.

4 On pose $f_0(x)=1-\dfrac{1}{x}$ pour $x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$ et $f_n(x)=f_0\left[f_{n-1}(x)\right]$ pour $n\in\{1;2;3;4...\}$
calculer $f_{2007}(2007)$

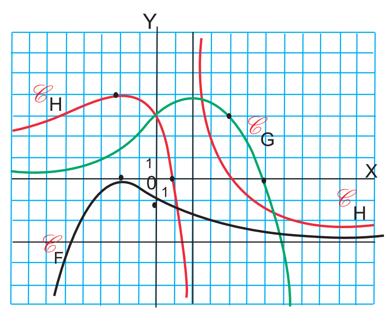
5 Ci-dessous les courbes représentants les fonctions : $f(x)=1+x^2$ et $g(x)=\sqrt{x}$
On a construit la courbe représentant leur composée h. Reconnaitre cette fonction et préciser son sens de variation.



6 La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $]-3;+\infty[$.
Dresser le tableau des variations de cette fonction



7 On considére les fonctions f, g et h connues par leurs courbes représentatives ci-dessous.



1) Préciser les limites de $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2) Lorsque cela est possible, donner les limites en $+\infty$ de: $f+g$; $f+h$; $g+h$; $f \times g$; $f \times h$; $g \times h$.

3) Donner les limites en $-\infty$ et, si elle existent, de : $f+g$; $g+h$; $f \times g$; $f \times h$; $g \times h$.

4) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$, si cela est possible, de $\frac{f}{g}$; $\frac{h}{g}$; $\frac{f}{h}$; $3+\frac{1}{f}$; $2h-\frac{1}{g}$

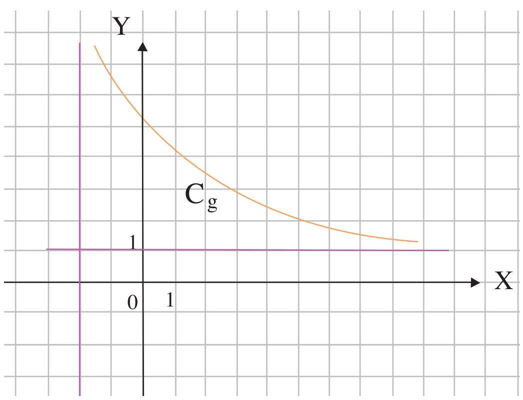
8 Etudier les limites des fonctions suivantes au point considéré.

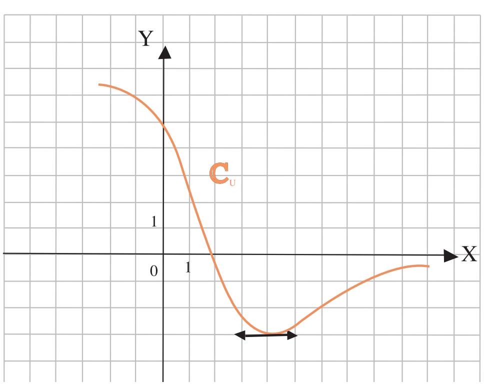
a) $f : x \mapsto \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$ en $+\infty$

b) $g : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+9}-3}$ en 0

c) $h : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1} - x$ en $+\infty$

9





On considère les fonctions u et g représentées ci-dessus par les courbes C_u et C_g.

1) Dresser le tableau des variations de u et g .

2) a) Justifier que la composée $f = gou$ est définie sur : $]-\infty;3[\cup]5;+\infty[$.

b) Etudier le sens de variation de f.

c) Déterminer $(gou)(2)$ et $(gou)(0)$.

3) a) Lire graphiquement les limites suivantes: $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

$\lim\limits_{x\to 3^-} u(x)$ et $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$

$\lim\limits_{x\to 5^+} u(x)$ et $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

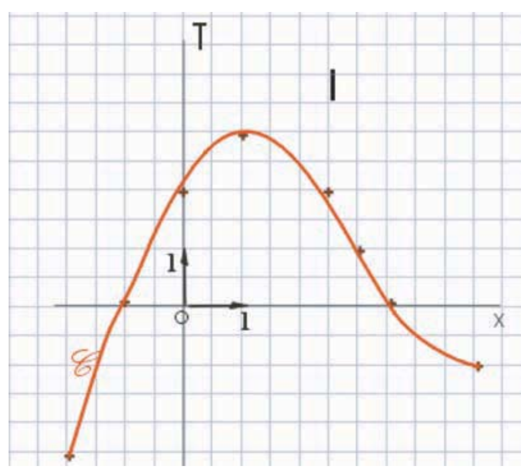
b) Que peut-on prévoir pour les limites de f ?

10 Etudier les limites en $+\infty$ des fonctions:

a) $f : x \mapsto 2x - 5x^3$; **b)** $g : x \mapsto \dfrac{3+2x}{x^2-3}$

c) $h : x \mapsto \dfrac{x^3-x+1}{8x^2-1}$; **d)** $k : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}+2x}{1-5x}$

11 Une fonction u est donnée par la courbe $\mathscr{C}$.



1) a) Résoudre l'équation $u(x) = -x+4$.

b) Résoudre l'inéquation $u(x) < 0$.

c) Dresser le tableau des variations de cette fonction et indiquer le signe de $u(x)$.

2) On considère la fonction g connue par son tableau des variations :

t	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$g(t)$	3	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Déterminer le sens de variation de la composée $f = gou$ définie sur $]-\infty;5[$.

12 On pose $f(x) = \dfrac{(50+x^{20})^2 - 2500}{x^{20}}$

a) A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de $(50+x^{20})^2$, puis de $f(x)$ pour :
$x = 0{,}6$; $0{,}5$; $0{,}4$; $0{,}3$; $0{,}2$; $0{,}1$ et $0{,}01$.
Peut-on conjecturer la limite de f en 0 ?
b) En développant $(50+x^{20})^2$, simplifier l'expression de $f(x)$, pour $x \neq 0$. Calculer alors la limite de f en 0.
c) Vaincre la tentation de se débarrasser de la calculatrice.

13 Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{-x^2+3x}{x-2}$$

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b) Déterminer les réels a, b et c tels que, sur $]2;+\infty[$: $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$
Déduire que la courbe C représentant la fonction f, admet la droite D d'équation $y = -x+1$ comme asymptote oblique en $+\infty$.
c) Déterminer la limite de f en 2. En donner une interprétation graphique

14 Dans un repère orthonormé, tracer une allure de la courbe C d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ telle que :
a) C a une asymptote verticale d'équation $x = 2$.
b) C a une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 3$.
c) C a une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = -1$.
d- f est croissante sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$
e) L'équation $f(x) = 0$ a pour ensemble de solutions $\{0;5\}$

15 Une courbe C est la représentation d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = a + \dfrac{bx+c}{x^2+4}$
la courbe C passe par les points $A(0;-1)$ et $B(1;1)$. Au point A, la tangente à C est paralléle à la droite D d'équation $y = -x$.
1) Déterminer les réels a, b et c.
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$
En donner une interprétation graphique.
3) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

par $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$

1) Déterminer les limites aux bornes des intervalles de son domaine de définition.
2) Préciser les asymptotes à la courbe C représentant f dans un repére orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
3) Montrer que le point $\Omega(2;1)$ est un centre de symétrie de C. Donner l'équation de la courbe C dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ puis la construire.

17 On considére les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-2,0\}$ par :

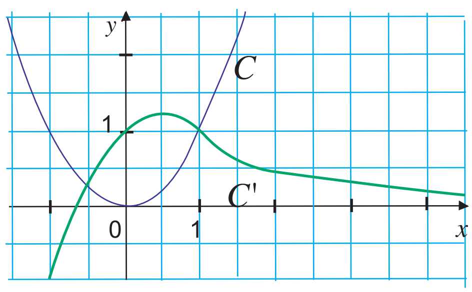
$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$$

1) Etudier les limites de f et de g aux bornes de leur ensemble de définition. En déduire que les courbes représentatives C_f et C_g ont les mêmes asymptotes.

2) Soit $\Omega(-1;0)$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, montrer que Ω est un centre de symétrie de C_f et $(\Omega, \vec{j})$ axe de symétrie de C_g

3) Ecrire les équations de C_f et C_g dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

18 C et C' sont les courbes respectives de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.



1) Si h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on a $h(x) \geq f(x)$ que peut-on en déduire pour les limites de h en $+\infty$ et $-\infty$?

2) Si k est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on a $k(x) \leq g(x)$, peut-on en déduire les limites de k en $+\infty$ et $-\infty$? Si oui, les donner.

19 On considére les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]-1;+\infty]$ par : $f(x) = \sqrt{1+x}$ et

$g(x) = 1 + \frac{x}{2}$

1) Montrer que $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$

pour $x \in [-1;+\infty[$

2) Calculer $(f(x))^2$ et $(g(x))^2$ puis comparer

$(f(x))^2$ et $(g(x))^2$ pour tout $x \in [-1;+\infty[$

3) Déduire une comparaison de f et g sur l'intervalle $[-1;+\infty[$

4) Tracer sur un même repère les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle $[-1;+\infty[$

5) Comparer les nombres suivants :

$A = 1{,}0000002$ et $B = \sqrt{1{,}0000004}$

20 **1)** Quel est le plus grand des deux nombres

suivants : $A = \dfrac{1{,}0000002}{1{,}0000004}$ et $B = \dfrac{0{,}9999996}{0{,}9999998}$

2) Soient f et g les fonctions définies par :

$f(x) = \dfrac{1+2x}{1+4x}$ et $g(x) = \dfrac{1-4x}{1-2x}$

a) Que vaut $f(10^{-7})$ et $g(10^{-7})$?

b) Démontrer que pour $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq \frac{-1}{4}$,

$$f(x) - g(x) = \frac{12x^2}{(1+4x)(1-2x)}$$

c) Résoudre l'inéquation : $f(x) - g(x) > 0$.
Quel est, alors, le signe de:

$$f(10^{-7}) - g(10^{-7}) \ ?$$

3) Comparer les nombres A et B.

L'asymptote : une notion en évolution

Michel Eyquem de Montaigne

Donner une définition du mot asymptote n'est pas une chose simple. Les premières rencontres avec la notion en soulignent le caractére à priori paradoxal.

Dans les Essais (II, 2), Montaigne rapporte ainsi les travaux de Jacques Peletier (1517 - 1582), un érudit proche de Ronsard et de la Pléiade : «Jacques Peletier me disait chez moi qu'il avait trouvé deux lignes s'acheminant l'une vers l'autre pour se joindre, qu'il vérifiait toutefois ne pouvoir jamais, jusques à l'infinité, arriver à se toucher.»

«Les Essais» de Montaigne

L'interdiction du contact ayant progressivement disparu, l'idée générale qui subsiste de nos jours est celle de proximité locale entre deux courbes.

Chapitre 3

CONTINUITE

I . Continuité d'une fonction
II . Continuité d'une fonction composée
III . Image d'un intervalle par une fonction continue
IV . Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

Bernhard BOLZANO (Prague, 5/10/1782- Prague, 18/12/1848)

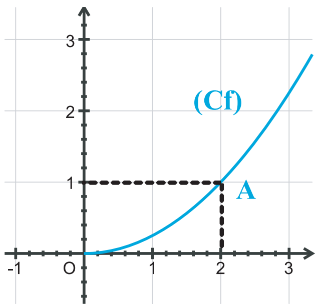
La notion de continuité nous est familière : le temps s'écoule d'une manière continue, on ne passe pas brutalement de 12h à 12h 01s, il n'y a pas de saut.
C'est en ce sens que l'expression fonction continue est employée en mathématiques.

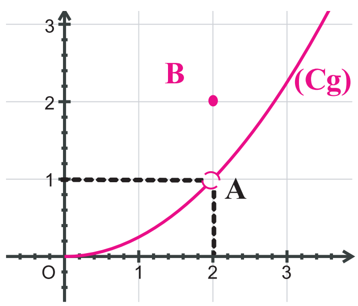
I.Continuité d'une fonction :

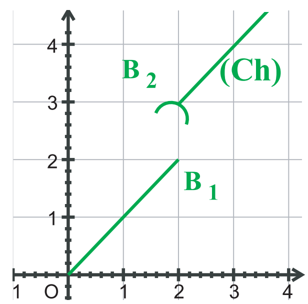
Activités préliminaires

Activité 1 :

Les figures suivantes sont des représentations graphiques de fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}_+$







1) Déterminer $f(2)$, $g(2)$, $h(2)$
2) Trouver, si elle existe, la limite de chacune des fonctions précédentes au point 2.
3) Parmi les fonctions précédentes, quelles sont celles qui sont continues au point 2 ?
4) Choisir sur le graphique un intervalle J contenant $f(2)$ et voir s'il est toujours possible de trouver un intervalle ouvert I contenant 2 tel que $f(I) \subset J$.
Refaire le même travail pour g et h. Que remarque-t-on ?

Remarquez que la courbe C_f peut être tracée au voisinage du point A sans lever la main, ce qui n'est pas possible pour C_g *et* C_h.

Activité 2 :

1) Pour chacune des fonctions suivantes, étudier la continuité au point a :

- $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$, $a = -1$
- $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 3x + 2} & si\ x \neq 1 \\ g(1) = 2 \end{cases}$, $a = 1$
- $\begin{cases} h(x) = 3x - 1 & si\ x \geq 1 \\ h(x) = x^2 + 2 & si\ x < 1 \end{cases}$, $a = 1$
- $\begin{cases} k(x) = \dfrac{1}{x+2} & si\ x < -2 \\ k(x) = -x & si\ x \geq -2 \end{cases}$, $a = -2$

2) Pour chacune des fonctions précédentes, préciser la limite à droite et la limite à gauche au point indiqué puis étudier la continuité à droite et la continuité à gauche en ce point.

Activité 3:

a) Soit la fonction $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x-1}$

Vérifier que f est continue sur $[1, +\infty[$

b) Soit la fonction $g : \begin{cases} g(x) = x^2+1 & si\ x \geq 0 \\ g(x) = x-1 & si\ x < 0 \end{cases}$

Vérifier que g est continue sur chacun des intervalles $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$

On remarque que g n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas continue au point 0

On ne peut pas dire que g est continue sur $\mathbb{R}^*$ car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle, mais on dit qu'elle est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Activités de découverte

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ pour $x \neq 2$.

a)Calculer $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

b) Soit $m \in \mathbb{R}$ et la fonction g_m telle que $\begin{cases} g_m(x) = f(x) & si\ x \neq 2 \\ g_m(2) = m \end{cases}$

•On suppose que $m \neq 4$. g_m est-elle continue au point 2 ?

•On prend $m = 4$. Montrer que g_4 est continue sur $\mathbb{R}$.

Toutes les fonctions g_m sont des prolongements de la fonction f, mais g_4 est le seul prolongement de f qui soit continu au point 2 : on l'appelle **prolongement par continuité de *f*** au point 2.

A retenir

Continuité en un point

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

f est dite continue en a si et seulement si : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ $(a<b)$ ou $[a,+\infty[$.

On dit que f est continue à droite en a si : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]b,a]$ $(b < a)$ ou $]-\infty, a]$

On dit que f est continue à gauche en a si : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

Conséquence

Une fonction est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a.

Continuité sur un intervalle

On dit que f est continue sur $]a,b[$ si elle est continue en tout point de $]a,b[$.

On dit que f est continue sur $[a,b]$ si elle est continue en tout point de $]a,b[$ et si elle est continue à droite en a et continue à gauche en b.
De la même manière on définit la continuité d'une fonction f sur $[a,b[$, $]a,b]$,$[a,+\infty[$ $]-\infty\ ,a]$ ...

Prolongement par continuité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I sauf en un point a de I.
Si f admet une limite finie ℓ au point a, alors la fonction g définie sur I par :

$$\begin{cases} g(x)=f(x) & \text{si } x \neq a \\ g(a)=\ell \end{cases}$$

est continue sur I.
On l'appelle **prolongement par continuité** de f au point a.

Opération sur les fonctions continues

Si f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I et continues sur I, alors

- $f+g$, $f.g$ et $|f|$ sont continues sur I.
- Pour tout réel k, la fonction $k.f$ est continue sur I.
- Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.
- Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Conséquences

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur chacun des intervalles ouverts déterminés par son ensemble de définition.

Applications

1 Etudier la continuité de f en a dans chacun des cas suivants:

a) $f(x) = E(x) - x$ $\quad a = 2$

b) $\begin{cases} f(x) = 2x - 1 & si\ x > 3 \\ f(x) = x^2 - x - 1 & si\ x \leq 3 \end{cases}$ $\quad a = 3$

2 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les intervalles sur lesquels elle est continue :

$p(x) = \dfrac{1}{x+4}$; $q(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $r(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 3x + 2}$ et

$s(x) = E(x);\ x \in [-1,2]$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

3 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition et les intervalles ouverts sur lesquels elle est continue :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + x^2 - 4x - 3$ $\qquad$ b) $g(x) = x\sqrt{x-3}$

c) $h(\mathrm{x}) = \dfrac{x+3}{\left|x^2 - 3x + 2\right|}$

d) $k(\mathrm{x}) = \dfrac{x^2+1}{|x| - 3}$

4 Soit la fonction *f* définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ pour $x \neq 0$

Montrer que *f* est prolongeable par continuité en 0.

II.Continuité d'une fonction composée.

Activités de découverte

On donne la fonction u: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 4$ et la fonction h : $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$

1) Déterminer l'expression de la fonction $h \circ u$ et donner son ensemble de définition.
2) Déterminer $u(3)$ puis $h \circ u(3)$ et étudier la continuité de u en 3 puis la continuité de h en $u(3)$.
3) Déterminer $\lim\limits_{x \to 3} (h \circ u)(x)$ et en déduire la continuité de $(h \circ u)$ au point 3.

A retenir

Soit *f* et g deux fonctions définies respectivemen∈sur deux intervalles ouverts *I* et *J* et x_0 I tel que $f(x_0) \in J$.
Si *f* est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors gof est continue en x_0.

$$\begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x_0 & \longrightarrow & f(x_0) & \longrightarrow & (gof)(x_0) \end{array}$$

$$x_0 \xrightarrow{\quad gof \quad} (gof)(x_0)$$

Si *f* est continue sur *I*, *g* est continue sur *J* et $f(I) \subset J$, alors *gof* est continue sur *I*.

Exemple

Soit la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

Le schéma suivant $x \square x^2 - 5x + 4 \square \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ permet de voir que $h = gof$ où

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \square x^2 - 5x + 4$ et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$

f est une fonction polynôme qui s'annule aux points 1 et 4.
Le tableau de signe de *f* est le suivant :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

Ceci nous permet d'affirmer que $f([4, +\infty[) \subset \mathbb{R}_+$ et $f(]-\infty, 1]) \subset \mathbb{R}_+$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et g continue sur $\mathbb{R}_+$, on conclut que h est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 1]$ et $[4, +\infty[$.

Applications

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, écrire sous la forme gof puis déterminer les intervalles sur lesquels elle est continue.

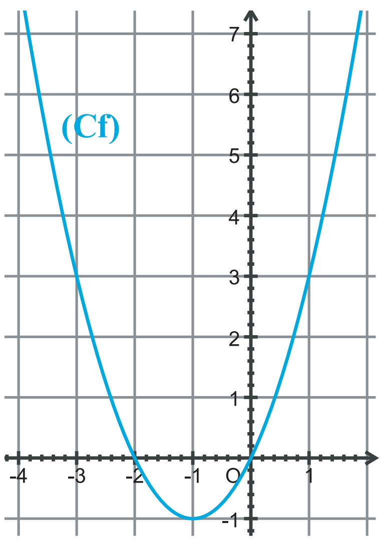
$h_1(x) = \sqrt{2x-1}$; $h_2(x) = \sin \pi x$; $h_3(x) = \left(|x|-1\right)^2$ et $h_4(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$

III. Image d'un intervalle par une fonction continue :

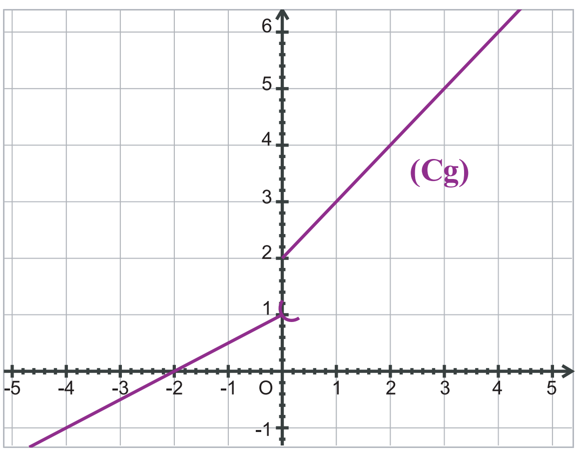
Activités préliminaires

Activité 1:

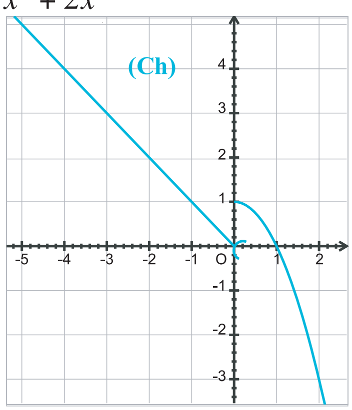
On donne les représentations graphiques des fonctions f, g et h suivantes :



$f(x) = x^2 + 2x$



$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}x + 1 & si\ x < 0 \\ g(x) = x + 2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

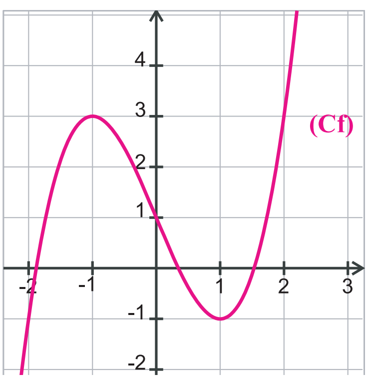


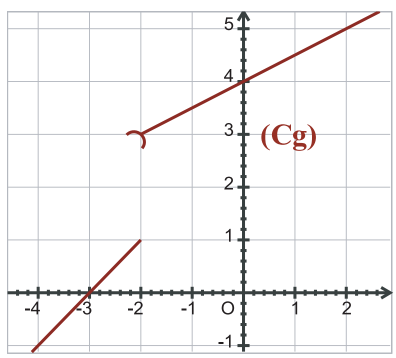
$$\begin{cases} h(x) = -x & si\ x < 0 \\ h(x) = -x^2 + 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

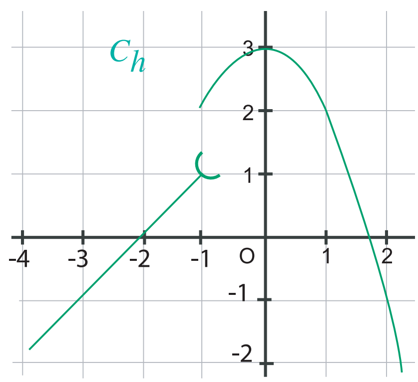
1) a) Déterminer graphiquement l'image de chacun des intervalles [-3,-1] ; [-2,1] et $[0,+\infty[$ par f
   b) Déterminer graphiquement $g([-4,-1])$ et $g([-1,2])$. Que peut-on remarquer à propos de $g([-1,2])$? g est-elle continue sur [- 4, -1] ? sur [- 1, 2] ?
   c) Déterminer $h([-1,2])$. h est-elle continue sur [- 1, 2] ?
2) Déterminer, parmi les intervalles $[a , b]$ suivants, ceux où f est monotone. Pour chacun de ces intervalles, comparer $f([a , b])$ et $[f(a), f(b)]$.
   $[-4 , -2]$; $[-2 , 1]$; $[-3 , 1]$; $[0 , 1]$.
   Que peut-on conclure ?

Activité 2 :

On donne les représentations graphiques des fonctions suivantes :







1) a) Déterminer $f(-2)\lambda; f(2)$; $g(-2)$; $g(2)$; $h(-2)$ et $h(2)$
   b) Choisir un réel intermédiaire entre $f(-2)$ et $f(2)$ et voir s'il existe un réel $c \in [-2 , 2]$ tel que $f(c) = \lambda$
   c) Faire de même pour *g et h*.
2) a) Etudier les variations de f sur [-2,1].
   b) Déterminer $J = f([-2,1])$.
   c) λ étant un élément de J , déterminer le nombre de solutions de l'équation :
   $f(x) = \lambda$, $x \in [-2,1]$.

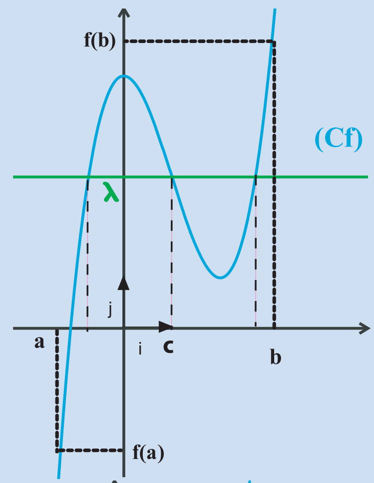
Activité 3 :

Soit f une fonction continue sur [1,4] telle que $f(1) . f(4) < 0$.
a) Que peut-on dire de l'intersection de la courbe représentative de f et de l'axe des abscisses ? (Faire un dessin).
b) Vérifier graphiquement que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans [1,4]

A retenir

Théorème

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.



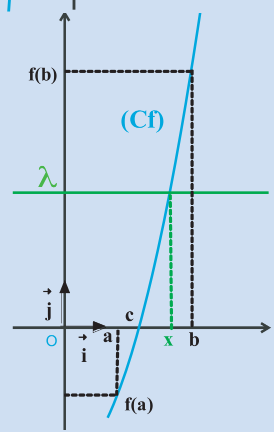
Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[\,a\,,\,b\,]$, alors pour tout réel λ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$

Autrement dit l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans $[\,a\,,\,b]$

Cas particuliers

- Si f est continue et strictement monotone sur $[a,b]$ alors pour tout réel λ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique réel $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = \lambda$.
- Si $f(a).f(b) < 0$, alors il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$



Remarque

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de donner une valeur approchée des solutions d'équations qu'on ne peut pas résoudre par les procédés usuels (discriminant, …)

Le tableau suivant donne les images des différents types d'intervalles par des fonctions continues et strictement monotones :

Si f est croissante alors	Si f est décroissante alors
$f([a,b]) = [f(a),f(b)]$	$f([a,b]) = [f(b),f(a)]$
$f([a,b[) = [f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$f([a,b[) = \,]\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,,f(a)]$
$f(]a,b]) = \,]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,,f(b)]$	$f(]a,b]) = [f(b), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$f(]a,b[) = \,]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,,\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,[$	$f(]a,b[) = \,]\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,,\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,[$
$f(]-\infty\,,a]) = \,]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\; f(a)]$	$f(]-\infty,a\,]) = [f(a), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\,[$
$f(]-\infty\,,a\,[) = \,]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\;\lim\limits_{x\to a^-} f(x)[$	$f(]-\infty,a[) = \,]\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\,,\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$

$f([a,+\infty[) = [\,f(a), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,[$	$f([a,+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(a)]$
$f(]a,+\infty[) =]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$f(]a,+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,[$	$f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$

Applications

1 En considérant les courbes de l'activité n°1 déterminer chacun des ensembles suivants :

$f([-3,-1])$, $f(]-3,1[)$, $f([-1,+\infty[)$, $f([-2,0[)$, $g(]-\infty,0])$, $g(]1,2[)$, $h([-\frac{1}{2},0[)$, $h([0,\frac{1}{2}])$ et $h([1,+\infty[)$

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2+3x+1$.
a) Calculer $f(1)$ et $f(3)$. En déduire qu'il existe au moins un réel c tel que $f(c)= 17$.
b) Montrer qu'il existe au moins un réel a tel que $f(a)= -2$.

3 Montrer que l'équation $x^3+x-1= 0$ admet une solution dans l'intervalle $[0,1]$ et donner une valeur approchée de cette solution à 10^{-1} près.

4 Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos c = c$ et donner une valeur approchée de cette solution à 10^{-1} près.

IV. Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle :

Activités de découverte

Activité 1:

Représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes et déterminer celles qui sont des bijections.

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x-3$ $\quad$ $g:\mathbb{R} \to [-2,+\infty[$, $x \mapsto x^2-2$ $\quad$ $h:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2-2$

$k:[0,\pi] \to [0,1]$, $x \mapsto \sin x$ $\quad$ $l:[0,\frac{\pi}{2}[\to [0,1]$, $x \mapsto \sin x$

BIJECTION
f **étant une fonction définie sur un intervalle *I* et à valeurs dans un intervalle *J*, f est une bijection de *I* vers *J* si chaque élément de l'intervalle *J* a un antécédent et un seul dans *I*. On dit alors que la fonction *f* est une bijection de *I* sur *J*.**

Exemple :

On considère la fonction $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$x \mapsto x^2$

f est une bijection. En effet , Soit $y \in \mathbb{R}_+$
L'equation $x^2 = y$ admet dans $\mathbb{R}_+$ une solution unique qui est $x = \sqrt{y}$
Donc il existe un réel unique x tel que $f(x)=y$
Pour déterminer l'expression de f^{-1} il suffit d'exprimer y en fonction de x sachant que $x = f(y)$

Donc $x=f(y)$ signifie $\begin{cases} x = y^2 \\ x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$ signifie

$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$ Donc $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$

Fonction réciproque d'une bijection:

Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J.
La fonction réciproque de f, notée f^{-1}, est la fonction dénfinie sur J et à valeur dans I telle que :
$x \in J, y \in I$; ($y = f^{-1}(x)$ signifie $x = f(y)$)

Cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle :

Activité 2 :

1) On donne les fonctions suivantes :

$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2x$ et $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2x$

a) Représenter graphiquement f et g.
b) Compléter le tableau suivant par OUI ou NON

	Strictement monotone	Bijective de I sur son image	Continue sur I
f			
g			

Plus généralement f étant une fonction strictement monotone sur I, on admet que f est une bijection de I sur $f(I)$
De plus si f est continue sur I, alors f^{-1} est continue sur $f(I)$

Activité 3 :

Soit f une fonction continue et stictement monotone sur un intervalle I .
1) Montrer que si f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) alors f^{-1} l'est aussi.
2) Soit $M(x,y)$ un point de (C_f). Soit (D) la droite d'équation $y = x$ et $M'(x',y')$ le point tel que $M' = S_D(M)$. Déterminer les coordonnées de M' en fonction de x et y et montrer que $M' \in C_{f^{-1}}$

Activité 4 :

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = x^n$.
où n est un entier supérieur ou égal à 2.
Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

• La fonction réciproque de f est appelée fonction **racine n$^{\text{ième}}$**.

La racine n $^{\text{ième}}$ d'un réel positif x est notée $\sqrt[n]{x}$ (Lire : racine enième de x). Ainsi :

$$x \in \mathbb{R}_+ \ , \ y \in \mathbb{R}_+ \quad ; \ y = \sqrt[n]{x} \ \Leftrightarrow \ x = y^n$$

$$\sqrt[n]{x^n} = x \quad ; \quad (\sqrt[n]{x})^n = x$$

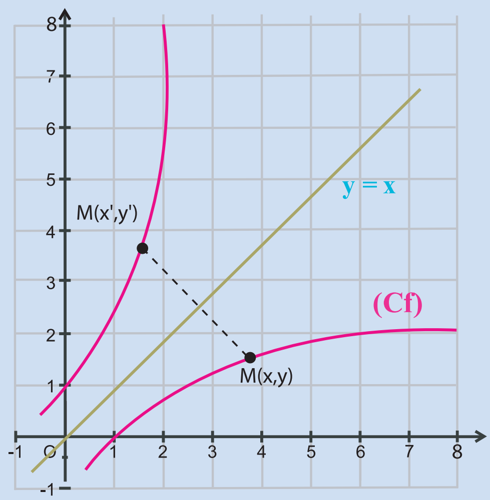
A retenir

Théorème 1

Toute fonction f strictement monotone sur un intervalle I, réalise une bijection de I sur $f(I)$; et si elle est continue sur I alors sa réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$.

Théorème 2

Si f est une bijection de I sur $f(I)$ alors
• f et f^{-1} ont même sens de variation.
• Leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé sont symétriques parrapport à la droite d'équation $y = x$.



Fonction racine n$^{\text{iéme}}$

La fonction puissance n$^{\text{ième}}$ $x \mapsto x^n$ est une bijection strictement croissante

de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$

Sa bijection réciproque est la fonction notée $\sqrt[n]{\ }$ et appelée fonction racine n$^{\text{ième}}$

$$\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

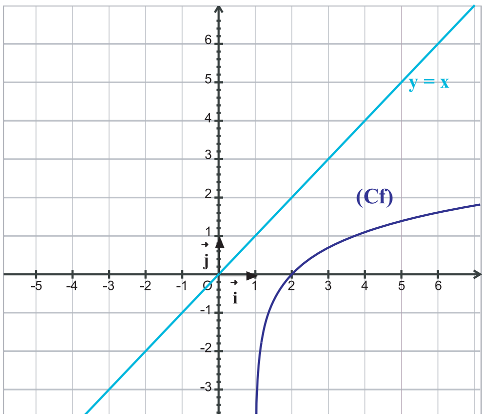
On a : pour tout $x \geq 0$ et $y \geq 0$:

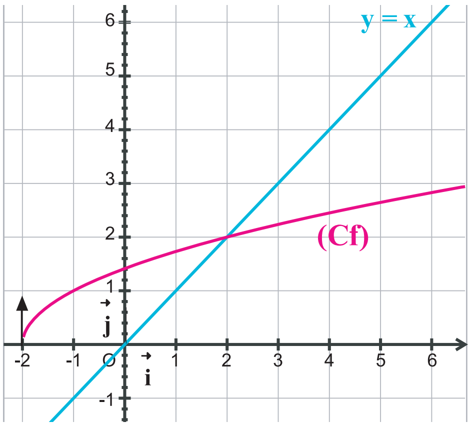
$$y = \sqrt[n]{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^n$$

$$x = (\sqrt[n]{x})^n \qquad ; \qquad \sqrt[n]{y^n} = y.$$

Applications

1 Tracer $(C_{f^{-1}})$ dans chacun des cas suivants :





2 On donne la fonction $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$

Montrer que f admet une fonction réciproque dont on donnera l'intervalle de définition

3 On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$

a) Représenter f graphiquement. Déterminer $f(\mathbb{R})$

b) Soit $f_1 : [2, +\infty[\to [-1, +\infty[$, $x \longmapsto f(x)$ *et* $f_2 :]-\infty, 2] \to [-1, +\infty[$, $x \longmapsto f(x)$

Montrer que chacune des fonctions f_1 et f_2 est bijective et déterminer f_1^{-1} et f_2^{-1}

4 Simplifier les écritures suivantes :

$\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[5]{7^{10}}$, $(\sqrt[8]{4})^4$.

Apprendre à chercher

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 3$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α appartenant à l'intervalle $[1,2]$

2) a) A l'aide de la calculatrice déterminer $f(1,1), f(1,2), f(1,3)$ …En déduire l'intervalle auquel appartient le réel α .

b) A l'aide de la calculatrice déterminer $f(1,21), f(1,22), f(1,23)$ …En déduire la valeur approchée de α par défaut à 10^{-2} près.

Avec l'outil informatique

Programme de résolution de l'équation $f(x) = 0$

Soit la fonction f : $f(x) = x^3 + x - 3$. On admet que f admet un unique solution x_0 dans l'intervalle [1,2]. Le programme suivant permet de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de x_0.

```
Program Dichotomie ;
Uses Wincrt ;
Var a,b:Real; n,c:integer;
 Function f(x : Real) : Real;
      begin
         f:= x*x*x+x-3 end;
  Function Dicotomie(a,b:Real;n:integer): Real;
      Var  m ,fm: Real; k:integer;s;boolean;
     Begin
         s:=f(a)<0;
        for k:=1 to n-1 do
          begin
             m:=(a+b)/2;fm:=f(m);
              if fm=0 then
                begin
                  dicotomie:=m;
                   exit
                end;
                 if s=(fm<0) then a:=m else b:=m
           end;
              dicotomie:=(a+b)/2
 End;
Begin
  clrscr;
  writeln('  ****** Résolution de l''équation x3+x-3 = 0  dans  [1,2] par DICHOTOMIE
******');
   repeat
    write ('Nombre d''_tapes : '); Readln(n);writeln;
     write ('Nombre de chiffres après la virgule : '); Readln(c);writeln;
    until (n>0) and (c>0);
    a:=1;b:=2;
 Writeln (' La valeur approchée de la solution xo de l''équation  x3+x-3 = 0  a 10-',c,' près
est= ');
   write('                x0 = ' ,dicotomie(a, b, n) :0:c) ;
End.
```

Exercices et problèmes

1 Etudier la continuité de f en a dans chacun des cas suivants:

a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$, a = 0

b) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 5}$ a = 0

c) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-1} & si\ x > 1 \\ f(x) = 1 - \dfrac{1}{x} & si\ \ 0 < x < 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$ a = 1

d) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x + 5} & si\ x \neq -5 \\ f(-5) = -6 \end{cases}$ a = -5

e) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{|x-1|} & si\ x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$ a = 1

f) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-4 + x^2}{x - 2} & si\ x > 2 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 12} & si\ x \leq 2 \end{cases}$ a = 2

2 Calculer a, b et c pour que f soit continue en 3

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 3} & si\ x > 3 \\ f(x) = \dfrac{-4 + cx^2}{x - 2} & si\ x < 3 \\ f(3) = 2 \end{cases}$$

3 Soit λ un nombre réel et h la fonction définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x - 2 + \lambda\,|x - 2|}{|x - 2|} & si\ x \neq 2 \\ h(2) = -3 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, h n'est pas continue au point 2

b) Déterminer λ pour que h soit continue à droite en 2.

c) Déterminer λ pour que h soit continue à gauche en 2.

4 Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ f(4) = \lambda \end{cases}$$

Déterminer λ pour que f soit continue au point 4.

5 **a)** Donner l'ensemble de définition de la fonction $f : x \to \dfrac{x}{\sin x}$

b) Est-il possible de prolonger f par continuité en 0 ? Et ailleurs ?

6 Est-il possible de prolonger par continuité en 0, les fonctions suivantes :

$f : x \mapsto x^2\,\left|1 + \dfrac{1}{x}\right|$ $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^3 + x^2}}{x}$

$h : x \mapsto x\,\left|1 + \dfrac{1}{x}\right|$ $k : x \mapsto \dfrac{x^3 + |x|}{x}$?

7 Cochez la réponse correcte :

1) La fonction f telle que

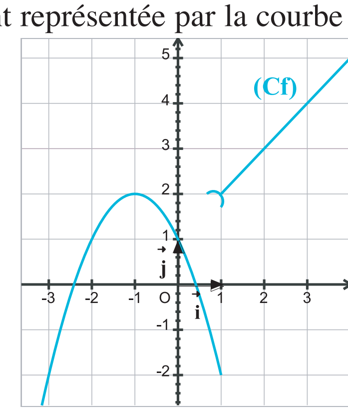
$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \geq 2 \\ f(x) = 2x - 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

a) est continue en 2

b) est continue à droite en 2

c) est continue à gauche en 2

2) f étant représentée par la courbe suivante



a) f est continue en 1

b) f est continue à droite en 1

c) f est continue à gauche en 1

3) La fonction $x \longmapsto E(x)$ est continue sur :

a) [2,3] **b)**]2,3] **c)** [2,3[

4) L'image de l'intervalle [-1,2] par la fonction $x \longmapsto x^2$ est

a) [1,4] **b)** [0,4] **c)** [-1,4]

5) L'équation $x^3 + 2x + 5 = 0$ a une solution dans l'intervalle

a)]0,1[b)]-1,2[c)]-2,-1[

8 Cochez la case correcte :

1) La composée de deux fonctions continues sur IR est continue sur IR

☐ Vrai ☐ Faux

2) L'image d'un intervalle par une fonction décroissante est un intervalle

☐ Vrai ☐ Faux

3) L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

☐ Vrai ☐ Faux

9 Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et étudier sa continuité sur D_f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=2x^2-3x+6$; b) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2-3x-4}$

c) $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$; d) $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x-3}}$

e) $f(x)=x^2+\sin x$

16 Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$ si x ≠ 1.

$f(1) = \dfrac{1}{2}$

Montrer que f est continue sur IR

11 Soit f définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+|3x|}{x} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = -2 \end{cases}$$

a) étudier la continuité à droite et la continuité à gauche de f au point a = 0

b) Donner les intervalles sur lesquels f est continue.

12 Mêmes questions que l'exercice n° 11 avec :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x+1+2|x+1|}{|x+1|} & si\ x \neq -1 \\ g(-1) = 3 & \text{et } a = -1 \end{cases}$$

13 Soit la fonction f définie par :

$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$

a) Donner l'expression de f sur chacun des intervalles : $[0,1[$ et $[1,2[$.

b) Tracer la portion de la courbe représentative de f correspondant à l'intervalle [0,2].

c) Montrer que f est continue sur IR

14 On donne la fonction

$$f : \mathbb{R}^*_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sin\frac{\pi}{x}$$

Donner les intervalles sur lesquels f est continue.

15 Mêmes questions que l'exercice n° 13 avec :

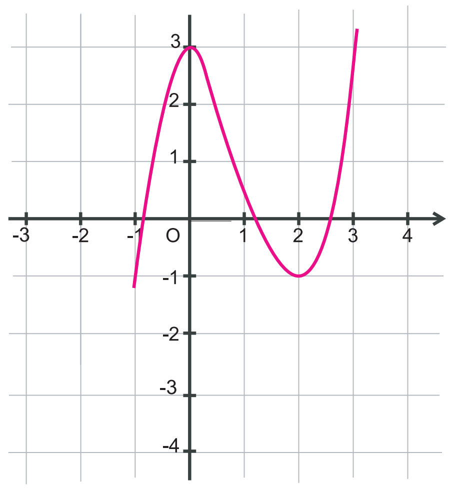
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{E(x)}$$

16 Mêmes questions que l'exercice n° 14 avec :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x^4}{x^3-3x^2-x+3}$$

17 On donne l'équation :
$(E) : x^3 -2x +1 = 0$
1) a) Montrer que (E) admet une solution α dans l'intervalle $[-2,-1]$
b) Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-1} près de α.
2) En remarquant que (E) a une racine évidente, résoudre l'équation (E) et retrouver le résultat de la 1ère question.

18 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=[-1,3]$. On désigne par C_f sa courbe représentative (voir figure ci-dessous)
a) Déduire de la courbe C_f qu'il existe trois réels de l'intervalle I tels que $f(x)= 0$.
b) Donner la valeur approchée de chacun de ces trois réels à 10^{-1} près par défaut.



19 On donne l'équation :
$(E) : x^4 -8x^2 +4 =0$
1) a) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que (E) admet une solution α dans l'intervalle $[2,3]$
b) Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-1} près de α.
2) Résoudre l'équation (E) et retrouver les résultats de la 1ère question.

20 On donne la fonction f :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 2$$

a) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
b) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
c) Montrer que l'équation $x^3 - 3x^2 + 3x -6 = 0$ a une solution unique α et donner une valeur approchée de α par excès à 10^{-1} près.

21 On donne un intervalle $I = [a,b]$ et une fonction définie et continue sur $[a,b]$ telle que $f(I) = I$.

Soit g la fonction telle que $g(x) = f(x) - x$.

Montrer qu'il existe un réel c de $[a,b]$ tel que $g(c) = 0$.
Que peut-on conclure pour f ?

22 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (1+x)^3 + x$$

a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1,0]$
b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}

23 a) Montrer que l'équation $1- x -\sin x = 0$ admet une solution dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
b) Montrer que l'équation $x^4 - \frac{4}{x} = x$ admet une solution dans l'intervalle $[1,2]$

24 Répondre par vrai ou faux:

☐ Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ alors f est continue en a

☐ Si f est une fonction strictement croissante sur $[a,b]$ alors $f([a,b])=[f(a),f(b)]$

☐ La fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x|$ admet une fonction réciproque

☐ $\sin^{-1}$ étant la fonction réciproque de la fonction sin: $\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin x$

alors $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

25 1) Montrer que la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x-2}+1$ détermine une bijection de son ensemble de définition vers un intervalle que l'on déterminera.

2) Déterminer l'expression de f^{-1}.

3) Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère.

26 1) Montrer que la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

détermine une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

2) Trouver $f(\mathbb{R})$ et f^{-1}

3) Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère.

27 1) Etudier les variations de f et représenter graphiquement la fonction f telle que : $f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 4$.

2) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

3) Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

28 On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^*_+$ sur un intervalle que l'on déterminera

2) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ en fonction de x

3) Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

29 On considère la fonction f définie sur

$I = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$ par $f(x) = 2x^2 - x + 1$

a) Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

30 Ecrire plus simplement chacun des réels suivants :

$\sqrt[6]{729}$, $\left(\sqrt[4]{11}\right)^8$, $\sqrt[5]{7^{10}}$, $\sqrt[7]{3^{28}}$

31 a étant un réel positif et n, p des entiers naturels non nuls, montrer que

a) $\sqrt[n]{a^{np}} = a^p$; b) $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

c) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; d) $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$

e) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[p]{a} = \sqrt[np]{a^{n+p}}$

Maths et culture

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (5 Octobre 1781 - 18 Décembre 1848) était un mathématicien tchèque de langue allemande, né en 1781 et mort en 1848 à Prague. Étudiant en philosophie et en mathématiques, il devint prêtre en 1805. Il enseigna alors les sciences de la religion à Prague et consacra le reste de son temps aux mathématiques. Ses travaux portèrent essentiellement sur les fonctions, la logique et la théorie des nombres. Il est considéré comme l'un des principaux contributeurs à la logique telle qu'elle est aujourd'hui établie.

Il est connu pour le théorème de Bolzano, ainsi que pour le théorème de Bolzano-Weierstrass, développé conjointement avec Karl Weierstrass.

Théorème de Bolzano

Soit f une fonction **continue** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Si f change de signe entre a et b, alors il existe $x \in [a,b]$ telque $f(x)=0$

Chapitre

4

DERIVATION - PRIMITIVES

Gottfried Wilhelm Leibniz
(Leibzig 1646-Hanovre 1716)
Newton et Leibniz font naissance du calcul différentiel et primitives

I. Dérivabilité - Rappels

Activités préliminaires

Activité 1:

On donne la fonction f telle que $f(x) = x^2 - 4$

a) Déterminer $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$; $\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

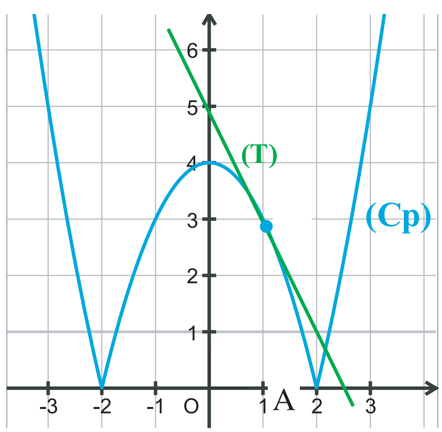
et en déduire que f est dérivable aux points 2 et -1.
Déterminer $f'(2)$ et $f'(-1)$

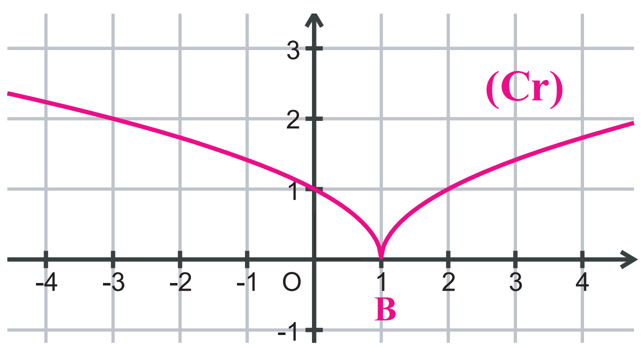
b) La fonction $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow |x^2-1|$ est elle dérivable au point 1? Justifier.

c) La fonction $h: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{|x|}$ est elle dérivable au point 0 ? Justifier.

Activité 2 :

On donne les fonctions $p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow |x^2-4|$ et $r: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \sqrt{|x-1|}$ et leurs représentations graphiques.





1) Déterminer l'équation de la tangente T à C_p au point d'abscisse 1

2) a) Montrer que p n'est pas dérivable au point 2

b) Déterminer le nombre dérivé à droite de p au point 2 et le nombre dérivé à gauche de p au point 2

c) Trouver les équations des deux demi - tangentes à la courbe C_p au point A d'abscisse 2 et les construire

3) a) La fonction r est elle dérivable à droite au point 1? à gauche au point 1?

b) Existe-t-il une demi - tangente à la courbe C_r au point B d'abscisse 1 ?

A retenir

Dérivabilité en un point

•Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dite dérivable en $x_0 \in I$ si : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$ (Limite finie)

•Le réel ℓ est appelé nombre dérivé de f en x_0 ou dérivée de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$.

• Autrement dit $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Dérivabilité à droite et dérivabilité à gauche en un point

•Une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0, a[$ $(x_0 < a)$ est dérivable à droite en x_0 si : $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$ (Limite finie)

Cette limite est appelée dérivée à droite de f en x_0 et est notée : $f'_d(x_0)$

•Une fonction définie sur un intervalle du type $]a, x_0]$ $(a < x_0)$ est dérivable à gauche en x_0 si : $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$ (limite finie)

Cette limite est appelée dérivée à gauche de f en x_0 et est notée: $f'_g(x_0)$

•Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à droite en x_0, à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Théorème (admis)

Toute fonction dérivable en un point x_0 est continue en x_0.

Equation cartésienne de la tangente

•Si f est dérivable au point x_0, alors sa courbe représentative admet une tangente au point $M_0(x_0, f(x_0))$ qui a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

•Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0, alors sa courbe représentative admet une demi - tangente à droite (resp. à gauche) au point $M_0(x_0, f(x_0))$ d'équation :

$\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$ (resp. $\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$)

Dérivabilité sur un intervalle

• Lorsqu'une fonction f admet un nombre dérivé en tout point x_0 d'un intervalle ouvert I, on dit que f est dérivable sur I.

• Lorsque f est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b, on dit que f est dérivable sur $[a,b]$.

De la même manière on définit la dérivabilité d'une fonction f sur $[a,b[$; $]a,b]$; $[a, +\infty[$; $]-\infty, a]$,...

1 Répondre par "vrai" ou "faux" :

a) Si f est dérivable en x_0 , alors elle est continue en x_0

b) Si f est continue en x_0 , alors elle est dérivable en x_0

c) Si f n'est pas continue en x_0 , alors elle n'est pas dérivable en x_0

d) Si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 , alors elle est dérivable en x_0

e) Si f est dérivable en x_0 ,alors elle est dérivable à droite en x_0

f) Si f admet une tangente au point $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ alors, f est dérivable au point x_0

2 Etudier la dérivabilité à droite, la dérivabilité à gauche et la dérivabilité au point 1 de la fonction f dans chacun des cas suivants:

a) $\begin{cases} f(x) = -2 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = (x-1)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

3 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ est dérivable en 0

4 Trouver la (ou les) réponse(s) exacte(s)

• Soit la fonction définie par $f(x)= x^3 - x^2 +1$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Une équation de la tangente à la courbe C_f au point $A(1,1)$ est :

$y=-x+1$ $y = x$ $y=x+1$

b) La pente de la tangente au point B d'abscisse -2 est :

☐ -1 ☐ 21 ☐ 16

c) Un vecteur directeur de la tangente à C_f au point C d'abscisse -1 est

☐ $\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ ☐ $\vec{u}_2\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ ☐ $\vec{u}_3\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$ ☐ $\vec{u}_4\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}$

•La fonction $x \longmapsto |x-2|$ est dérivable sur

☐ $\mathbb{R}$ ☐ $]-\infty, 2[$ ☐ $[2, +\infty[$

II. Fonction dérivée - Opérations sur les fonctions dérivables

Activités préliminaires

Activité 1 :

En utilisant la formule $f'(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes:

$f(x) = \sqrt{2x-1}$; $g(x) = -\dfrac{3}{x}$; $h(x) = \sqrt{x-3}$ et $k(x) = x^2 - 3x + 1$

Activité 2 :

En utilisant les théorèmes portant sur les dérivées de la somme, produit, quotient, … de fonctions calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

a) $f(x) = 3x^4 - 2\sin x$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \cos 2x - 3$; c) $f(x) = (x-2)\sqrt{x}$

d) $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+5}$; e) $f(x) = \sqrt{4x+1}$; f) $f(x) = \left(x^2-1\right)^3$

Activités de découverte

Activité 1 :

On donne les fonctions suivantes:

$f(x) = x^2$; $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ et $h(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2+1}$

a) Vérifier que $h = gof$

b) Calculer $f'(x)$; $g'(x)$; $h'(x)$ puis $g'(f(x))$

c) Vérifier que $(gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

d) Montrer que la dernière égalité reste vraie pour le cas suivant : $f(x)=2x$; $g(x)= \sin x$

e) Appliquer le résultat trouvé dans c) pour $h(x) = \sqrt{f(x)}$ où f est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I

Activité 2 :

1) Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto x^2$ et soit $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ sa bijection réciproque

a) Calculer $f'(x)$ et $(f^{-1})'(x)$ pour $x \neq 0$

b) Calculer $f'(2) \times (f^{-1})'(4)$ et $f'(3) \times (f^{-1})'(9)$

c) Pour tout $a \neq 0$, calculer $f'(\sqrt{a}) \times (f^{-1})'(a)$. Que remarque-t-on ?

2) Soit f une bijection d'un intervalle I sur J et f^{-1} sa bijection réciproque

$$\begin{array}{ccc} I & & J \\ x = f^{-1}(y) & \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} & y = f(x) \end{array}$$

On suppose que f est dérivable sur I, et on admet que si au point x de I, $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable au point $y = f(x)$.

a) Montrer que pour tout $x \in I$, on a: $(f^{-1} o f)(x)=x$

b) En déduire que l'on a : $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$

c) x étant un élément de J tel que $(f^{-1})'(x)$ existe, montrer que $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

A retenir

Fonction dérivée

f étant une fonction dérivable sur un intervalle I, la fonction dérivée de f notée f' est la fonction définie sur I et qui à tout réel x de I, associe $f'(x)$

Opérations sur les fonctions dérivables

- f et g étant deux fonctions dérivables sur un intervalle I et λ un réel, les fonctions λf, $f+g$ et fg sont dérivables sur I et l'on a :

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$
$$(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$$
$$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

- En tout point x de I tel que $g(x) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables en x et l'on a:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{\left(g(x)\right)^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

- Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$, alors gof est dérivable en x et l'on a :

$$(gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

- Si $f(x)$ est strictement positif, alors $\sqrt{f}$ est dérivable en x et l'on a:

$$\left(\sqrt{f}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

- Si f admet une fonction réciproque f^{-1} et si $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable au point $f(x)$ et on a: $\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$, autrement dit , $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Le tableau suivant présente quelques formules utiles pour le calcul des dérivées et les dérivées de quelques fonctions usuelles.

$f(x)$	$f'(x)$
$aU(x)+bV(x)$ $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$	$aU'(x)+bV'(x)$
$U(x)V(x)$	$U'(x)V(x)+U(x)V'(x)$
$\frac{U(x)}{V(x)}$	$\frac{U'(x)V(x)-U(x)V'(x)}{\left[V(x)\right]^2}$
$\frac{1}{V(x)}$	$-\frac{V'(x)}{\left[V(x)\right]^2}$
$(UoV)(x)$	$U'[V(x)]V'(x)$

$\sqrt{U(x)}$	$\dfrac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}$
$[U(x)]^n$	$n\,(U(x))^{n-1}\,U'(x)$
$ax+b$	a
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{ax+b}{cx+d}$	$\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt{ax+b}$	$\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$
$\tan(ax+b)$	$a[1+\tan^2(ax+b)]$

Applications

1 Pour chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de f et celui de sa dérivée et calculer $f'(x)$:

a) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ b) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-2x-2}$ c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ d) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$

e) $f(x)=(3x+2)^4$ f) $f(x)=\left(\dfrac{2x-1}{x-3}\right)^3$ g) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ h) $f(x)=\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})$

i) $f(x)=\sin^2(3x)$ j) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ k) $f(x)=\tan(2x)$ l) $f(x)=\sqrt{1+\cos x}$

m) $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$ n) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

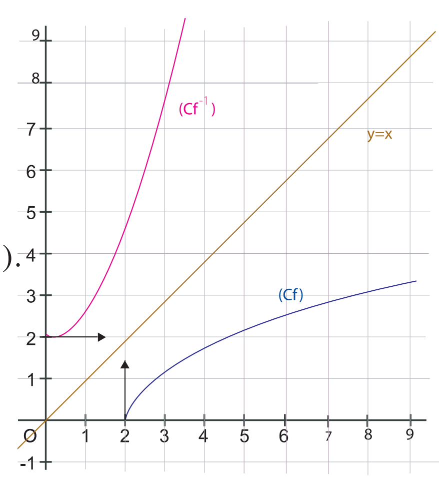
2 On donne la fonction $f : [0,\dfrac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sin x$

a) Montrer que f admet une bijection réciproque.

b) Donner l'ensemble de définition de f^{-1} et de $(f^{-1})'$

c) Calculer $f(0)$ et $f(\dfrac{\pi}{4})$. En déduire $(f^{-1})'(0)$ et $(f^{-1})'(\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.



3 On considère le schéma ci-contre :

f est-elle dérivable en 2 ?

f^{-1} est-elle dérivable en $f(2)$?

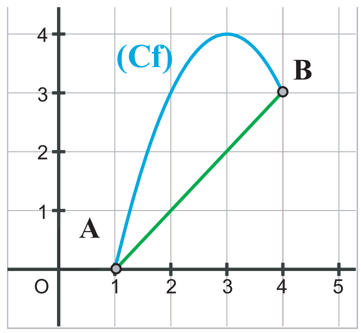
Que peut-on conclure ?

III. Théorème des accroissements finis

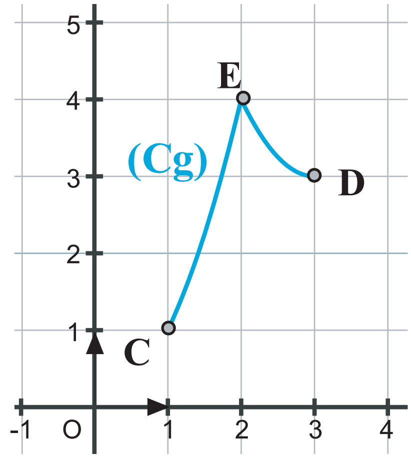
Activités préliminaires

Activité 1 :

On considère les courbes suivantes :



$f(x) = -x^2+6x-5 \quad 1 \leq x \leq 4$



$$\begin{cases} g(x)=x^2 & si\ 1 \leq x \leq 2 \\ g(x)=x^2-6x+12 & si\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

a) Vérifier que f est continue et dérivable sur $[1,4]$
b) La fonction g est elle dérivable en 2 ?
c) Déterminer la pente p_1 de la droite (AB) puis la pente p_2 de la droite (CD).
d) Montrer qu'il existe un réel $c \in [1,4]$ tel que $f'(c) = p_1$.
e) Tracer la tangente à (C_f) au point d'abscisse c .
f) Montrer que l'on a : $f(4) - f(1) = 3f'(c)$.
g) Existe-t-il un réel $x \in [1,2]$ tel que $g'(x) = p_2$?
Existe-t-il un réel $x \in [2,3]$ tel que $g'(x) = p_2$?
Interpréter graphiquement les résultats obtenus
Plus généralement on admet que si f est une fonction continue sur $[a,b]$ est dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que : $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$

Activité 2:

a) On donne la fonction $f : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $f(x) = \sin x$

Soient a et b deux réels de l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}]$ tels que $a < b$. montrer qu'il existe un réel

c $\in]a,b[$ tel que: $\sin b - \sin a = (b - a)\cos c$.
En déduire que: $(b - a)\cos b \leq \sin b - \sin a \leq (b - a)\cos a$.
b) Montrer que pour tout réel a et tout réel b on a : $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$.

• Plus généralement l'égalité $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ s'écrit $\dfrac{f(b) - f(a)}{(b - a)} = f'(c)$ et dans le cas où $f'(x)$ est bornée par deux réels m et M sur $]a,b[$, on a alors .

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} \leq M$$

De plus si, pour tout $x \in]a,b[$, on a $|f'(x)| \leq k$, alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$.

Activité 3 :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

En utilisant l'égalité $\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)} = f'(c)$; $c \in]a,b[$

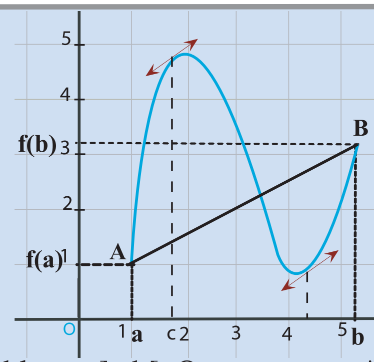
• Montrer que si $f'(x) > 0$ sur $]a,b[$ alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.

• Donner le sens de variation de f lorsque $f'(x) \geq 0$ sur $]a,b[$,lorsque $f'(x) \leq 0$ sur $]a,b[$, lorsque $f'(x) < 0$ sur $]a,b[$, enfin lorsque $f'(x) = 0$ sur $]a,b[$.

Activité 4 :

a) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.
On suppose que f présente un maximum local au point a, c'est à dire que $f(x) \leq f(a)$ sur un voisinage de a.
Montrer que $f'_g(a) \geq 0$ et que $f'_d(a) \leq 0$. En déduire que $f'(a) = 0$.
Faire de même lorsque f présente un minimum local au point a.
b) Réciproquement, on admet que si $f'(x)$ s'annule en a en changeant de signe, alors f présente en a un extrémum local.

A retenir



Théorème des accroissements finis

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a < b)$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in]a,b[$.

On a alors: $m \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)} \leq M$

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe un réel k strictement positif tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in]a,b[$.
On a alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$ pour tous réels a et b de I

Dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée, alors :

• f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$)

• f est strictement croissante(resp.strictement décroissante) sur I si et seulement si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$).

• f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$

Extrémum d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$
Si f présente un extrémum local au point a, alors $f'(a) = 0$.
Si $f'(x)$ s'annule en a en changeant de signe, alors f présente en a un extrémum local.

1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x^3$
Déterminer les réels c vérifiant $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ dans chacun des cas suivants :
$a = 1$ et $b = -3$.
$a = 0$ et $b = 2$.

2 Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f telle que
$f(x) = x^4 + x^2 - 2x + 5$, $a = -1$ et $b = 1$.
a) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, on a: $-10 \leq f'(x) \leq 2$.
b) En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$ on a: $-10x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 11$.

3 En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \longmapsto \cos x$ sur un intervalle que l'on choisira, montrer que: $|\cos b - 1| \leq |b|$ pour tout réel b.

4 On donne $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$.

Etudier les variations de f et donner le(s) point(s) ou la fonction f présente un extrémum.

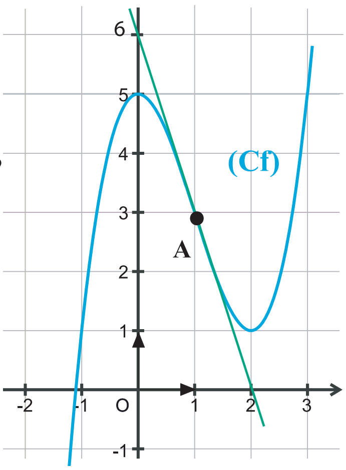
IV. Dérivée seconde - Point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. On suppose que f' est dérivable sur I

On appelle dérivée seconde de f et on noté f'' la fonction dérivée de f' .
Pour tout x de I $f''(x)=(f')'(x)$.

Exemples
si $f(x) = x^2 - 3x + 4$ alors $f'(x) = 2x - 3$ d'où $f''(x) = 2$.
si $f(x) = \sin(2x)$ alors $f'(x) = 2\cos(2x)$ d'où $f''(x) = -4\sin(2x)$
si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ d'où $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

Activité :
La figure suivante donne la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$



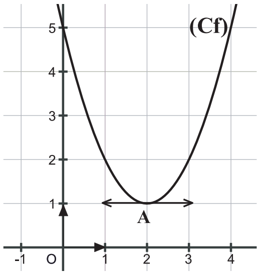
a)Donner l'équation de la tangente Δ à (C_f) au point A(1,3).
b)Quelle est la position de Δ et de (C_f) au voisinage du point A ?
On remarque que la tangente à la courbe (C_f) au point A(1,3) **traverse** la courbe.
On dit que le point A est **un point d'inflexion** de (C_f)
c) Calculer $f''(x)$ et déterminer le tableau de signe de $f''(x)$.
Que remarque-t-on ?.

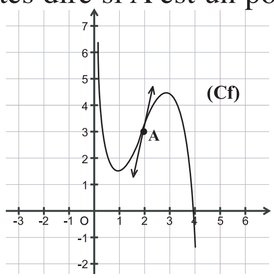
A retenir

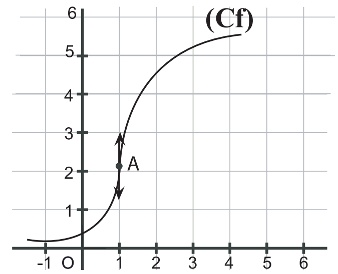
f étant une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel appartenant à I, le point M_0 $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C_f) si et seulement si $f''(x)$ s'annule et change de signe en x_0

Applications

1 Pour chacune des courbes suivantes dire si A est un point d'inflexion.







2 Déterminer le(s) point(s) d'inflexion de (C_f) s'ils existent :

a) $f(x) = x^3 - x + 1$ b) $f(x) = (x+1)^4$ c) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

V. Primitives :

Activités préliminaires

Un mobile se déplace sur une trajectoire avec une vitesse qui vaut à l'instant t :

$$v(t) = 2t + 1.$$

Si $x(t)$ désigne la position du mobile sur la trajectoire à l'instant t et sachant que à l'instant $t = 0$ on a $x(0) = 2$, donner l'expression de $x(t)$ en fonction de t.

Activités de découverte

Activité 1 :

Une fonction F est telle que $F'(x) = x^2 - 2x + 5$, $x \in \mathbb{R}$,

Déterminer $F(x)$ sachant que la courbe représentative de F passe par le point A(3,0).

▶ La fonction $x : t \longmapsto x(t) = t^2 + t + 2$ admet la fonction $v : t \longmapsto v(t) = 2t + 1$ comme fonction dérivée.

On dit que la fonction x est une **primitive** de la fonction v.

De même, dans l'activité 1, la fonction F est une primitive de la fonction

$$f : x \longmapsto x^2 - 2x + 5$$

Activité 2 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f admet sur I une primitive F.

1) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction G telle que : $G(x) = F(x) + \lambda, x \in I$ est une primitive de f.

2) Soit H une autre primitive de f. Pour tout $x \in I$ calculer $(H - F)'(x)$. Conclure.

Activité 3 :

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = \cos 2x$.

a) Montrer que l'expression générale d'une primitive F de f est $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \lambda$.

b) Déterminer λ pour que l'on ait $F(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Activité 4 :

On donne deux fonctions f et g définies sur un intervalle I et admettant respectivement F et G comme primitives sur I. Soient α *et* β deux réels et H la fonction définie par :

$H(x) = \alpha F(x) + \beta G(x) \quad x \in I$

Déterminer $H'(x)$. En déduire la forme générale d'une primitive de $\alpha f + \beta g$.

A retenir

Définition

f étant une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I et telle que $F'(x) = f(x)$, $x \in I$

Théorème (admis)

Toute fonction définie et continue sur un intervalle I, admet une primitive sur I.

Théorème

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et admettant une primitive F sur I. Alors toute autre primitive G de f sur I est de la forme $G(x) = F(x) + \lambda$ où λ est une constante.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Théorème

Si f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I, F et G leurs primitives respectives, alors pour tous réels α et β, la fonction $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$.

Primitives de fonctions usuelles.

Fonction f	**Fonction primitive *F***	**Intervalle *I***
$f(x) = k$ (constante)	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{-1}{x} + c$	$]0 ; +\infty[$ ou $]-\infty ; 0[$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}_-^*$ et $n \neq -1$)	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$

A retenir

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$	$]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi\,;\dfrac{\pi}{2} + k\pi[$
$f(x) = \cos(ax + b)\quad a \neq 0$	$F(x) = \dfrac{1}{a}\sin(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax + b)\quad a \neq 0$	$F(x) = -\dfrac{1}{a}\cos(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+$

Formules pratiques pour la recherche des primitives

Lorsque u et v sont des fonctions continues sur un intervalle I

Fonction	Une primitive	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	
$\lambda\, .u'$ (λ : constante)	λu	
$u'\, u^n$ ($n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$)	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$u \neq 0$ dans le cas $n \leq -2$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\dfrac{v'}{v^2}$	$\dfrac{-1}{v}$	$v \neq 0$ sur I
$(u'ov).v'$	uov	

Applications

1 Déterminer une primitive F de la fonction f :

a) $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+2)^2}$ b) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{2x-1}}$ c) $f(x)=x^3+2x-5$ d) $f(x)=10x^4+6x^3-1$

e) $f(x)=(2x)(x^2+1)^3$ f) $f(x)=\dfrac{-3}{(2x+5)^2}$ g) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+4$ h) $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x-5}}$

i) $f(x)=(4x-6)(x^2-3x+1)$ j) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\sin x$ k) $f(x)=(3x^2+5)(x^3+5x-2)^2$

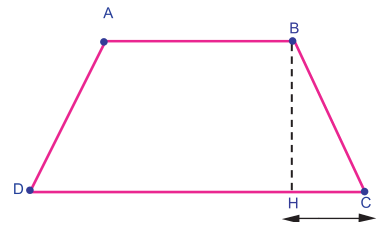
l) $f(x)=\sin x\cos^2 x$ m) $f(x)=(3x-1)^4$ n) $f(x)=4x-\dfrac{3}{x^2}$

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Trouver la primitive F de f telle que $F(0)=2$.

Apprendre à chercher

Situation 1

La figure suivante représente un trapèze ABCD où l'on a : AB = 1 , BC = AD = 1 et CD est variable. On désigne par x la longueur CH où H est le projeté orthogonal de B sur [CD].



1) Montrer que l'aire du trapèze ABCD est égale à $(1+x)\sqrt{1-x^2}$
(On pourra décomposer sa surface en un rectangle et deux triangles)

2) On donne la fonction f définie par : $f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$

a) Trouver l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1-x^2}}$. En déduire les variations de f sur [0,1].

c) Déterminer le réel x pour lequel l'aire du trapèze est maximale.

Situation 2

On donne la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$

1) Déterminer $f(o)$ *et* $f'(o)$.

2) On donne la fonction g définie par $g(x) = f(x) - [f(0) + xf'(0)]$

a) Exprimer $g(x)$ en fonction de x.

b) Montrer que $g(x) = \dfrac{-x^2}{2(2\sqrt{1+x} + 2 + x)}$

c) Montrer que pour tout réel x positif, on a : $8 \leq 2(2\sqrt{1+x} + 2 + x)$

d) En déduire que tout réel x positif, on a : $-\dfrac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} - (1 + \dfrac{x}{2}) \leq 0$

Application

Sans calculatrice donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $\sqrt{1,2}$

Situation 3

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 11}{(x+2)^2}$

On veut déterminer les réels a, b et c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}$$

1) En utilisant les deux expressions de $f(x)$, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. En déduire la valeur de a.

2) Donner deux expressions de $g(x) = (x+2)^2 f(x)$ puis déterminer $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$.
En déduire la valeur de c.

3) Calculer de deux manières $f(o)$. En déduire la valeur de b.

4) Déterminer alors une primitive de f .

On souhaite évaluer $f'(x_o)$ en calculant le taux d'accroissement de f entre x_o et x_o+h et à faire tendre h vers 0. On va l'appliquer à la fonction $f(x) = \sqrt{x}$

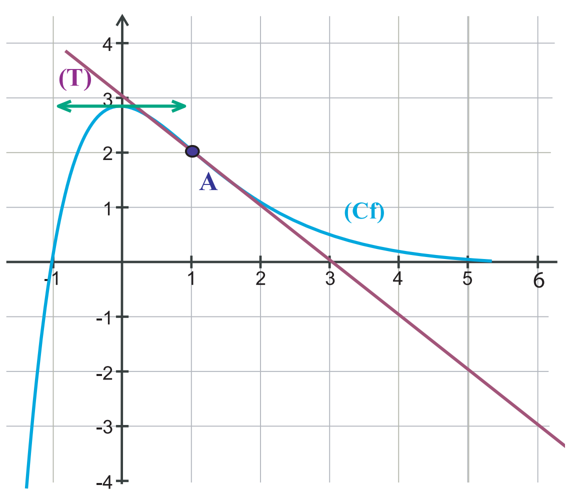
```
program Derivation;
uses wincrt;
  const IterMax=20;
function f(x:real):real;
begin f:=sqrt(x) end ;
function fprime(x:real):real;
begin fprime:=1/(2*sqrt(x)) end ;
  var x0,h,fp:real;
   NbIter,k:integer;
  begin
      repeat
         write (' Nombre d''itération compris entre 0 et 15 : ' );
   readln(nbiter);   writeln;
   until (nbiter>0) and (nbiter <=itermax);
   write(' valeur de x0 : '); read(x0);writeln;
   repeat
   write(' valeur initial de h > 0 : ' );
   readln(h);   writeln;
   until h>0;
   clrscr; writeln('              Evaluation de f''(xo) pour f(x)= racine carrée de x');writeln;
 writeln(' xo=',x0:10:10,'    et    f''(x0)=',fprime(x0):16:16); writeln;
 writeln('                    f(xo+h)-f(xo) ') ;
 writeln('h --------> 0        ______________ --------> f''(xo)=',fprime(x0):16:16 );
  writeln('                           h      ');
 for k:=1 to nbiter do
   begin
      fp:= (f(x0+h)-f(x0))/h;
      write(h:10:10,'        ',fp:16:16);writeln; h:=h/2;
      end
end.
```

Exercices et problèmes

1 Soit f la fonction définie de la façon suivante $\begin{cases} f(x) = x^2\text{-}2x+2 & \text{si } x < 2 \\ f(x) = 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

1) La fonction f est-elle continue en tout point de $\mathbb{R}$?
2) La fonction f est elle dérivable en tout point de $\mathbb{R}$?

2 Dans la plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
La droite (T) est tangente à la courbe (C) au point A d'abscisse 1.
La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe (C) en $+\infty$
Pour chaque question, quatre affirmations sont proposées. Une et une seule est exacte. On demande de l'entourer
1) D'après la courbe ci-dessous :
a. $f(0) = 0$ b. $f'(0) = 2$
c. $f'(0) = 0$ d. $f(2) = 0$
2)D'après la courbe ci-dessous, $f'(1)$ est égal à
a. 0 b. 1 c. - 1 d. - 2



3 Répondre par oui ou non aux quatre questions suivantes : (Les réponses affirmatives seront justifiées par une démonstration, les autres le seront par un contre-exemple).

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si f est continue en 0, est-elle nécessairement dérivable en 0 ?
2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si f est dérivable en 0, est-elle nécessairement continue en 0 ?
3) Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f'(0) = 0$
La fonction f admet-elle nécessairement un extremum en 0 ?
4) Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et admettant un maximum en 1 .
La fonction f vérifie-t-elle nécessairement la condition $f'(1) = 0$?

4 1) On donne la fonction f : $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$ et le réel $x_0 = 2$.
En utilisant la définition , déterminer le nombre dérivé de f en x_0 . Déterminer l'équation de tangente de f en x_0
2) Mêmes questions pour :

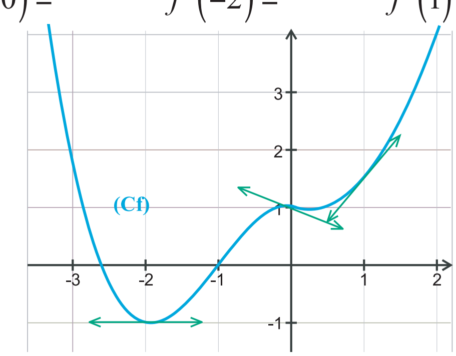
a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ et $x_0 = 2$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$ et $x_0 = \dfrac{1}{4}$

5 La courbe représentative d'une fonction f est donnée ci-après.
1) En vous servant du quadrillage, compléter les égalités suivantes :

$f(0) =$ $f(-2) =$ $f(1) =$

$f'(0) =$ $f'(-2) =$ $f'(1) =$



2) Déterminer l'équation de la tangente en $x_o = 1$

6 Trouver la (ou les) réponse(s) exacte(s) :
Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, C_f désigne la courbe représentative de la fonction f dans ce repère :

1) Une équation de la droite passant par A(1 ; 2) et de coefficient directeur -3 est :

a) $y = -3x + 5$ b) $6x + 2y - 10 = 0$
c) $y = 2x - 3$

2) Soit $f(x) = x^3 - x$, et A et B les points de C_f d'abscisses respectives 1 et 2. La pente de (AB) est

a) 5 **b)** 1 **c)** 6

3) Soit $g(x) = x^2 + 1$, M le point de C_g d'abscisse x. La pente de la tangente à C_g au point M est :

a) $x-2$ **b)** $2x$ **c)** $\frac{x}{2}$

4) La limite lorsque h tend vers 0 de

$$\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$$ est

a) 0 **b)** $+\infty$ **c)** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

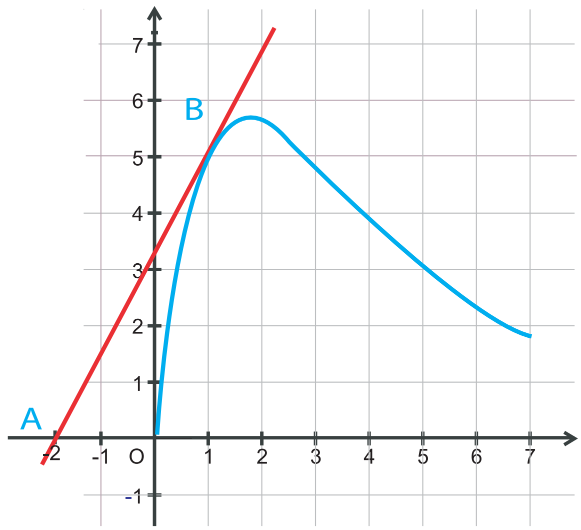
7 **1)** Calculer la dérivée au point $x_o = 1$ de la fonction $f(x) = \dfrac{1-2x^2}{1+x^2}$

2) Calculer la dérivée au point $x_o = 9$ de la fonction $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

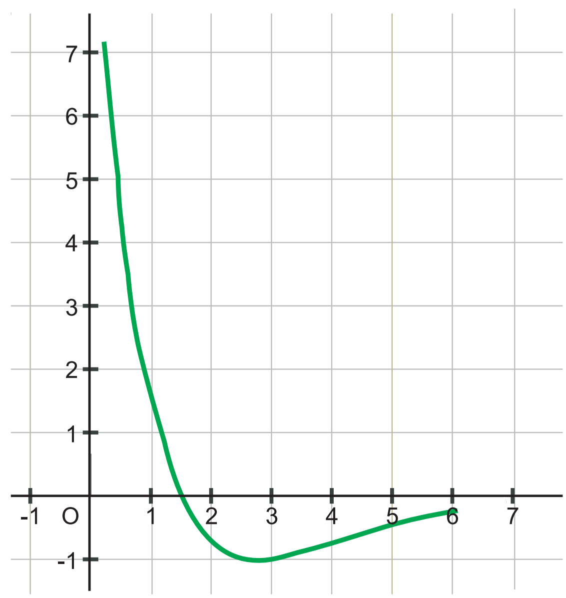
3) Calculer la dérivée au point $x_o = 0$ de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

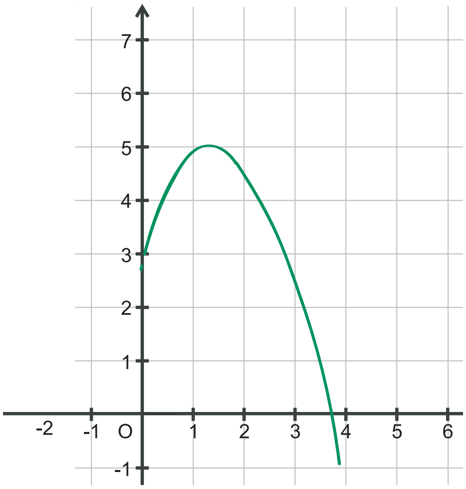
8 La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie sur [0;6]. Les points A et B ont pour coordonnées A(-2;0), B(1;5) . B est un point de C_f, et la droite (AB) est tangente à C_f

1) Déterminer $f'(1)$, où f' est la dérivée de la fonction f.



2) Une des deux courbes suivantes représente la fonction f'. Laquelle ? (justifier).





3) On appelle g la fonction définie sur $[0\ ;\ 6]$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Donner l'expression de sa dérivée g' (à l'aide de f et f'), calculer $g'(1)$.

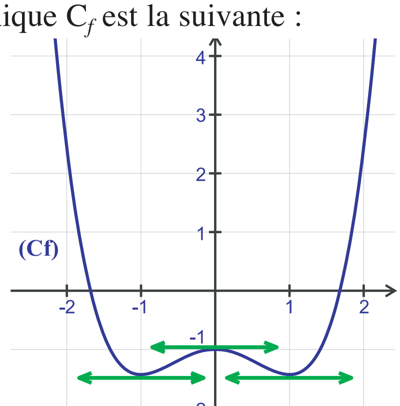
9 Soit C la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2+6x+5$ et A $(-1,0)$ un point de C.

1) Ecrire une équation de la droite D_m passant par A et de coefficient directeur m.

2) Soit S l'ensemble des points communs à D_m et à C. Déterminer m en sorte que S soit un singleton. On calculera les coordonnées de ce point.

3) Montrer qu'alors, D_m est tangente à C

10 Soit la fonction f dont la représentation graphique C_f est la suivante :



a) Dresser le tableau de signe de la fonction f en justifiant la lecture.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

c) Dresser le tableau de signe de la fonction f' en justifiant la lecture.

d) Résoudre en justifiant, l'équation : $f'(x)=0$

11 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition et l'ensemble sur lequel elle est dérivable. Déterminer alors la dérivée de chacune d'elles.

a) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$ **b)** $g(x) = (2x + 3)\sqrt{3x^5}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2+7}{x^2-x-6}$ **d)** $k(x) = \dfrac{1}{(5x^2-3)^3}$

e) $m(x) = (2x^3 + 3x - 1)^4$

f) $n(x) = \sqrt{x^4+x^2+1}$

g) $p(x) = \sin(\dfrac{1}{x})$

12 On pose : $g(x) = 2x^3 + x - 1$.

1) Etudier les variations de g.

2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α .
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

3) Etudier le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x. En déduire les variations de la fonction

$$f : x \longmapsto \sqrt{x^4+(x-1)^2}$$

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

1) Calculer la dérivée $f'(x)$.

2) En déduire la dérivée de g, h, k et l définies par :

a) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ **b)** $h(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$

c) $k(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-1}$ **d)** $l(x)=\dfrac{\cos x+2}{-1+\cos x}$

14 On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.

a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer $f(1)$, $f(-2)$.

En déduire $(f^{-1})'(3)$, $(f^{-1})'(-9)$

15 Soit f la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan x$

a) Montrer que f admet une fonction réciproque

b) Déterminer l'ensemble de définition de f^{-1} ainsi que son ensemble de dérivabilité.

c) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

16 Soit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$

a) Montrer que

$$\frac{1}{21}\leq f'(x)\leq\frac{1}{20} \quad \text{si} \quad x\in[100,101]$$

b) En déduire que $10,047 \leq \sqrt{101} \leq 10,05$

17 Soit f la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par :

$$f : x = \tan x.$$

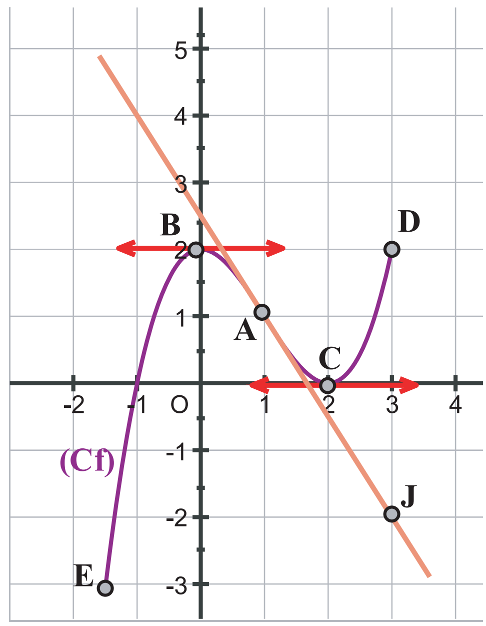
a) Montrer que. $1\leq f'(x)\leq 2$ pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$

b) En déduire que :

$x \leq \tan x \leq 2x$ pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$

18 Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-\frac{3}{2}\,;3]$ dont la représentation graphique, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ est la courbe (C_f) ci-dessous.

Les points $A(1,1)$, $B(0,2)$, $C(2,0)$, $E(-\frac{3}{2},-3)$, et $D(3,2)$ appartiennent à (C_f).



La courbe (C_f) admet en chacun des points B et C une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

La droite Δ est tangente à la courbe (C_f) au point A ; elle passe par le point J de coordonnées (3 ; -2).

1) a) Donner $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

b) Déterminer une équation de la droite Δ .

2) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation

$f(x) = 1$ sur l'intervalle $[-\frac{3}{2}\,;3]$

3) f est la dérivée d'une fonction F définie sur l'intervalle $[-\frac{3}{2}\,;3]$. En justifiant la réponse, donner le sens de variation de F.

4) Pour tout $x\in[-\frac{3}{2}\,;3]$, on pose

$f'(x) = ax(x-2)$, a étant une constante réelle. Déterminer a à l'aide des résultats de la question **1. a)**.

b) Vérifier que pour tout $x \in [-\frac{3}{2} ; 3]$,

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x.$$

Déterminer l'expression de $f(x)$ pour $x \in [-\frac{3}{2} ; 3]$.

19 Un artisan fabrique des objets en bois. Pour chaque semaine, il estime que le coût de production en dinars de x objets est donné par $C(x) = x^2 + 60x + 121$ pour $x \in [1 ; 30]$.
Le coût moyen de production est défini par

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$$

a) Calculer la dérivée C'_m de C_m. Etudier le signe de C'_m et dresser le tableau de variation de C_m.
b) En déduire le nombre d'objets à fabriquer pour obtenir un coût moyen minimal.
c) Chaque objet est vendu 110 D. Montrer que le bénéfice réalisé par la vente de x objets est donné par :

$$B(x) = -x^2 + 50x - 121$$

Etudier le signe de $B'(x)$ et dresser le tableau de variation de B. En déduire le nombre d'objets à vendre pour obtenir un bénéfice maximal

20 Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = \frac{|x-1| + x}{x^2 - 1}$$

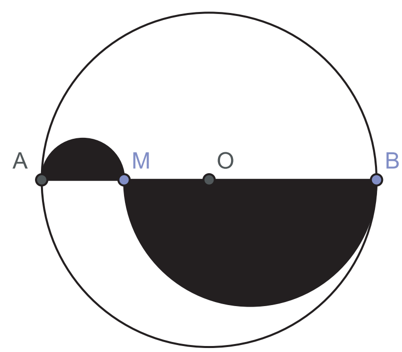
a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer, suivant les valeurs de x, l'expression de $f(x)$ sans les barres de valeurs absolues.
c) i) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
Déterminer, suivant les valeurs de x, l'expression de $f'(x)$
ii) Dresser le tableau de variation de f

21 **1)** Soit f la fonction définie par:
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On désigne par (C) sa courbe dans un repère orthogonal.
Déterminer les réels a, b, c et d sachant que la courbe (C) passe par les points $A(1,8)$, B(0,3), et $D(2,9)$ et admet en B une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 5x$.
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:
$g(x) = -x^3 + x^2 + 5x + 3$ de courbe représentative Γ dans un repère orthogonal
a) Déterminer le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que pour tout réel x :

$$g(x) = (x+1)^2(3-x)$$

En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x
c) Déterminer une équation de la tangente T à Γ en un point d'abscisse x_o.

22 Détermination d'une aire maximale des lunules



La partie en noir est appelée lunule.
Le but du problème suivant est de déterminer la position du point M qui donne l'aire de la lunule maximale.
$AB = 10 ; l = AM$
L'aire A de la lunule peut-être calculée à l'aide de la formule suivante :

$$A = \frac{\pi}{4}(L^2 - 10L + 50).$$

1) Calculer l'aire de la lunule pour $l = 4$.

2) Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ;10] par $f(x) = x^2 - 10x + 50$

a) Calculer f' la fonction dérivée de f.

b) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

c) Donner le tableau de variation de la fonction f.
Déduire de l'étude précédente la position du point M pour laquelle l'aire de la lunule est maximum puis calculer cette aire.

23 Au cours d'une expérience visant à tester un vaccin, l'analyse du sang d'un sujet a montré que le nombre de microbes par millilitre, t heures après une injection est décrit par : $N(t) = 10^4(72-2t)^2$
où $t \geq 10$.
a) Combien de temps faut-il pour que tous les microbes soient éliminés du sang ?
b) Quel est le taux de variation du nombre de microbes par millilitre 12 heures après l'injection ?
c) Quel est le taux moyen de variation à la quinzième heure après l'injection ?

24 Pour chacun des cas suivants déterminer une primitive F de la fonction f sur un intervalle I que l'on choisira.

a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$

b) $f(x) = x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \sin x - 2\cos x$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - x^2$

e) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}$

g) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+2)^2}$

h) $f(x) = x\cos x^2$

i) $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$

j) $f(x) = x^2(x^3+2)^3$

k) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^3+2)^3}$

m) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 2}}$

n) $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$

25 a) Déterminer l'ensemble de définition de f telle que $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x^2+x+1)^2}$

b) Déterminer a et b pour que f admette une primitive F telle que

$$F(x) = \frac{ax+b}{x^2+x+1}$$

26 Donner la primitive F de f sur un intervalle I telle que $F(x_0) = y_0$

a) $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$ et $F(1) = 0$

b) $f(x) = -2\sin 2x$ et $F(\frac{\pi}{4}) = 1$

c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $F(1) = 1$

27 Soit $f(x) = \dfrac{4x-1}{(2x+1)^3}$

a) Déterminer les réels a et b tels que :
pour tout $x \in Df$ $f(x) = \dfrac{a}{(2x+1)^2} + \dfrac{b}{(2x+1)^3}$

b) Déterminer toutes les primitives de f sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

28 Déterminer une fonction polynôme P dont la fonction dérivée est : $P'(x) = x^2 - 5x + 6$ et dont le maximum relatif est le double du minimum relatif.

Gottfried LEIBNIZ (1646-1716)

Leibniz, grand mathématicien, est aussi une des grandes figures de la civilisation européenne. Il a produit une œuvre philosophique de premier plan, il a fait diverses découvertes en physique, il a construit une machine à calculer supérieure à celle de Blaise Pascal, s'est intéressé aussi à la logique, à la numération binaire, il est l'un des deux fondateurs de l'Analyse mathématique. . . mais il a fait des études juridiques et rempli de nombreuses missions diplomatiques.
Contrairement à l'immense majorité des grands mathématiciens, Leibniz est venu très tard aux mathématiques, à l'âge de 26 ans, à l'occasion d'un séjour à Paris en 1672, et ses débuts sont difficiles. Il commet de nombreuses erreurs, dues au fait qu'il est débutant, et qu'il manque de "technique" mathématique.
Mais très rapidement, l'élève devient un maître. Dès 1675 (dans un manuscrit daté du 21 Novembre), Leibniz invente les symboles dx, $\int$ (un S, initiale du mot latin summa, somme), donne les premières règles de dérivation, d'intégration. Il a créé l'Analyse mathématique, ou calcul infinitésimal, qui tient encore de nos jours une telle place dans les programmes de nos lycées.
A partir de 1684, Leibniz publie les bases de son nouveau calcul dans le revue qu'il a fondée à Leipzig, les Acta Eriditorum, les Actes de Erudits. Les résultats sont innombrables et remarquables, avec quelques erreurs. Un des plus importants est le "Théorème fondamental de l'Analyse", à savoir que dérivation et intégration sont des opérations (sur les fonctions) en quelque sorte inverses l'une de l'autre. Le mot même de fonction est dû à Leibniz.
Dans son nouveau calcul, Leibniz a des disciples, qui bientôt le développent et le propagent, dont font partie les frères Jean et Jacques Bernoulli, de Bâle, et le Marquis de l'Hospital. Les découvertes et les notations de Leibniz se propagent ainsi sur le continent européen.
Les mêmes découvertes avaient été faites par Isaac Newton, avec un point de vue et des notations différentes, ce qui a entraîné entre les deux hommes une pénible querelle de priorité, Newton accusant Leibniz de lui avoir volé ses inventions. Il semble bien au contraire que les découvertes des deux hommes aient été indépendantes. Mais le fait que Leibniz, et surtout Newton, attendaient très longtemps pour publier leurs résultats favorisaient ce genre de controverses.
Parmi les travaux de Leibniz en dehors de son Analyse, on peut citer un Essay d'une nouvelle science des nombres sur le système binaire, sur lequel il fut l'un des premiers à travailler. Il avait aussi développé tout un travail sur les déterminants, mais il ne le publia pas de son vivant. Enfin, il fut créateur aussi dans le domaine de la Logique.

Chapitre 5

ETUDE DE FONCTIONS

I . Généralités

II . Exemples de fonctions rationnelles

III . Exemples de fonctions de type $x \mapsto \sqrt{ax^2+bx+c}$

Jean-Baptiste Fourier(1768-1830)

I. Généralités :

Activités préliminaires

Activité 1 :

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.

1)Etudier la parité de f. Que peut-on dire alors de la courbe (C_f) ?

2)Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées. Donner l'équation de la tangente T à (C_f) en ce point.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat

3) Dresser le tableau de variation de f. En déduire les coordonnées des points où la courbe (C_f) admet une tangente horizontale.

4) Tracer T et (C_f) dans un repère orthogonal.

Histoire des courbes

C'est le Grec Apollonios de Perga(262-180 av JC) qui étudie les paraboles, les ellipses et les hyperboles comme sections planes d'un cône.

Activité 2 :

On donne la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g. Calculer les limites de g aux bornes de D_g.

2) En déduire les équations des asymptotes à la courbe (C_g) .

3) Montrer que si $x \in D_g$,alors $(-3-x) \in D_g$ et $g(-3-x) = 1 - g(x)$. En déduire que (C_g) admet un centre de symétrie dont on donnera les coordonnées.

4) Dresser le tableau de variation de g et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Activité 3 :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{4}(x-3)^2(x+1)^2$. Soit (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Montrer que $h(2 - x) = h(x)$. En déduire que la courbe (C_h) admet un axe de symétrie dont on donnera une équation.

2) a) Montrer que $h'(x) = (x-3)(x+1)(x-1)$.

b) Dresser le tableau de variation de h.

c) Etudier les branches infinies de la courbe (C_h).

d) Tracer la courbe (C_h).

Activité 4 :

Soit r la fonction définie par : $r(x) = \sqrt{|x| - 2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_r de r.

2) Montrer que r est paire. Interpréter graphiquement cette propriété.

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Quelle est l'allure de la courbe (C_r) au voisinage de $+\infty$?

Activité 5:

On donne la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 4}{x - 1}$

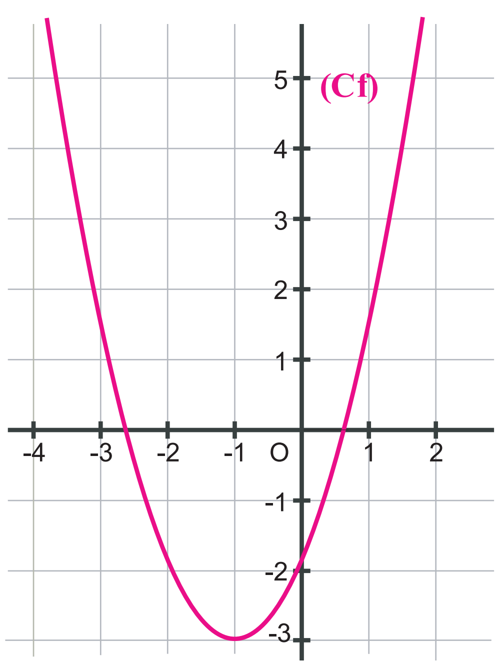
1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f
En déduire l'équation de l'asymptote verticale Δ .
2) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est une asymptote oblique pour (C_f)
   b) Etudier la position de (C_f) par rapport à (D).
3) a) Vérifier que : $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$
   b) Dresser le tableau de variations de f .
   c) Tracer Δ , (D) et (C_f) dans un repère orthogonal.

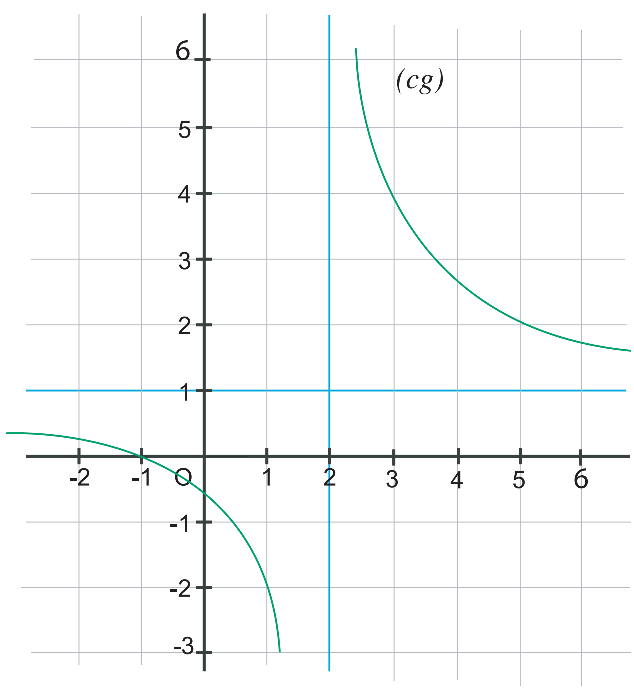
Activité 6 :

On donne la fonction f définie par: $f(x) = E(x) - x$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
1) Donner l'expression de $E(x)$ sur chacun des intervalles: $[-1,0[$, $[0,1[$ et $[2,3[$.
2) Montrer que f est périodique et de période 1.
3) Soit (C_1) et (C_3) respectivement les parties de la courbe représentative de f correspondant aux intervalles $[0,1[$ et $[2,3[$. Déterminer le vecteur de la translation qui transforme (C_1) en (C_3).

Activité 7 :

Les courbes suivantes représentent respectivement des fonctions f et g :





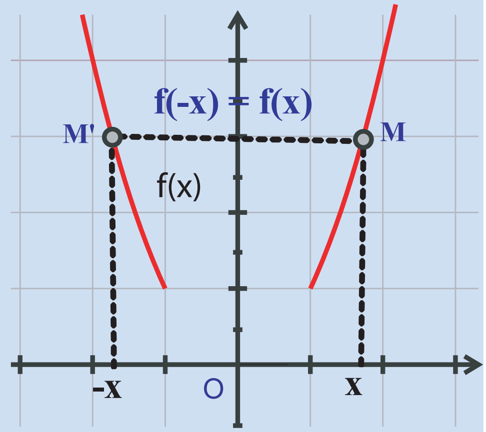
Donner les représentations graphiques de $|f|$ et $|g|$.

Fonction paire

Soit f une fonction à variable réelle et D son ensemble de définition.
f est dite paire si et seulement si pour tout x de D on a :

$$\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

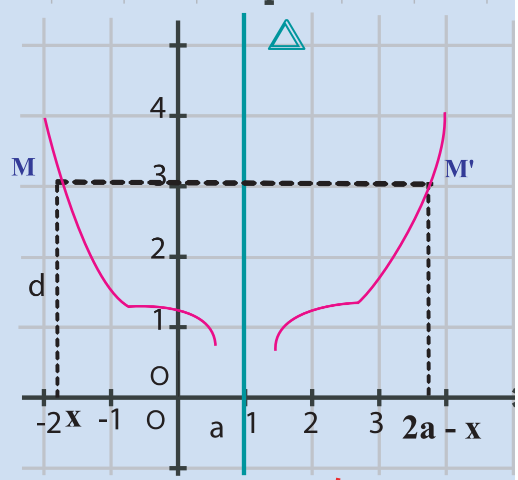
Sa courbe représentative dans un repère orthogonal admet la droite des ordonnées comme axe de symétrie.



Axe de symétrie

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et C_f sa courbe repésentative relativement à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$
La droite Δ d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe C_f ,si et seulement si pour tout $x \in D$
on a :

$$\begin{cases} (2a - x) \in D \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

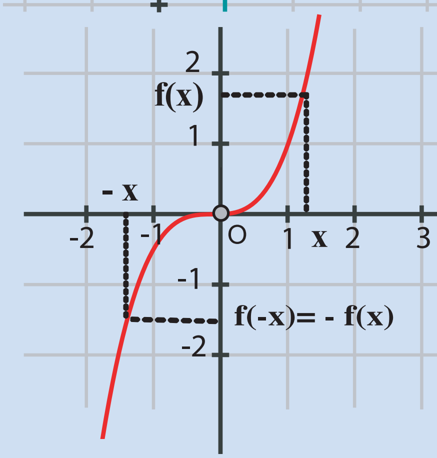


Fonction impaire

Soit f une fonction à variable réelle et D son ensemble de définition.
f est dite impaire si et seulement si pour tout x de D on a

$$\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

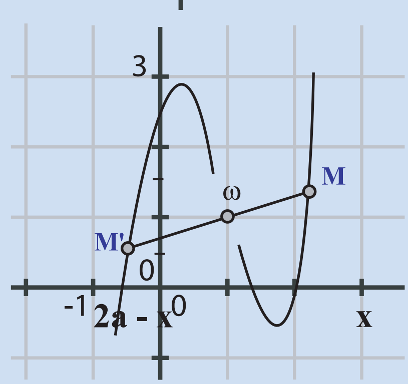
Sa courbe représentative admet l'origine des coordonnées comme centre de symétrie.



Centre de symétrie

Le plan est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
Soient I le point de coordonnées (a,b) et C_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur un ensemble D $\subset \mathbb{R}$.
Le point ω (a,b) est un centre de symétrie de la courbe C_f si et seulement si pour tout $x \in D$
on a :

$$\begin{cases} (2a - x) \in D \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$$



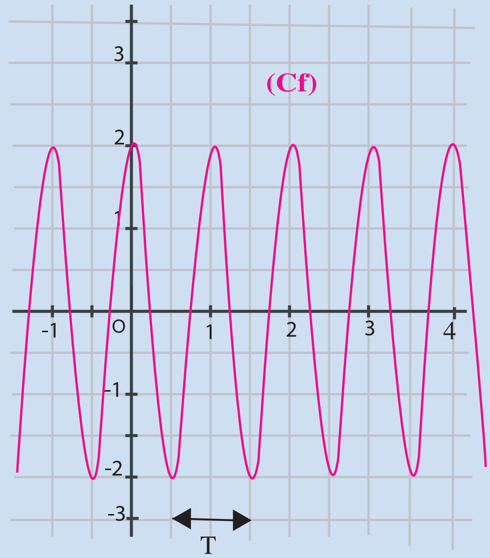
Périodicité

Soit f une fonction à variable réelle et D son ensemble de définition.
f est périodique s'il existe un réel non nul T tel que pour tout x de D on a :

$$\begin{cases} x+T \in D \\ f(x+T)= f(x) \end{cases}$$

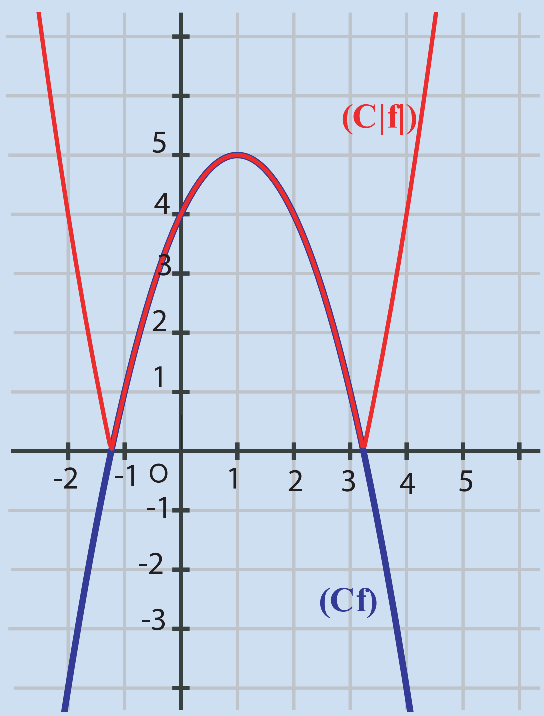
Le réel T est dit période de f

Sa courbe représentative dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$



Courbe représentative de $|f|$

La courbe représentative de $|f|$ s'obtient à partir de celle de f en conservant la partie de (C_f) dans le plan ($y \geq 0$) et en remplaçant la partie de (C_f) située dans le demi-plan ($y \leq 0$) par son symétrique par rapport à l'axe des abscisses.



1 Soit la fonction f définie par: $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que le point A(-1,-2) est un centre de symétrie pour (C).

c) Montrer que pour tout réel $x \neq -1$ on a: $f(x)= x-1+\dfrac{4}{x+1}$

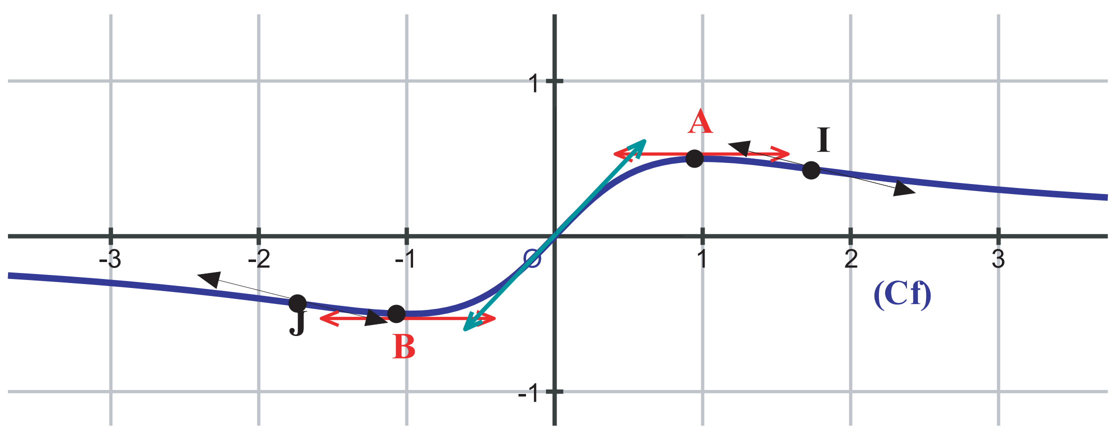
En déduire que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique dont on donnera l'équation.

Etudier la position de (C) par rapport à Δ .

d) Etudier les variations de f sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

e) Etudier les branches infinies et déterminer les asymptotes de (C_f).

2 Le schéma suivant est une représentation graphique d'une fonction f .



f présente un maximum au point A$(1,\frac{1}{2})$ et un minimum au point $B(-1,-\frac{1}{2})$.

1) Expliquer le fait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que les points O, I et J sont des points d'inflexion de la courbe (C_f).

b) Quelle est l'équation cartésienne de la tangente à (C_f) au point O ?

4) Sachant que $f(x)=\dfrac{x+a}{bx^2+c}$. Déterminer, en utilisant les données et les résultats précédents, les réels a, b et c.

5) Déterminer les coordonnées des points I et J.

$\boxed{3}$ Le mouvement d'un solide M, fixé à un ressort, est donné par $x(t) = \cos(2\pi t + \pi)$.
Vérifier que ce mouvement est périodique et déterminer sa période .

$\boxed{4}$ Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$.
a) Monter que f est une fonction paire.
b) Monter que f est périodique de période 4.
c) Tracer la courbe représentative de f sur $[0,2]$. En déduire la courbe de *f* sur $\mathbb{R}$.

II. Exemples de fonctions rationnelles.

Exemple 1:

On donne la fonction *f* définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-2x-3}$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
1) Déterminer l'ensemble de définition de *f*.
2) Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie pour la courbe (C_f).
3) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
4) Etudier les branches infinies de (C_f) sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
5) Tracer (C_f) sur $\mathbb{R}$.

Solution

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,3\}$
2) Pour montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie pour (C_f), on montre que : $2-x \in D_f$ *et* $f(2-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$

- $x \in D_f$ *alors* $x \neq -1$ *et* $x \neq 3$ *donc* $(-x) \neq 1$ *et* $(-x) \neq -3$
  d'où $2-x \neq 3$ *et* $2-x \neq -1$ donc $2-x \in D_f$

- $$f(2-x) = \frac{(2-x)^2-2(2-x)+2}{(2-x)^2-2(2-x)-3} = \frac{4-4x+x^2-4+2x+2}{4-4x+x^2-4+2x-3} = f(x)$$

3) $$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x-3)-(2x-2)(x^2-2x+2)}{(x^2-2x-3)^2} = \frac{10(1-x)}{(x^2-2x-3)^2}$$

Tableau de variation de *f* :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$
- $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{x^2-2x+2}{(x+1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{5}{4(x-3)} = +\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$

• Signe de la dérivée : $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1\text{-}x \leq 0$. D'où $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [1,+\infty[$.
D'où le tableau de variations de f sur $[1,+\infty[$.

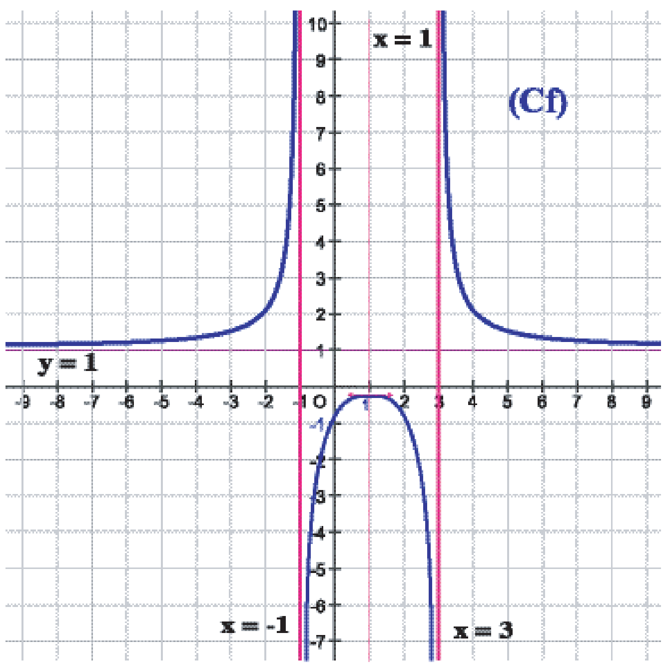
x	1		3		$+\infty$ 2
$f'(x)$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

4) Branches infinies de (C_f)
On a :

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Donc la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale pour (C_f) .

• $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$. Donc la droite d'équation $x=3$ est une asymptote verticale pour (C_f).

5) Courbe



Exemple 2 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Etudier la parité de f . Interpréter le résultat géométriquement.
3) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
   En déduire les asymptotes de f .
4) Etudier les variations de f .
5) Montrer que f admet un point d'inflexion .
6) Tracer (C_f) sur $\mathbb{R}$.

Solution

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$

2) $x \in D_f$ alors $x \neq -2 \; et \; x \neq 2$ donc $(-x) \neq 2$ *et* $(-x) \neq -2$ d'cù $-x \in D_f$

on a : $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 4} = -\dfrac{x}{x^2-4} = -f(x)$. Donc f est impaire .

<u>Interprétation géométrique</u> : L'origine du repère est un centre de symétrie pour (C_f).

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2}{4(x-2)} = -\infty$. De même $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

<u>Asymptotes :</u>

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale pour (C_f).

On a : $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$. Donc la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale pour (C_f).

De même la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale pour (C_f).

4) f est dérivable sur son ensemble de définition et on a :

$$f'(x) = \frac{1(x^2-4) - 2x.x}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = \frac{-(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$$

f'(x) est toujours négative. on en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

5) f' est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$ et on a :

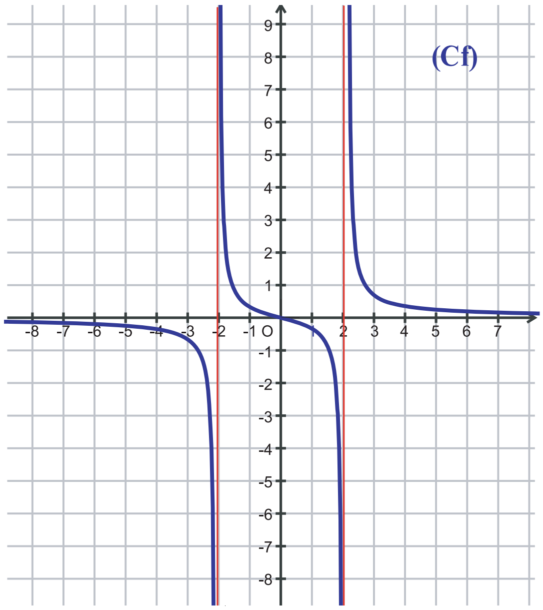
$$f''(x) = \frac{-2x(x^2-4)^2 - (-x^2-4)[2(x^2-4)(2x)]}{(x^2-4)^4} = \frac{-2x(x^2-4)[(x^2-4)+2(-x^2-4)]}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{-2x(x^2-4)(-x^2-12)}{(x^2-4)^4} = \frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

f'' s'annule et change de signe pour $x = 0$ et l'on a : $f(0) = 0$

Donc le point O(0,0) est un point d'inflexion pour (C_f).

6) Courbe



III. Exemples de fonctions de type $x \mapsto \sqrt{ax^2+bx+c}$

Exemple 1 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe (C_f).

4) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote pour (C_f) au voisinage de $+\infty$

b) étudier la position de (C_f) par rapport à (D).

c) Montrer que la droite (D') d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est une asymptote pour (C_f) au voisinage de $-\infty$. Etudier la position de (C_f) par rapport à (D').

5) Tracer la courbe (C_f).

Solution

$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

1) Le discriminant du polynôme $P(x) = x^2+x+1$ est $\Delta = -3$
donc $P(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'où $D_f = \mathbb{R}$.

2) On a: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

De même, puisque $P(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ d'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $2(-\frac{1}{2}) - x \in \mathbb{R}$,

On a : $f(2.(-\frac{1}{2}) - x) = f(-1 - x) = \sqrt{(-1-x)^2 + (-1-x) + 1}$ donc

$f(-1 - x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1 - x - 1 + 1} = \sqrt{x^2 + x + 1} = f(x)$.

donc la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour (C_f)

4) a) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x+\frac{1}{2})] = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - (x+\frac{1}{2}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{[\sqrt{x^2+x+1} - (x+\frac{1}{2})][\sqrt{x^2+x+1} + (x+\frac{1}{2})]}{\sqrt{x^2+x+1} + (x+\frac{1}{2})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+x+1) - (x+\frac{1}{2})^2}{\sqrt{x^2+x+1} + (x+\frac{1}{2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1} + (x+\frac{1}{2})} = 0 \quad .$$

On obtient $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x+\frac{1}{2})] = 0$

donc la droite (D) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique pour (C_f).

b) Position de (C_f) et (D).

Pour cela on étudie le signe de $f(x) - (x + \frac{1}{2})$ sur $\mathbb{R}_+$. On a :

$$f(x) - (x + \frac{1}{2}) = \sqrt{x^2+x+1} - (x+\frac{1}{2}) = \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - (x+\frac{1}{2}) > \left|x+\frac{1}{2}\right| - (x+\frac{1}{2}) \geq 0$$

d'où (C_f) est au dessus de (D).

c) De même $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (-x - \frac{1}{2})] = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} + (x+\frac{1}{2}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1} - (x+\frac{1}{2})}$

Le dénominateur de la dernière expression tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$

donc $\lim_{x\to-\infty} [f(x) + (x+\frac{1}{2})] = 0$ et par conséquent la droite (D') d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique pour (C_f).

Position de (C_f) et (D')

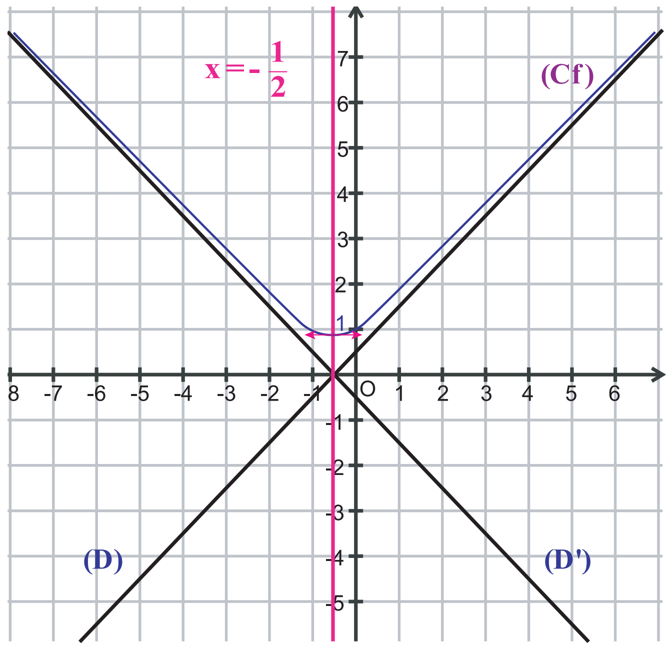
Pour cela on étudie le signe de $f(x) - (-x - \frac{1}{2})$ sur $\mathbb{R}_-$. On a :

$$f(x) - (-x - \frac{1}{2}) = f(x) + (x+\frac{1}{2}) = \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + (x+\frac{1}{2})$$

on a : $f(x) + (x+\frac{1}{2}) > \left|x+\frac{1}{2}\right| + (x+\frac{1}{2}) \geq 0$

et par suite (C_f) est au dessus de l'asymptote (D').

5) Courbe (C_f).



Exemple 2 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 2x + 4}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour (C_f). En déduire le domaine d'étude de f.

3) Etudier la dérivabilité de f au point 2. Interpréter géométriquement le résultat.

4) Dresser le tableau de variation de f sur $[\frac{1}{2}, 2]$.

5) Tracer la courbe (C_f).

Solution

1) On étudie le signe de $P(x) = -2x^2 + 2x + 4$.

Les racines de P sont -1 et 2 , d'où le tableau de signe de $P(x)$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où $D_f = [-1,2]$.

2) Il faut vérifier que si $x \in [-1,2]$ alors $(1-x) \in [-1,2]$.

On a : $-1 \leq x \leq 2$ donc $-2 \leq -x \leq 1$ d'où $-1 \leq 1-x \leq 2$ d'où $(1-x) \in [-1,2]$

On a : $f(2.(\frac{1}{2}) - x) = f(1-x) = \sqrt{-2(1-x)^2 + 2(1-x) + 4}$. Donc

$f(1-x)=\sqrt{-2+4x-2x^2+2-2x+4}=\sqrt{-2x^2+2x+4}=f(x)$

donc la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour (C_f).

On pourra étudier alors f sur $[\frac{1}{2}, 2]$.

3) On a :

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{-2x^2+2x+4}}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{2}\sqrt{-x^2+x+2}}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{2}\sqrt{-(x-2)(x+1)}}{x-2}=$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{2}\sqrt{(2-x)(x+1)}}{-(2-x)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{2}\sqrt{2-x}\sqrt{x+1}}{-(\sqrt{2-x})^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{2}\sqrt{x+1}}{-\sqrt{2-x}}=-\infty$$

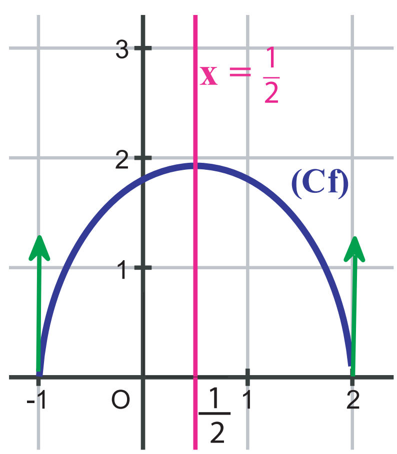
donc f n'est pas dérivable à gauche en 2 et (C_f) admet au point d'abscisse 2 une demi- tangente verticale.

4) f est dérivable sur $[\frac{1}{2}, 2[$ et on a : $f'(x)=\dfrac{-4x+2}{2\sqrt{-2x^2+2x+4}}=\dfrac{-2x+1}{\sqrt{-2x^2+2x+4}}$

$f'(x)$ a le même signe que $(-2x+1)$. D'où le tableau de variation :

x	$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$	0	$-$	||
$f(x)$	2	$\searrow$	0

5) Courbe



1 f étant une fonction , C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé et Δ étant une droite d'équation $x = a$, montrer que Δ est un axe de symétrie pour C_f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-4}{4x^2+8x+5}$; $a=-1$

b) $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$; $a=2$

c) $f(x)=\sin x$; $a=\dfrac{\pi}{2}$

2 Montrer que C_f admet le point A comme centre de symétrie dans chacun des cas suivants

a) $f(x)=\sin x$; $A(\pi,0)$

b) $f(x)=x^3+3x^2+x-1$; $A(-1,0)$.

c) $f(x)=x^3+2$; $A(0,2)$.

3 Déterminer dans chacun des cas suivants les branches infinies de la courbe représentative de f et déterminer leur nature.

a) $f(x)=\dfrac{3}{x^2-5x+6}$

b) $f(x)=\dfrac{4x-2}{x-1}$

c) $f(x)=\dfrac{2x^2-x+5}{x}$

d) $f(x)=x\sqrt{x-1}$

e) $f(x)=x+2-\dfrac{1}{x-2}$

f) $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x+5}{x+1}$

g) $f(x)=\sqrt{4x+2}$

h) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$

4 Montrer que la courbe représentative de f admet la droite D pour asymptote oblique dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x+2}$ $\qquad D : y=2x-3$

b) $f(x)=\dfrac{(x-2)^2-x+1}{x-2}$ $\qquad D : y=x-3$

c) $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2+x-5}{x^2+1}$ $\qquad D : y=2x+1$

d) $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ $\qquad D : y=x+2$

5 On donne la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{4x^2+4x+5}$, sa courbe représentative (C_f) dans un repère orthogonal et les droites $D : y = 2x + 1$ et $D' : y = -2x - 1$

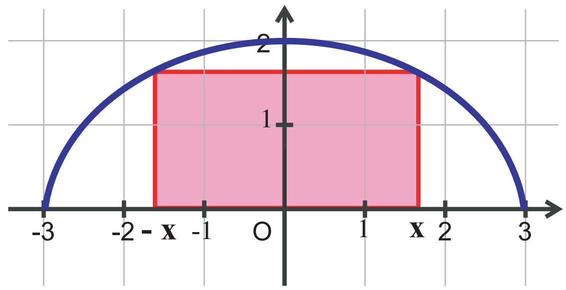
a) Démontrer que ces droites sont des asymptotes pour la courbe (C_f).

b) Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a : $4x^2 + 4x + 5 \geq (2x+1)^2$
En déduire la position de C_f par rapport à D et D'.

c) Etudier les variations de f.

d) Tracer D , D' et (C_f).

Apprendre à chercher



Situation 1

La courbe suivante est la moitié d'une ellipse.
Elle représente la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

On construit sur cette courbe un rectangle comme l'indique la figure.

1) Montrer que l'aire *A(x)* de ce rectangle est égale à $\frac{4}{3}x\sqrt{9-x^2}$

2) Etudier les variations de la fonction *A* et dresser son tableau de variations.

En déduire la valeur de x pour laquelle cette aire est maximale.

Situation 2

La période d'un pendule formé d'une tige homogène de masse m , de longueur l , mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire à la tige en un point situé à la distance x du centre de gravité est :

$$T(x)=cm\sqrt{\frac{l^2}{12x}+x} \quad \text{où } c \text{ est une constante telle que } \quad c\approx 0{,}64$$

1) Déterminer *T(x)* dans le cas où $m = 1Kg$ et $l=\sqrt{12}$.

2) On donne la fonction *f* définie $]0,\ +\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$.

a) Vérifier que: $f'(x)=\frac{x^2-1}{2x^2f(x)}$

b) Dresser le tableau de variations de *f* .

c) En déduire, pour $m = 1Kg$ et $l=\sqrt{12}$, la valeur de x pour laquelle $T(x)$ est minimale.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement le résultat.

4) Tracer la courbe (C_f).

Avec l'outil informatique

Leonhard Euler (Bâle, 1707-Saint Pétersbourg, 1783

Situation (Méthode d'Euler)

Soit f une fonction vérifiant $f(1) = 0$ et, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Avec l'approximation $f(a+h) \approx f(a)+f'(a)h$ on obtient une valeur approchée de $f(x)$ pour certains x et h voisin de zéro, puis on construit la courbe (C_f).

Avec **un tableur**, on introduit les valeurs initiales dans la ligne 3 :
$\boxed{1}$ en A3, $\boxed{1}$ en B3, $\boxed{0,01}$ en C3 et $\boxed{0}$ en D3
et **les formules :**

$\boxed{= A3+\$C\$3}$ en A4

$\boxed{= 1/A4}$ en B4

$\boxed{= D3+\$C\$3}$ en A4

La fonction f, décrite dans cette situation, est appelée fonction logarithme népérien Calculatrice touche : ln

	A	B	C	D
1–2	x	f '(x) = 1/x	pas : h	valeur approché de f(x)
3	1	1	0,01	0
4	1,01	0,99009901		0,01
5	1,02	0,98039216		0,01990099
6	1,03	0,97087379		0,029704912
7	1,04	0,96153846		0,03941365
8	1,05	0,95238095		0,049029034
9	.	.		.
10	.	.		.
11	.	.		.

Enfin, on étend ces trois formules jusqu'à la ligne 500.

Courbe (C_f)

Ensuite après avoir sélectionné les séries A3-A500 et D3-D500, l'assistant graphique nous livre la courbe approchée ci-dessous :
(Choisir Nuages de points puis l'option nuage de points avec lissage sans marquage des données cliquer sur Suivant)

1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{-x^3+5x}{x^2+3}$$

et (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité de longueur 1 cm.

1) a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x)=ax+\frac{bx}{x^2+3}$$

b) Montrer que f est impaire.

2) a)Montrer que $f'(x)=\dfrac{(x^2+15)(1-x^2)}{(x^2+3)^2}$

b) étudier les variations de f. Dresser son tableau des variations.

3) Soit D la droite d'équation $y=-x$. Montrer que D est asymptote à (C). Etudier la position relative de la courbe (C) et de la droite D.

4) Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

a) écrire l'équation réduite de T.

b) étudier la position relative de la courbe (C) et de la droite T.

5) Construire D, T et (C). On précisera les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

6) a) Tracer la courbe(C') image de (C) par la translation de vecteur $2\vec{j}$.

b) En déduire l'expression de la fonction g qui admet (C') pour représentation.

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par :

$$f(x)=\frac{2x^2-5x+2}{3x}$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Etudier la fonction f (limites aux bornes, dérivée et sens de variations).

On ne demande pas de construire la courbe dans cette question.

2) a) Montrer que, pour tout x non nul

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{3x}$$

où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

b) En déduire que la droite d'équation $y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ est asymptote à la courbe C.

3) a) Déterminer les coordonnées du point I, point d'intersection des deux asymptotes à la courbe C.

b) Montrer que I est le centre de symétrie de la courbe C.

4) On désigne par A et B les points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

a) Déterminer les coordonnées de A et B.

b) Déterminer les équations des tangentes à C en A et en B.

c) Calculer les coordonnées du point D, intersection des deux tangentes trouvées en (D. b)

5) a) Tracer la courbe C dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

Construire sur le même graphique les asymptotes, les tangentes en A et en B et le point D.

b) Montrer que le triangle ABD est rectangle en D.

c) Calculer, en cm², l'aire du triangle ABD.

3 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\,;\,5\}$,

par $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x-10}$

1) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-2\,;\,5\}$

on a : $f(x)=a+\dfrac{b}{x+2}+\dfrac{c}{x-5}$

où a, b et c sont des réels à déterminer.

2) Etudier les variations de f ; dresser son tableau des variations. On précisera les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) Soit C la courbe représentative de f, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

a) Montrer que C possède trois asymptotes dont on donnera des équations.

b) étudier la position relative de C par rapport à son asymptote horizontale.
Préciser en particulier les coordonnées du point I, où C coupe son asymptote horizontale.
c) Déterminer l'équation réduite de la droite T, tangente à C au point I.
d) T coupe C en un point J. Déterminer les coordonnées de J.
e) Construire C, T et les trois asymptotes à C.

4 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur IR par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{2x}{x^2 + 1}$$

On désigne par C la courbe représentativede f dans v 0 0
un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
1) Etudier la fonction f.
2) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe C.
3) Montrer que le point I (0 ; -1) est centre de symétrie de la courbe C.
4) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C en I, puis préciser la position de la courbe C par rapport à T.
5) Déterminer les points A et B de la courbe C, où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x - 2$.
6) Montrer que, pour tout x réel :

$$x - 2 \leq f(x) \leq x.$$

7) Tracer la courbe C, la tangente T, ainsi que les deux droites D et D' d'équations

$$y = x - 2 \quad \text{et} \quad y = x$$

5 Soit les fonctions f *et* g :

$$f(x) = x^3 - 3x \quad et \quad g(x) = x - \frac{4}{x}$$

et leurs courbes représentatives C_f et C_g dans un repère orthonormé.
1) Résoudre le système $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$

En déduire que C_f et C_g se coupent en deux points A et B en lesquels elles admettent la même tangente (C_f et C_g sont «tangentes» en A et B).
2) Etudier les positions relatives de C_f et C_g par rapport à ces tangentes.
3) Etudier la position de C_g par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ et montrer que Δest asymptote à C_g.
4) Etablir les tableaux de variations de f et g, puis tracer C_f et C_g.

6 Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$$

On appelle C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.
1) Déterminer les limites aux bornes de l'intervalle. Qu'en déduit-on pour la courbe C_f ?
2) Montrer que C_f admet une asymptote Δ d'équation $y = 2x + 1$. étudier les positions relatives de la courbe C_f et de la droite Δ.
3) Calculer la dérivée de la fonction f .Etudier les variations de f. La fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ?
4) Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f parallèle à la droite d'équation $y = 1 - 2x$.
5) Tracer la courbe C_f, la tangente T et la droite Δ sur le même graphique. (unités graphiques : 2cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées)
6) Soit C' image de C_f par la symétrie d'axe (Oy). Tracer C' et déterminer la fonction correspondante.

7 Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x + 1}.$$

On appelle C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1) a) Déterminer, $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ Qu'en déduit-on pour la courbe C_f ?

b) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2) a) Montrer que la courbe C_f admet une asymptote Δ d'équation $y = -x + 3$.

b) étudier les positions relatives de la courbe C_f et de la droite Δ .

3) Calculer la dérivée de la fonction f . étudier les variations de f.

4) Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1

5) Tracer la courbe C_f , la tangente T et la droite Δ sur le même graphique.

6) On considère la fonction g telle que

$$g(x) = \frac{-x^2 + 6x - 7}{x - 1} \text{ pour ; } x > 1$$

Montrer que C_g est l'image de C_f par la translation de vecteur $2\vec{i}$. Tracer alors C_g.

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que C_f admet un point d'inflexion I que l'on déterminera.

c) Prouver que I est un centre de symétrie de C_f.

2) a)Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point I.

b) Etudier la position relative de C_f par rapport à T.

3) Tracer C_f .

4)En utilisant la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$, prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]1;2[$.

5) a)Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J qu'on précisera.

b)Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c)Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère que f.

d)Déterminer D le domaine de dérivabilité de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x \in D$ par deux méthodes.

9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 6x + 4}$$

Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$

on a $f'(x) = 3\left(\frac{x(x-2)}{3x^2 - 6x + 4}\right)^2$

2) En écrivant,

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{4}{3x^2 - 6x + 4}\right)^2$$

calculer $f''(x)$. En déduire les points d'inflexion de C_f.

3) Trouver les réels a, b, c et d tels que pour

tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{3x^2 - 6x + 4}$

4) Montrer que C_f admet une asymptote oblique Δ qu'on déterminera.

Etudier la position relative de C_f par rapport à Δ.

5) Montrer que I(1,1) est un centre de symétrie de C_f.

6) Ecrire une équation de T la tangente à C_f au point I.

Etudier la position de C_f par rapport à T.

7) Tracer Δ, T et C_f.

8) a) Prouver que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

On notera $g = f^{-1}$.

b) Etudier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$.

c) Ecrire une équation de T' la tangente à C_g au point I.

d) Tracer T' et C_g dans le même repère.

10 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \sqrt{1+(x+1)^2} - x$$

1) a) Montrer que

$g'(x) < 0$ pour tout $x \leq -1$.

b) Montrer que pour tout $x \geq -1$, on a

$0 \leq x+1 \leq \sqrt{1+(x+1)^2}$. En déduire que $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \geq -1$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

d) Dresser le tableau de variation de g.

2) a) Montrer que la droite D: $y = -2x-1$ est une asymptote oblique à C_g au voisinage de $-\infty$

b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente à C_g au point d'abscisse -1.

Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution réelle α et vérifier que $\alpha \in]1,2[$.

3) a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c) Calculer de deux manières différentes

$$\left(g^{-1}\right)'(2)$$

4) Tracer les courbes représentatives de g et g^{-1} dans un autre repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

11 On considère la fonction f définie pour tout réel x appartenant à

$]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;1[\,\cup\,]1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$$

On note C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Montrer que pour tout réel $x \neq -1$ et $x \neq 1$,

on a : $f(x) = a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$ où

a, b et c sont des réels que l'on déterminera.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) Déterminer la dérivée de f, étudier son signe et donner le tableau des variations de f.

4) Préciser les asymptotes à C_f. Tracer la courbe C_f et ses asymptotes. (unité 1 cm)

5) Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.

Tracer T sur le dessin précédent.

6) Montrer que la courbe C_f a pour centre de symétrie le point I de coordonnées (0 ; 3).

12 **1)** Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$, le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x-y+z = 8 \\ 16x+4y+z = 3 \end{cases}$$

2) Soit $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$

Trouver les réels a ,b et c tels que $f(1) = 0$

$f(-1) = \sqrt{8}$ *et* $f(4) = \sqrt{3}$.

3) On donne par la suite $a = 1$, $b = -4$ *et* $c = 3$

a) Montrer que $D_f =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$.

b) Calculer $f(4-x)$. En déduire que la droite $x = 2$ est un axe de symétrie à la courbe (C_f).

c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote de (C_f) au voisinage de $+\infty$

d) Etudier les positions relatives de (C_f) et (D).
4) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 3.
b) Vérifier que le signe de f' est celui de $(x - 2)$ et dresser le tableau de variation de f.
5) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé.

13 **1)** Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$, le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ 9x - 3y + z = 5 \end{cases}$$

2) Soit $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + 2}$, $x \neq -2$

Trouver les réels a, b et c tels que :

$f(1) = \dfrac{1}{3}$, $f(-1) = -1$ et $f(-3) = -5$.

3) On donne par la suite $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$.
a) Vérifier que : $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+2}$
b) Montrer que le point I(-2,-3) est un centre de symétrie de la courbe (C_f).
c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x-1$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.
Etudier les positions relatives de (C_f) et (D).
4) a) Vérifier que $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$
b) Dresser le tableau de variation de f
5) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé.

14 Soit $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$. On désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
1) a) Montrer que f est définie sur

$$I =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
c) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 et à droite en 1, interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2) a) Montrer que :
$f'(x) > 0$ *si* $x > 0$ et $f'(x) < 0$ *si* $x < 0$.
b) Dresser le tableau de variation de f
c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique pour C
d) Etudier la position de (C) et (D).
3) a) Montrer que la restriction g de f sur $[1,+\infty[$ est une bijection.
Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in [1,+\infty[$
b) Tracer (C), (D) et $(C_{g^{-1}})$.

15 On considère, dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1. Soit A le point de coordonnées (1; 0) et A' le point de coordonnées (-1 ; 0).
1) Pour tout point H du segment [AA'], distinct de A et de A', on mène la perpendiculaire Δ
à la droite (AA').
La droite Δ coupe le cercle (Γ) en M et M'.
On pose $OH = x$. Calculer en fonction de x l'aire du triangle AMM'.
2) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$$

Etudier les variations de f.
Montrer que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.

16 f est la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 1}$$

1) a) Vérifier que pour tout x de $]1\,,+\infty[$:

$$f(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 - 1}$$

b) Etudier les limites de f en 1 et en $+\infty$.
2) Soit C la courbe de f et P la courbe de la fonction g définie sur $]1\,,+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1$.
Quelle est la limite de $f(x) - g(x)$ quand x tend vers $+\infty$?
Etudier la position de C par rapport à P.
3) Calculer la dérivée de f et étudier les variations de f.
4) Représenter graphiquement P et C.

Jean-Baptiste Fourier (qu'on connait aussi sous le nom de Joseph Fourier) est né le 21 mars 1768 à Auxerre. Il est le douzième des quinze enfants de son père. Alors qu'il n'a que 10 ans, il perd ses parents et est placé à l'école militaire d'Auxerre. Il réalise des études prometteuses en Français et en latin, mais son intérêt se porte, sur les mathématiques. Il lit notamment les 6 tomes du Cours de mathématiques de Bezout. Il rentre ensuite au séminaire, mais n'a pas vraiment la vocation et il retourne en 1789 enseigner à son ancienne école à Auxerre.

En 1794, il est de la première promotion de l'Ecole Normale Supérieure, où ses professeurs ont pour nom Lagrange, Laplace et Monge. Elève le plus brillant, il profite de cet excellent entourage pour s'investir beaucoup dans la recherche mathématique. En 1797, il remplace Lagrange à la chaire d'analyse et de mécanique de l'Ecole Polytechnique, bien qu'il n'ait pas encore à son actif de découverte majeure.

Quand Fourier regagne la France en 1801, Napoléon n'a pas oublié ses excellents états de service, et le nomme préfet de l'Isère, sans que l'on sache si Fourier lui-même désirait ce poste. Il reste que Fourier fut un excellent préfet, qui mena à bien plusieurs projets d'importance. C'est à Grenoble que Fourier réalise l'essentiel de ses travaux les plus importants. Son obsession est le problème de la chaleur, c'est-à-dire l'étude de l'évolution de la température d'un corps au cours du temps. De 1802 à 1807, il trouve l'équation de la propagation de la chaleur dans les corps solides, puis trouve une méthode pour la résoudre, ce qui est maintenant l'analyse de Fourier. Fourier décompose une fonction mathématique unique, mais difficile à décrire mathématiquement, en une somme infinie de fonctions en sinus et en cosinus. Il est alors plus facile de décrire au cours du temps l'évolution de chacune de ces fonctions, et de retrouver la température au temps t en refaisant la somme.

Chapitre 6

LOGARITHME NEPERIEN

I . Définition et propriétés.

II . Encadrement de $ln(1+x)$ par des polynômes.

III . Etude de la fonction logarithme népérien.

IV . Calcul de limites.

V . Etude d'exemples de fonctions de type $x \mapsto ln(u(x))$

VI . Fonction logarithme décimal.

Al Khawarezmi

Le mot LOGARITHME est une déformation du mot ALGORITHME qui lui même provient du nom du célèbre mathématicien arabe

I. Définition et propriétés :

Activités de découverte

Activité 1 :

Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$x \longmapsto x^2$; $x \longmapsto \frac{1}{x^4}$; $x \longmapsto x^{-3}$; $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ *et* $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ .Etudier le cas $n = -1$

Activité 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

f est continue sur $\mathbb{R}^*_+$ et l'on a $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^*_+$

Elle admet donc des primitives définies sur $\mathbb{R}^*_+$. Parmi ces primitives une seule prend la valeur 0 pour $x = 1$. Cette primitive est appelée fonction **logarithme népérien.** On la note ***ln***

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction ln.

b) Déterminer $ln(1)$.

c) Etudier la continuité de la fonction ln.

d) Sachant que $(ln)'(x) = \frac{1}{x}$, déterminer le sens de variation de la fonction logarithme népérien sur $]0,+\infty[$

e) Comparer $ln\,x$ et $ln 1$ dans chacun des cas $0 < x < 1$ et $x > 1$

f) Montrer que la fonction ln réalise une bijection de l'intervalle $]0,+\infty[$ sur l'intervalle image.

En déduire que l'on a : $ln\,a = ln\,b \Leftrightarrow a = b$; $a > 0$ et $b > 0$

$$ln\,(a) < ln(b) \Leftrightarrow a < b \;;\; a > 0 \text{ et } b > 0$$

Activité 3 :

Soit $k > 0$. on considère la fonction f définie par : $f(x) = ln\,kx$

a) Déterminer le domaine de définition de f et calculer $f'(x)$.

b) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(x) = ln\,x + \alpha$.

Déterminer α . En déduire que pour tout $x > 0$ et $y > 0$ on a : $ln\,x + ln\,y = ln\,(x\,y)$

c) En déduire que pour tout $x > 0$ et $y > 0$ on a :

$$ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln(x) \;,\; ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y) \;,\; ln(x^n) = n\,ln(x) \;,\; (n \in \mathbb{Z}) \quad et \quad ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}ln(x)$$

Activité 4 :

1) On considère la fonction définie par $f(x) = ln\,(2x - 3)$.

Déterminer l'ensemble de définition de f

Calculer $f'(x)$.

2) Soit la fonction g définie par $g(x) = ln\,|2x - 3|$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g

b) Calculer $g'(x)$ dans chacun des cas suivants : $x > \frac{3}{2}$, $x < \frac{3}{2}$. Que remarque-t-on ?

3) Soit h la fonction définie sur $]-\infty, \frac{3}{2}[$ par $h(x) = \frac{2}{2x - 3}$

Déterminer la primitive de h qui s'annule pour $x = 0$

A retenir

Définition

La fonction logarithme népérien, notée *ln* ou *Log* , est la primitive de la fonction

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1.

$$(ln)'(x)=\frac{1}{x} \quad , x>0\ ; \qquad ln(1)=0.$$

Propriétés

Pour tous réels $x>0$ et $y>0$ on a :

$$ln(x)=ln(y) \Leftrightarrow x=y$$
$$ln(x)<ln(y) \Leftrightarrow x<y$$

En particulier

$$ln(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$
$$ln(x)>0 \Leftrightarrow x>1$$
$$ln(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<1$$

Propriété fondamentale

Pour tous réels $x>0$ et $y>0$ on a : $ln(xy)=ln(x)+ln(y)$

Conséquences

$$ln\left(\frac{1}{x}\right)=-ln(x)$$

$$ln\left(\frac{x}{y}\right)=ln(x)-ln(y),$$

$$ln(x^n)=n\,ln(x) \quad (n\in\mathbb{Z})$$

$$ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}ln(x)$$

Théorème

Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I

La fonction $ln \circ u$ est dérivable sur I et l'on a : $(ln \circ u)'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Conséquence

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$

Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I est de la forme $x \longmapsto ln\,|u(x)|+k$

Calculatrice : utiliser la touche ln

1 a) A l'aide d'une calculatrice donner une valeur approchée à 10^{-4} près de $ln\ 2$ et $ln\ 5$.

b) En déduire une valeur approchée de $ln\ 4$, $ln\frac{1}{5}$, $ln\ (2{,}5)$ et $ln\ 10$.

2 Exprimer en fonction de $ln\ 2$ ou $ln\ 3$ les réels suivants :

$x = ln\ 8$; $y = ln\ \frac{1}{3}$

$z = ln\ 18 - 3\ ln\ 2$; $t = 3\ ln\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $u = ln\ 15 + 2\ ln\ 10 - ln\ 125$.

3 Simplifier

$x = ln\ 36 - 2(ln\ 2 + ln\ 3)$ et $y = 2\ ln\ \frac{7}{3} + 2\ ln\ 35 - 2\ ln\ 5 - ln\ \frac{1}{9}$.

4 Simplifier

$a = 2\ ln\ (2+\sqrt{3}) + ln(7 - 4\sqrt{3})$ et $b = ln\frac{1}{2} + ln\frac{2}{3} + ln\ \frac{3}{4} + ln\ \frac{4}{5}$.

5 x, y et z sont des réels strictement positifs.

Ecrire en fonction de $ln\ x$, $ln\ y$ et $ln\ z$ les réels suivants :

$A = \frac{1}{5} ln\, x^{10}$, $B = ln(\frac{x}{y}) - ln(\frac{z}{y})$ et $C = ln(\frac{x^5}{y^4})$

6 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $ln\ (3x - 2) = 2ln\ x$.

7 Résoudre, dans $\mathbb{R}$,l'inéquation $ln\ (x + 1) > 0$.

8 Calculer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=ln(x^2-1)$ b) $f(x)=ln|cos x|$

c) $f(x)=ln(\sqrt{x^2+1})$

9 Calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\frac{1}{x-3}$ b) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

c) $f(x)=tan\, x$ d) $f(x)=\frac{1}{x\, ln\, x}$

II. Encadrement de *ln (1+x)* par des polynômes.

Activité:

On donne la fonction f telle que $f(x)= \ln(1+x) - (x-\frac{x^2}{2})$, $x > -1$.

a) Montrer que $f'(x) = \frac{x^2}{x+1}$

b) En appliquant le théorème des accroissent finis à f sur l'intervalle $[0 , x]$ montrer qu'il existe un réel $c \in]0 , x[$ tel que $ln(1+x)-(x-\frac{x^2}{2})=\frac{x c^2}{1+c}$

c) En déduire que pour tout $x > 0$, on a $x-\frac{x^2}{2} \leq ln(1+x) \leq x-\frac{x^2}{2}+x^3$

d) **Application**

Donner une valeur approchée de $ln\,(1{,}1)$ à 10^{-3} près.

Donner une valeur approchée de $ln\,(1{,}3)$ à 10^{-2} près.

III. Etude de la fonction logarithme népérien

Activité 1 :

La fonction logarithme népérien est définie et continue sur $]0 , +\infty[$.
Compléter le tableau suivant :

x	100	10000	10^{13}	10^{24}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}
$ln\,x$							

On peut voir que $ln\,x$ prend des valeurs de plus en plus grandes lorsque x devient de plus en plus grand. On admet que $ln\,x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} ln\,x=+\infty$$

Activité 2 :

En posant $X=\frac{1}{x}$ et en utilisant $\lim_{X\to +\infty} ln\,X=+\infty$, montrer que : $\lim_{x\to 0^+} ln\,x=-\infty$

Activité 3 :

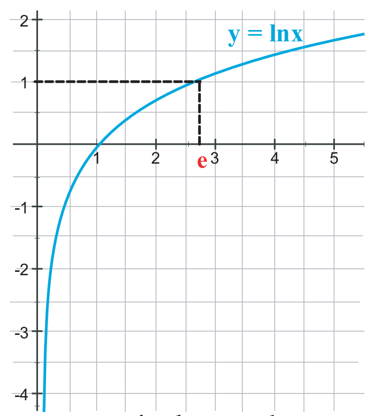
On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = ln\,x - \sqrt{x}$.
a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 4$.
b) Donner une valeur approchée de $f(4)$. En déduire que $0 \leq ln\,x \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \geq 4$

c) Montrer alors que $\lim_{x\to +\infty} \frac{ln\,x}{x}=0$

Courbe représentative de la fonction logarithme népérien

Sachant que $(ln)'(x)=\frac{1}{x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$, et en tenant compte des résultats des activités 1 et 2 précédentes, on peut dresser le tableau de variations de la fonction *ln* et tracer sa courbe représentative.

x	0		$+\infty$
$ln'(x)$		+	
$ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



Cette courbe admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale, et admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de l'axe des abscisses.
Comme la fonction *ln* réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, l'équation $ln\, x = 1$ admet une unique solution notée ***e***.

on a : $\boldsymbol{e = 2{,}718281828\ldots}$ **et** $\boldsymbol{ln\, e = 1}$

Activité 4 :

Calculer $ln\, e^8$, $ln\, e^3$, $ln\,\frac{1}{e^2}$ et $ln\, e^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) et $ln\sqrt{e}$

En déduire la résolution des équations suivantes :

$ln\, x = 3$, $ln\, x = 8$, $ln\, x = -2$ et $ln\, x = n$, ($n \in \mathbb{Z}$) et $ln\, x = \frac{1}{2}$.

A retenir

La fonction logarithme népérien est telle que :

$$\lim_{x\to+\infty} ln\, x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} ln\, x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{ln\, x}{x} = 0$$

Elle définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
Le réel e est l'unique solution de l'équation $ln\, x = 1$.
On a : $e = 2{,}718281828\ldots$; $ln\, e = 1$
Pour tout entier relatif n
l'équation $ln\, x = n$ admet pour unique solution le réel e^n.
$(ln\, x = n \Leftrightarrow x = e^n)$

Applications

1 Simplifier les écritures suivantes :

$A = \ln e^5 - \ln e^3$ $\qquad B = \ln(e^{-3})$

$C = \ln 2 + \ln(8e) - \ln(4e^3)$ $\qquad D = \ln\left(\frac{1}{e^3}\right) - \left(\ln \frac{1}{e^3}\right)^3$

2 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $\ln(5 - x) = 2$ $\qquad$ b) $\ln \frac{x-2}{2x+1} = 0$ $\qquad$ c) $(\ln x)^2 + 3\ln x + 2 = 0$.

IV. Calculs de limites.

Activités de découverte

Activité 1:

Calculer le nombre dérivé de la fonction *ln* en 1. En déduire la valeur de chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$$

Activité 2 :

a) En posant $X = \frac{1}{x}$ et sachant que $\lim_{X\to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$. Montrer que $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

et en déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$

b) En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0$

Activité 3 :

a) Sachant que $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

b) En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

A retenir

La fonction logarithme népérien est telle que :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0 \quad (n \geq 2) \qquad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Exemples de calcul de limites

Exemple 1 : Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x-1)}{2x+1}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x-1)}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x-1)}{x-1} \cdot \dfrac{x-1}{2x+1}$

En posant $x - 1 = X$ on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{ln\,X}{X} = 0$

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x-1)}{2x+1} = 0.$

Exemple 2: Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(ln\,x)^3}{x}$

On pose $x = X^3$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(ln\,x)^3}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{(ln\,X^3)^3}{X^3} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{(3ln\,X)^3}{X^3} = \lim\limits_{X\to+\infty} 27(\dfrac{ln\,X}{X})^3 = 0$

Exemple 3: Calcul de $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{ln(x^2+x+1)}{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{ln(x^2+x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{ln(x^2+x+1)}{x+x^2} \cdot \dfrac{x+x^2}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{ln(x^2+x+1)}{x+x^2} .(1+x)$

En posant $x + x^2 = u$, u tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Donc $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{ln(x^2+x+1)}{x} = \lim\limits_{u\to0} \dfrac{ln(1+u)}{u} . \lim\limits_{x\to0} (1+x) = 1 . 1 = 1$

Applications

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - x$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x}$

c) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x^2} + \ln x$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2x^2+x+1)}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^3}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \ln x$

V. Etude d'exemples de fonctions de type $x \mapsto ln(u(x))$.

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = ln(x^2 - 4x + 3)$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) a) Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

c) En déduire les branches infinies de (C_f) .

3) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4) Tracer (C_f) .

Solution

1) f est définie pour tout réel x tel que $x^2 - 4x + 3 > 0$.

On a $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ donc $D_f = \left]-\infty,1\right[\cup \left]3,+\infty\right[$.

2) a) Limites aux bornes de l'ensemble de définition. On a :

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} ln(x^2-4x+3) = -\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to1^-}(x^2-4x+3) = 0^+$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+} ln(x^2-4x+3) = -\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to3^+}(x^2-4x+3) = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} ln(x^2-4x+3) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty}(x^2-4x+3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} ln(x^2-4x+3) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to-\infty}(x^2-4x+3) = +\infty$$

b) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-4x+3)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{lnx^2}{x} + \frac{ln(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})}{x}\right)$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 2\dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1-\frac{x}{4}+\frac{3}{x^2})}{x} = 0$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2} = 1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0.$

En utilisant le même procédé, on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2ln|x|}{x} + \dfrac{ln(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})}{x} = 0\right)$

c) De ce qui précède, on déduit que *(C_f)* admet deux asymptotes verticales qui sont les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors *(C_f)* admet deux branches paraboliques de direction asymptotique celle de la droite des abscisses, respectivement au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

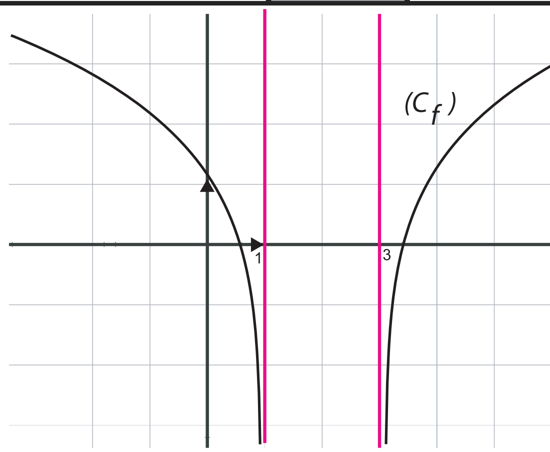
3) f est dérivable sur D_f et on a : $f'(x) = \dfrac{2x-4}{x^2-4x+3}$.

Pour étudier le signe de $f'(x)$ il suffit d'étudier le signe de $(2x-4)$ car $(x^2 - 4x + 3) > 0$ pour tout $x \in D_f$. Sachant que $(2x-4) \geq 0$ pour tout $x \geq 2$ et $(2x-4) \leq 0$ pour tout $x \leq 2$.

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$ $-$ 1		3 $+$ $+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

4) Courbe



Exemple 2

On donne la fonction f telle que $f(x) = ln\left|\frac{x-4}{x}\right|$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Monter que la courbe admet le point I(2,0) comme centre de symétrie.

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement le résultat.

4) Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f sur $]-\infty, 2]$.

5) Tracer (C_f).

Solution

1) $\left|\frac{x-4}{x}\right| \geq 0$, donc $ln\left|\frac{x-4}{x}\right|$ est définie pour $x \neq 0$ et $x \neq 4$, d'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0,4\}$

2) I (2,0) est un centre de symétrie , si et seulement si on a :

$$\begin{cases} x \in D_f \Rightarrow (4-x) \in D_f \\ f(4-x) = -f(x) \end{cases}$$

• Soit $x \in D_f$ on a $x \neq 0$ et $x \neq 4$ donc $-x \neq 0$ et $-x \neq -4$ d'où

$4-x \neq 4$ et $4-x \neq 0$. Donc $(4-x) \in D_f$

- $f(4-x)=ln\left|\dfrac{4-x-4}{4-x}\right|=ln\left|\dfrac{-x}{4-x}\right|=ln\left|\dfrac{x}{4-x}\right|=ln\dfrac{1}{\left|\dfrac{4-x}{x}\right|}=-ln\left|\dfrac{4-x}{x}\right|=-f(x)$

Donc I est un centre de symétrie pour (C_f) .

3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} ln\left|\dfrac{x-4}{x}\right|=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{x-4}{x}\right|=+\infty$

Donc la courbe C_f admet la droite des ordonnées comme asymptote verticale.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} ln\left|\dfrac{x-4}{x}\right|=0$ car $\lim\limits_{x\to -\infty}\left|\dfrac{x-4}{x}\right|=1$

Donc la courbe C_f admet la droite des abscisses comme asymptote horizontale.

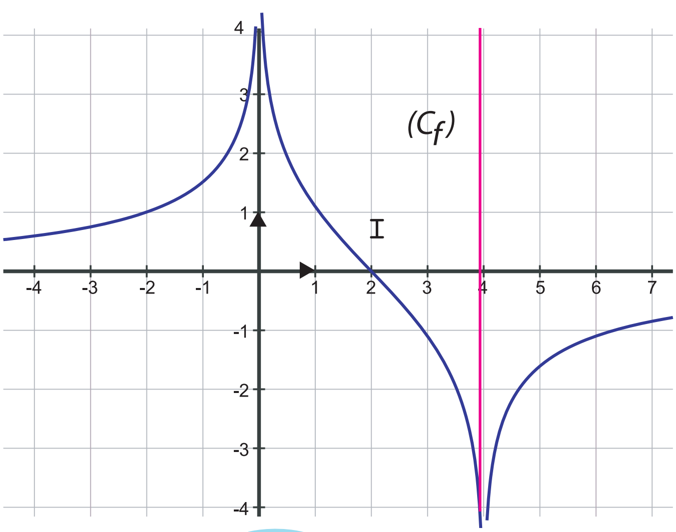
4) On sait que la dérivée de $ln|u(x)|$ est $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ donc $f'(x)=\dfrac{\frac{4}{x^2}}{\frac{x-4}{x}}=\dfrac{4}{x(x-4)}$

d'où le signe de $x(x - 4)$ et le tableau de variations de f sur $]-\infty, 2]$:

x	$-\infty$	0	2
$x(x-4)$	+	||	-

x	$-\infty$		0		2
$f'(x)$		+	||	-	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	0

5) Courbe C_f



VI. Fonction logarithme décimal.

Activité :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Donner le domaine de définition de f.

Montrer que pour tout $x > 0$ et $y > 0$, on a : $f(x\,y) = f(x) + f(y)$.

Calculatrice : utiliser la touche **log**

• La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ vérifie toutes les propriétés de la fonction ln et vaut 1 pour x = 10.

On l'appelle fonction **logarithme décimal** et on la note **log**.

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

La calculatrice donne $\ln 10 = 2{,}302585\ldots$ et $\dfrac{1}{\ln 10} = 0{,}434294\ldots$ On écrit :

$$\log x = m \ln x \quad \text{avec} \quad m = 0{,}434294\ldots$$

Application

La fonction logarithme décimal est d'un usage courant en chimie , en physique, en médecine,en astronomie etc … car elle se base sur le système décimal (base 10).

x étant un réel strictement positif, son écriture scientifique est :

$x = a.10^p$ avec $1 \leq a < 10$ et $p \in \mathbb{Z}$.

On a alors $\log x = \log a + \log(10^p)$. Ainsi $\log x = \log a + p$

Or $0 \leq \log a < 1$ et $p \in \mathbb{Z}$. donc p est la partie entière de $\log(a.10^p)$ et $\log a$ sa partie “décimale”.

Exemple :

$\log 2856 = \log(2{,}356.10^3) = \log(2{,}356) + 3$

La calculatrice donne $\log 2{,}356 = 0{,}3721\ldots$; donc $\log 2356 = 3{,}3721\ldots$

Sans calculatrice déterminer la partie entière des nombres suivants :

$\log 42500$, $\log 0{,}0073$ et $\log \dfrac{1}{8}$

Calcul du logarithme décimal log x `

```
Program LogDecimal ;
Uses Wincrt ;
Var  x,y:real;

  Begin
   writeln('              **** Calcul du logarithme décimal**** ');  writeln;
             repeat
      write('calculons le logarithme décimal de : ');
      read(x);writeln
      until x >=0 ;

          y:=ln(x)/ln(10);
          writeln('log(',x:4:4,')= ',y:4:10);

End.
```

Une autre méthode de calcul du logarithme décimal log x

```
Program LogDecimal ;
Uses Wincrt ;
Var  x:real;
     k,n:integer;
  Begin
  clrscr; writeln('              **** Calcul du logarithme décimal**** ');  writeln;
             repeat
      write('calculons le logarithme décimal de : ');
      read(x);writeln
      until x >=0 ;

      if x<1  then begin x:=1/x; write('-') end;
      n:=0;
        while x>=10.0 do begin n:=n+1; x:=x/10.0 end;
        write(n,'.');
        for k:=1 to 10 do
         begin
          x:=sqr(x); x:=x*sqr(sqr(x));
           n:=0; while x>=10.0 do begin x:=x/10.0; n:=n+1 end;
            write(n)
      end; writeln  ;

End.
```

Exercices et problèmes

1 Ecrire en fonction de $ln\ 2$ et (ou) de $ln 5$ les nombres suivants :

$ln\ 10$; $ln\ 50$; $ln\ (0,5)$; $ln\ (12,8)$; $ln\ \frac{1}{2^3}$; $ln\sqrt{10}$; $ln\ 0,001$

2 Simplifier :

$ln\ 2 - 2\ ln\ 8 - ln\frac{1}{16}$;

$ln\ 16 - ln\ 40 + \frac{1}{2}\ ln\sqrt{625} - ln\ 0,625$;

$ln\ (\sqrt{2}+1) + ln\ (\sqrt{2}-1)$;

$ln\ (\sqrt{3}+1) + ln(\sqrt{3}-1)$; $ln\ 2e - ln\ e^2$

3 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

1) $ln\ x = 2$;
2) $ln\ x = -1$;
3) $ln\ (x+1) = ln\ (2x-3)$,
4) $ln\ (x-2) - ln\ (x-3) = 1$;
5) $2\ ln\ (x+1) - ln\ x = ln\ 2$;
6) $(ln\ x)^2 - 2\ ln\ x = 0$

4 Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $ln\ x > 10$
2) $ln\ x < -50$
3) $ln\ (x^2 - 1) \leq ln\ 3$
4) $ln\ (x+e) + ln\ (x-e) \leq 2 + ln\ 3$
5) $ln\ (1-2x) \leq 1$

5 Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, le système suivant :

$$\begin{cases} x+y=55 \\ ln\ x + ln\ y = 700 \end{cases}$$

6 Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, le système suivant:

$$\begin{cases} x+y=30 \\ ln\ x = 2ln12 - ln\ y \end{cases}$$

7 Dériver les fonctions suivantes:

a) $f(x)= x\,ln(x)$ b) $g(x)=\frac{ln(x)}{x}$

c) $h(x)= ln(x^2+1)$

d) $k(x)= ln(x+\sqrt{x^2+1})$

e) $u(x)= ln(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$ f) $r(x)= ln(\frac{x+1}{x-1})$

g) $s(x)= ln(x^2-5x+6)$ h) $t(x)= ln(|4x+8|)$

i) $v(x)= ln(\sqrt{x-1})$

8 Déterminer une primitive de f :

a) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ b) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

c) $f(x) = tan\ x$

9 Soit la fonction f définie $\mathbb{R}/\{1\}$ par

$$f(x)=\frac{-x^2+4x-3}{x-1}$$

1) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x différent de 1, on ait :

$$f(x)= ax+b+\frac{c}{x-1}$$

2) En déduire les primitives de f sur $]1, +\infty[$.

10 Calculer les limites éventuelles suivantes

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,(7x)$ b) $\lim\limits_{x\to0^+} ln(x\sqrt{2})$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{ln\,x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} ln(\frac{-x}{3})$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - ln\,x)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln\ x}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(0,8x)}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln\,x}{5x}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{4}x^2 - ln\,x - 3)$ j) $\lim\limits_{x\to1,5^-} ln(3-2x)$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}[ln(2x+1) - ln\,(x-3)]$ l) $\lim\limits_{x\to0^+} ln(\frac{1+x}{x})$

11 calculer les limites éventuelles suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(-7+5x^2)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - \ln x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x - \ln x)$ d) $\lim\limits_{x\to0^+} (x^5 \ln x)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^6}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^5 - x^2)}{x}$

g) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} + \ln x$ h) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1-x)}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{x\ln x}$ j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\dfrac{1}{x})$ l) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+2\sin x)}{x}$

12 Soit $f(x) = \ln(3x^2 - x - 2)$

1) Donner le domaine de définition de f.

2) Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

3) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse 8 .

4) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point B d'abscisse $-\dfrac{5}{6}$.

5) Tracer (sommairement) la courbe représentative de f, les deux tangentes précédentes et les points A et B .

6) Résoudre $f(x) = \ln(-5x - 3)$

13 Etudier et représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ e) $f(x) = \ln\dfrac{x-2}{x+1}$

b) $f(x) = \ln(x^2+x+1)$. f) $f(x) = x - \ln x$

c) $f(x) = \ln(x^3 - 8)$ g) $f(x) = \ln(|x|) + x$

d) $f(x) = \ln(\dfrac{x-2}{x+1})$ h) $f(x) = x\ln x$

14 Le niveau sonore $d(I)$, en décibels (db), d'un son d'intensité I est donné par

La formule : $d(I) = \dfrac{10}{\ln 10}.\ln(\dfrac{I}{I_0})$

où I_0 est l'intensité du seuil d'audibilité de l'oreille humaine.

1) Une voix humaine produit un son dont l'intensité I est égale à $10^6\ I_0$

Calculer le niveau sonore $d(I)$, en décibels, atteint par cette voix humaine.

2) Dans cette question, I_1 et I_2 désignent des intensités quelconques; on suppose $I_1 \le I_2$

a) Montrer que

$$d(I_2) - d(I_1) = \frac{10}{\ln 10}\ln(\frac{I_2}{I_1})$$

b) Calculer cette différence $d(I_2) - d(I_1)$, arrondie au dixième le plus proche, lorsque $I_2 = 2\,I_1$

c) Déterminer $\dfrac{I_2}{I_1}$ lorsque $d(I_2) - d(I_1) = 15$,

puis justifier l'affirmation suivante : «115 décibels, c'est environ 32 fois plus fort que 100 décibels».

3) Calculer $\dfrac{I_1}{I_0}$, $\dfrac{I_2}{I_0}$, puis $\dfrac{I_2}{I_1}$ lorsque :

a) I_1 correspond a un niveau sonore de 90 db (au-delà de ce niveau, on considère qu'il y a danger et risque de surdité)

b) I_2 correspond à un niveau sonore de 120 db (c'est le niveau sonore atteint par un concert des «Who» en 1976).

15 On considère la fonction f définie sur]0, 1[par : $f(x) = \dfrac{1}{2}[\ln x - \ln(1-x)]$.

On désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 4 cm).

1) Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers 0, puis vers 1. Préciser les asymptotes à Γ Etudier les variations de f.

2) a) Montrer que Γ a pour centre de symétrie le point $A(\frac{1}{2}, 0)$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (D) à Γ en A.

3) On pose $\varphi(x) = f(x) - 2x + 1$.

a) Etudier les variations de φ.

b) En déduire les positions de Γ et (D).

4) Tracer Γ et (D) dans le repère .

16 On a placé 1000 D le 01/01/2002 sur un compte d'épargne (placement à intérêts composés au taux de 3,5% par an). On note C_n le capital disponible sur ce compte n années plus tard.

1) Calculer C_1, C_2 et C_3. Démontrer que la suite (C_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

2) Exprimer C_n en fonction de n.

3) En utilisant la fonction ln, déterminer au bout de combien d'années, le capital initial aura doublé, au bout de combien d'années, le capital initial aura triplé.

17 **A)** Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 1 + ln\, x$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

1) Étudier les variations de g.

2) Calculer $g(1)$ et en déduire que $g(x) \leq 0$ si $0 < x \leq 1$ et $g(x) \geq 0$ si $x \geq 1$.

B) Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

2) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$.

b) Étudier les positions relatives de (C_f) et (D).

c) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Tracer (C_f) et (D) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

5) Déterminer la primitive F de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1

18 La dimension M d'une mémoire tampon intervenant dans un réseau téléinformatique est donnée par la formule

$$M(t) = -\frac{30}{\log t} - 10$$

où t représente l'intensité du trafic ($0 < t < 1$). On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,2 ; 0,8] par :

$$f(x) = -\frac{30}{\log x} - 10$$

1) Exprimer $f(x)$ à l'aide de $ln\, x$.

2) Montrer que $f'(x) = \frac{30\, ln 10}{x\, ln^2 x}$.

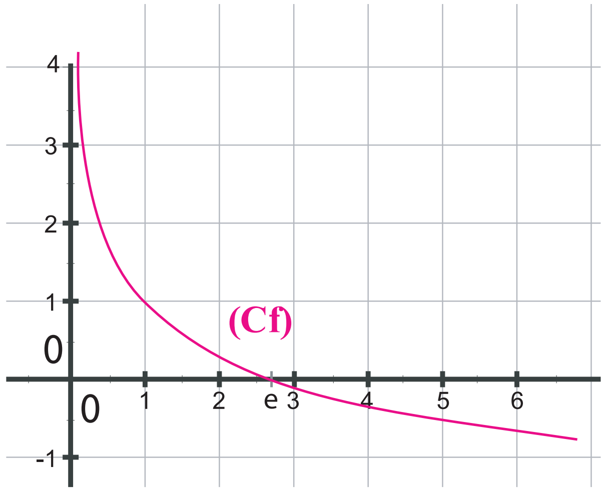
3) Dresser le tableau de variation de f .

4) Représenter graphiquement f.

5) Déterminer l'intensité du trafic à 0,01 près pour une dimension de mémoire tampon de 64 (par le calcul et graphiquement).

19 Le repère utilisé est orthonormé : unité : 1 cm.

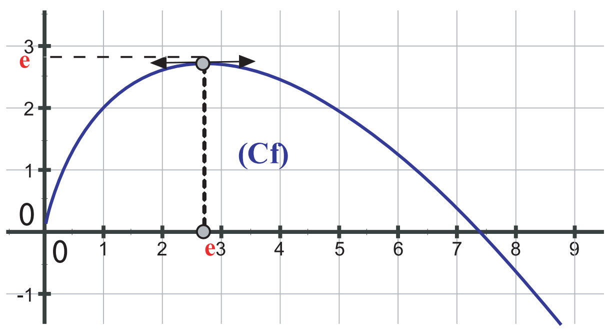
La figure ci-dessous est la représentation graphique C_f de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - ln\, x$.

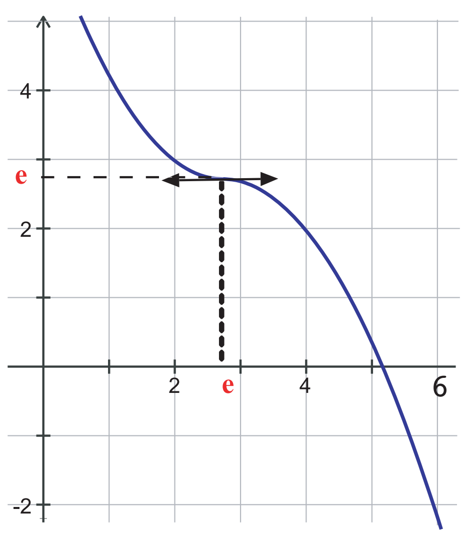


1) a) Démontrer par le calcul que f est monotone sur $]0; +\infty[$

b) En déduire le signe de f sur $]0; +\infty[$

2) L'une des deux fonctions représentées ci-dessous est une primitive de f. Justifier que l'une des courbes ne peut convenir.





3) La bonne fonction est appelée g.
Elle est définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = ax \ln x + cx + b$ où a, b et c sont trois réels.

a) Calculer $g'(x)$ en fonction de a et b.

b) En déduire les valeurs de a et de b.

4) Sur le graphique, on observe que $g(e) = e$. En déduire la valeur de c.

20 La fonction f est définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x+1)$$

1) a) Calculer la limite de f en -1^+. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) a) Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f.

b) Dresser le tableau des variations de f. Préciser la valeur exacte du maximum de f.

3) Déterminer les branches infinies de (C_f) . Tracer la courbe (C_f).

4) a) Montrer qu'il existe deux réels α et β, tels que $\alpha < 0 < \beta$, et $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α et de β .

c) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-1; +\infty[$

5) Soit g la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par:
$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$

a) Calculer $g'(x)$

b) En déduire l'expression de la primitive de f s'annulant pour $x = 0$

21 On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x} + \ln x$

On note C sa courbe représentative et C' la courbe d'équation $y = \dfrac{2}{x}$

1) a) Calculer $f(1)$

b) Calculer la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-2} près de $f(e)$ et de $f(\dfrac{1}{2})$

c) Calculer $f(\frac{1}{e})$ en fonction de $ln\ e$ et $f(\frac{3}{4})$ en fonction de $ln\ 2$ et de $ln\ 3$

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de la fonction f et tracer la courbe C

4) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1. Tracer T

5) Etudier la position relative des courbes C et C'. Tracer C' et contrôler le résultat sur le graphique.

e) Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote D et la courbe C. Etudier la position de la courbe C par rapport à la droite D.

f) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C et la droite D.

2) Montrer que la fonction H définie par

$$H(x) = -\frac{1}{x}(1 + ln\,x)$$

est une primitive de la fonction h

définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{ln\,x}{x^2}$

En déduire une primitive de f

22 **A)** Soit g la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1 + 2\ ln\ x$

1) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction g.(les limites ne sont pas demandées)

3) Calculer g(1).

4) Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$

B) On considère la fonction f définie sur

$]0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \dfrac{ln\,x}{x^2}$

On appelle C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 3 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées).

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

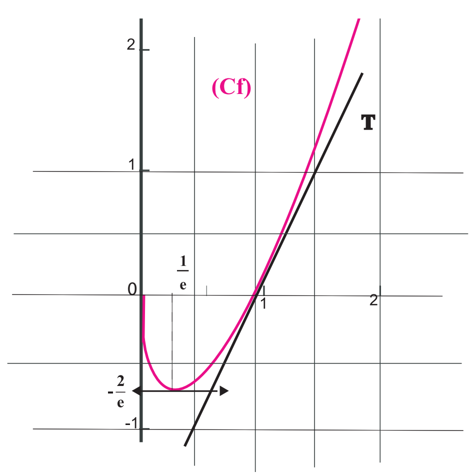
b) Montrer que la droite D d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à C. Y a-t-il une autre asymptote à C ? Si oui donner son équation.

c) Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

d) En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

23 La courbe ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle$]0\ ;+\infty[$.

La droite (T) est sa tangente au point d'abscisse 1.



1) Par lecture graphique :

a) Donner les valeurs de $f(\frac{1}{e})$ et de $f'(1)$

b) Dresser le tableau de signe de f sur l'intervalle $]0\ ;3]$

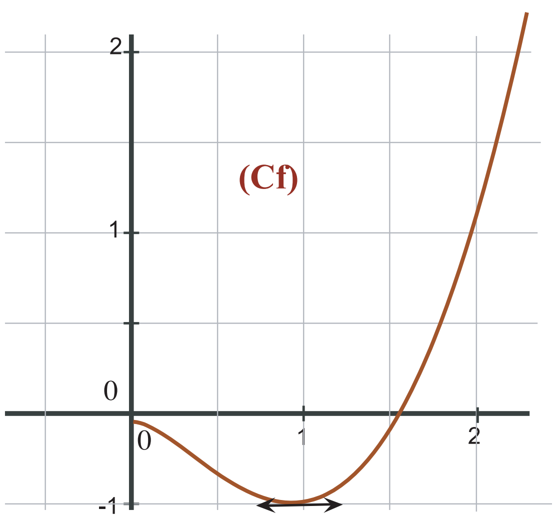
2) On admet que f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=(ax+b)\ln x$ où a et b sont des nombres réels.

a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.

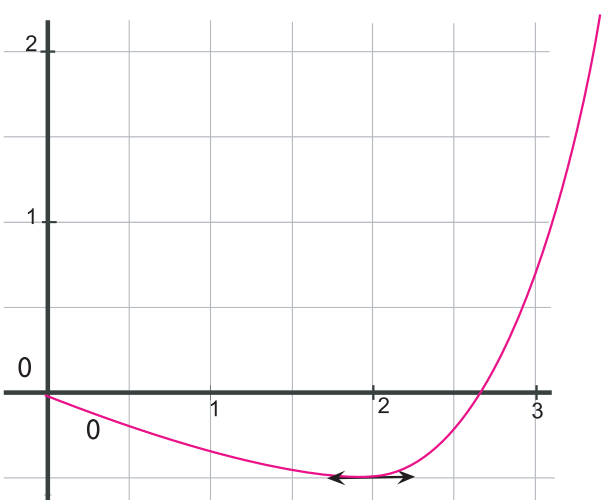
b) Déterminer alors les valeurs de a et b en utilisant la question 1.*a*.

3) L'une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

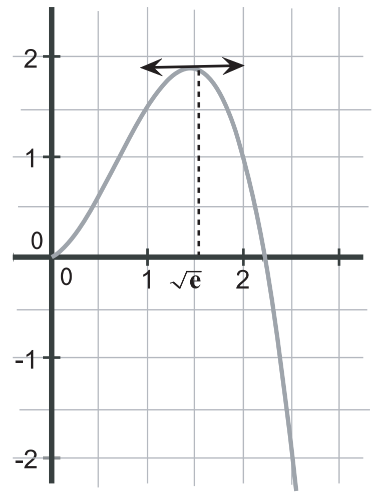
Indiquer le numéro de cette courbe en précisant les raisons du choix.



Courbe1



Courbe2



Courbe3

4) On considère les fonctions G et H définies sur $]0\,;+\infty[$ par

$G(x)=(1-\ln x)x^2$ et $H(x)=x^2(\ln x-\frac{1}{2})$

L'une d'entre elles est la primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ dont la représentation graphique a été choisie à la question précédente.

Laquelle ? Justifier la réponse.

24 Une plaque chauffante est constituée de deux éléments comportant chacun 7 résistors en série. Chaque résistor dissipe une puissance de 330 watts .

Les échanges de chaleur entre la plaque et l'air ambiant sont estimés à 7,5 watts par degré de différence de température entre la plaque et l'air ambiant. (A = 7,5 W/°C). La température de l'air ambiant est supposée constante et égale à 24°C.

Dans ces conditions, le temps t mis pour que la plaque atteigne la température T est donné par :

$$t(T)=-1000\frac{\ln(1-\frac{T}{640})}{0{,}9625}\ ;\ (T<640)$$

1) a) Calculer le temps nécessaire pour porter la plaque de 24°C à 400°C.
b) Calculer la dérivée $t'(T)$.
c) En déduire le sens de variation de la fonction t (T) sur l'intervalle [50 ; 600].
Compléter le tableau suivant :

T	50	100	150	200	250	300	400	500	600
t(T)									

2)a) Représenter graphiquement la fonction $t\,(T)$ sur l'intervalle [50 ; 600].
b) Déterminer graphiquement la température atteinte en 20 min. Retrouver ce résultat par le calcul .

25 On considère la fonction f définie sur

]-1,+ ∞ [par : $f(x)=ln(1+x)+\dfrac{2x}{1+x}$

et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Vérifier que pour tout x de l'intervalle

]-1,+ ∞[on a : $f'(x)=\dfrac{x+3}{(x+1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

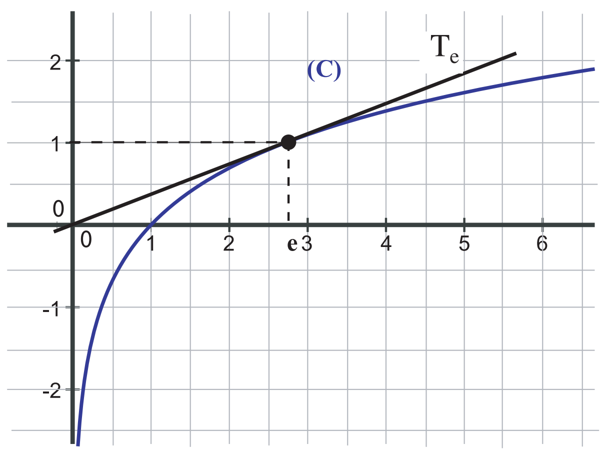
2) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle que l'on déterminera.

3) Soit h la fonction définie sur]-1,+ ∞ [par : $h(x) = f(x) - x$.

a) Dresser le tableau de variation de h.

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans]-1, + ∞ [deux solutions 0 et α tel que $2 < \alpha < 3$.
c) En déduire la position relative de la courbe C et de la droite $D : y = x$.
4) a) Tracer D et C dans le même repère (On tracera la tangente T à C au point O et on prendra α = 2,8).
b) Tracer dans le même repère la courbe C ' représentative de f^{-1}, (On tracera la tangente T' à C ' au point O).

26 On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction *ln* dans un repère.



A)
Donner une équation de la tangente T_e à la courbe (C) au point e, puis vérifier que T_e passe par l'origine du repère.
B)
Soit a un réel strictement positif.
1) Donner une équation de la tangente T à (C) au point A d'abscisse a .
2) On considère la fonction g définie sur

]0, + ∞ [par : $g(x)=lnx - \dfrac{1}{a}x+1 - lna$

a) Justifier la dérivabilité de g sur $]0,+\infty[$ et calculer $g'(x)$.

b) Etudier le signe de $g'(x)$.

c) En déduire les variations de g puis son signe sur $]0,+\infty[$.

d) En déduire que la position de (C) par rapport à (T).

C)

1) En utilisant le résultat de la partie B, justifier que, pour tout x de $]0,+\infty[$, on a :

$$\ln x \leq x - 1$$

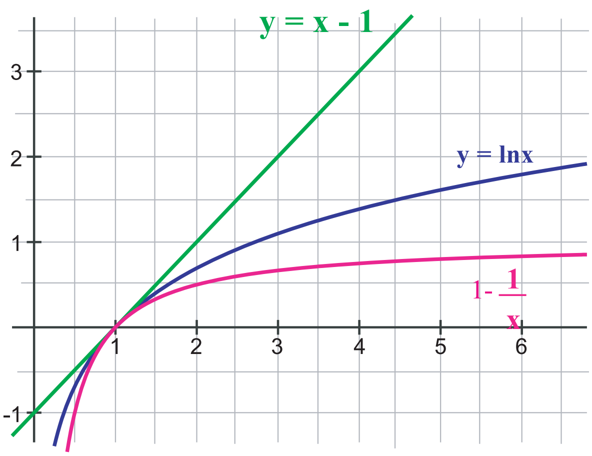
2) On considère la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}$

Étudier les variations de h sur $]0,+\infty[$ et en déduire son signe.

3) Déduire des questions précédentes que, pour tout x de $]0,+\infty[$, on a :

$$1-\frac{1}{x} \leq \ln x \leq x-1$$

Interpréter graphiquement cet encadrement.



4) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du logarithme népérien de chacun des nombres : 0,95 ; 0,98 ; 1,03 et 1,1

27 On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$

et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

(I)

1) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T en I.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat.

b) Tracer T et (C).(On prendra ln2 = 0,7)

(II)

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$g(x) = f(x) - x$$

1) Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer g(1) et en déduire que pour tout réel x de $[1,+\infty[$ on a $f(x) \leq x$.

3) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = 2 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = f(U_n).$$

a) Montrer , par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : $U_n > 1$.

b) montrer que la suite U est décroissante.

c) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.

D'après BAC

Le mot LOGARITHME est une déformation du mot ALGORITHME qui lui même provient du nom du célèbre mathématicien arabe Al Khawarezmi. On doit à Al Khawarezmi plusieurs procédés pratiques de calcul auxquels les euoropéens donnaient le nom d'algorithme. Le LOGARITHME est un nouveau " ALGORITHME " qui permet de simplifier certains calculs.

John Napier est né à Merchiston Castle, aux environs d'Édimbourg. Vers la fin du XVIe siècle, préoccupé par le fait que le progrès scientifique était en quelque sorte freiné par des calculs numériques longs et pénibles, il concentra toutes ses forces au développement de méthodes susceptibles de réduire ce calcul fastidieux. Après vingt ans de travail, il livre en 1614 son célèbre traité intitulé Mirifici logarithmorum canonis descriptio, qui décrit son système de logarithmes et l'usage qu'il veut en faire.

Un second ouvrage, intitulé Mirifici logarithmorum canonis constructio, publié en 1619, contient le premier traité ainsi que les procédés de construction des tables de logarithmes.

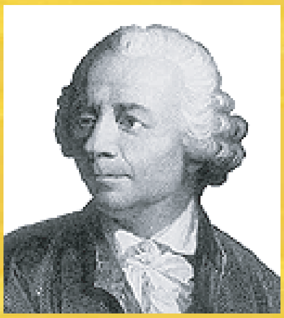
La publication du traité de 1614 eut un impact considérable et, parmi les admirateurs les plus enthousiastes de ce nouveau système, il faut compter Henry Briggs (1561-1630), professeur de géométrie d'Oxford. C'est à Briggs que l'on doit la naissance des logarithmes en base 10, aussi appelés à «base vulgaire» ou logarithmes de Briggs.

On sait aujourd'hui que Jost Bürgi (1552-1632) a développé des idées similaires à celles de Napier, en Suisse, à la même époque. On prétend même de Bürgi a conçu l'idée de logarithme dès 1588, mais il perdit tous ses droits de priorité en publiant ses résultats quelques années après le Mirifici de Napier. Les travaux de Bürgi furent en effet publiés à Prague en 1620 sous le titre Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen.

L'invention des logarithmes a eu un impact considérable sur la structure des mathématiques et décupla les méthodes de calcul des astronomes.

Chapitre 7

FONCTIONS EXPONENTIELLES



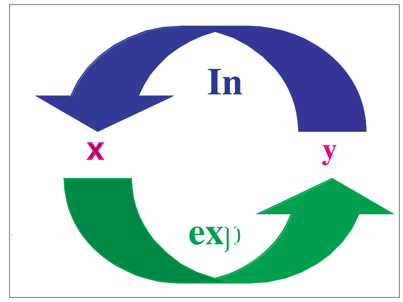
EULER Leonard
1707-1783

I. Fonction exponentielle :

➢ On sait que la fonction logarithme népérien est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
Elle admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**, elle est notée ***exp***.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{exp}}]0,+\infty[$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] & y \arrow[l, bend left, "ln"] \end{tikzcd}$$



$x \in \mathbb{R}$, $y \in]0,+\infty[$; $\quad y = exp(x) \Leftrightarrow x = ln\, y$

Ainsi $x \in]0,+\infty[$ $\quad exp\,(ln\,(x)) = x$

$x \in \mathbb{R}$, $\quad ln\,(exp\,(x)) = x$

Activités de découverte

Activité 1 :

a) Déterminer $exp(0)$, $exp(1)$, $exp(-1)$, $exp(2)$, $exp(-2)$, $exp(\frac{1}{2})$ et $exp(-\frac{1}{3})$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $\quad exp(n) = e^n$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad exp(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{e}$

• On convient de remplacer pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\;exp(x)$ par e^x.
ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $exp(x) = e^x$

Cette nouvelle écriture est une extension des propriétés trouvées dans l'activité précédente.

Activité 2 :

a) a et b étant deux réels, on pose $x = e^a$, $y = e^b$ et $z = e^{a+b}$.
Déterminer $ln\, z$ puis $ln(xy)$. En déduire que $e^a e^b = e^{a+b}$.

b) En écrivant d'une autre manière l'égalité $e^{b-b} = e^0$, montrer que $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a : $(e^a)^n = e^{na}$

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sqrt[n]{e^a} = e^{\frac{a}{n}}$.

A retenir

Définition

La fonction exponentielle , notée *exp*, est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

$$exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$$
$$x \mapsto exp\,(x) = e^x$$

$x \in \mathbb{R}$, $y \in \left]0,+\infty\right[$ $\quad y = exp\,(x) \Leftrightarrow x = \ln y$

ou encore $\quad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad ln(e^x) = x.$

Pour tout $x > 0$ $\quad e^{\ln x} = x$

Pour tous réels a et b on a : $\quad e^a\, e^b = e^{a+b}, \quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b} \quad et \quad e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a : $\quad (e^a)^n = e^{na}$

Applications

1 A l'aide d'une calculatrice donner une valeur approchée à 10^{-4} près de $e^{1,2}$, $e^{\sqrt{3}}$, $e^{-\frac{1}{2}}$

2 Simplifier les écritures suivantes :

e^{ln5} , e^{-ln2} , e^{2+ln3} , $e^{\frac{1}{2}ln7}$

$lne^{-0,4}$, $ln\sqrt{e^5}$ et $lne^{\frac{1}{2}ln3}$

Calculatrice :
Utiliser les 2 touches

2ndF et puis *ln*

3 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $e^x = 5$ b) $e^x = -3$

c) $e^{2x-3} = e^3$ d) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+1} = \dfrac{1}{2}$

II. Etude de la fonction exponentielle

Activités de découverte

Activité 1:

a) Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction logarithme népérien et en déduire celle de la fonction exponentielle.

b) Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$

c) En posant $y = e^x$ déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$.

Activité 2 :

a) En posant $X = -x$ déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

(on pourra écrire $e^x = (e^{\frac{x}{n}})^n$)

En déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Activité 3 :

a) Montrer que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) En considérant le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} \ln y = x \arrow[r, "exp"] & y = e^{x} \arrow[l, bend left, "ln"] \end{tikzcd}$$

montrer que $(exp)'(x) = \dfrac{1}{(ln)'(y)}$. En déduire que $(exp)'(x) = (exp)(x)$

Activité 4 :

Calculer la valeur de la dérivée de la fonction exponentielle en 0.

En déduire que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Activité 5 :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f la fonction définie sur I par

$$f(x) = e^{u(x)}$$

Ecrire f sous la forme de la composée de deux fonctions et déterminer $f\,'(x)$.

A retenir

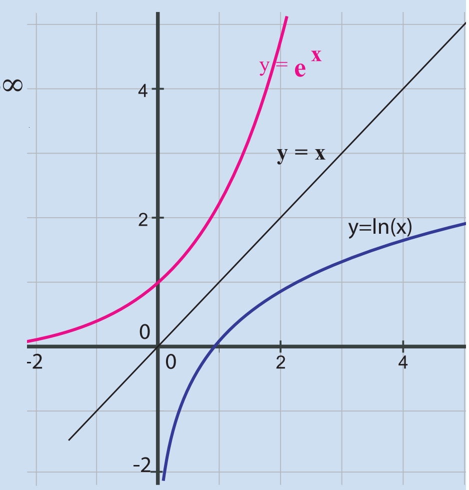
Limites

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0.$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$



Dérivées et Primitives

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$exp'(x) = exp(x)\ , \quad x \in \mathbb{R}\ .$$

Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $expou$ est dérivable sur I et on a :

$$(exp\ o\ u)'(x) = u'(x)\ exp(u(x))$$

Une primitive de la fonction $x \longmapsto u'(x)\, e^{u(x)}$ est la fonction

$x \longmapsto e^{u(x)}$

Applications

1 Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{x \to -\infty} (2x-1)e^{2x}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} - 2x$

$c)\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x}$ $\qquad d)\ \lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

$e)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{x}$ $\qquad f)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x^2}-1}{x}$

2 Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

$a)\ f(x) = \dfrac{1}{e^x}$ $\qquad b)\ f(x) = (2x-5)e^{2x}$

$c)\ f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$ $\qquad d)\ f(x) = e^{\cos x}$

3 Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

$a)\ f(x) = \cos x\ e^{\sin x}$ $\qquad b)\ g(x) = e^{3x}$

$c)\ h(x) = x e^{x^2-1}$ $\qquad d)\ k(x) = \dfrac{1}{e^{2x}}$

III. Puissance rationnelle d'un réel positif.

Activités de découverte

Activité 1 :

a) x étant un réel strictement positif , écrire plus simplement :

$$e^{2\ln\pi}\ ;\ e^{-5\ln 7}\ ;\ e^{\frac{1}{2}\ln 3}\ \text{ et }\ e^{-4\ln x}$$

b) x étant un réel strictement positif et n un entier naturel , écrire chacun des réels x^n, x^{-n} et $\sqrt[n]{x}$ sous la forme de l'exponentielle d'un réel.

➢ x étant un réel strictement positif et n un entier relatif, on sait que $e^{n\ln x} = x^n$.

Si dans l'écriture $e^{n\ln x}$ on remplace n par le rationnel r, on obtient l'expression $e^{n\ln x}$ qui a toujours un sens, ceci suggère de définir x^r .

Ainsi pour tout $x > 0$ et pour tout rationnel r, on définit x^r par l'égalité

$$x^r = e^{r\ln x} \qquad \text{(lire } x \text{ puissance } r\text{)}$$

x^r est une **puissance rationnelle** de x

c) Ecrire sous forme exponentielle les réels $5^{\frac{3}{2}}$ et $2^{-\frac{3}{5}}$

Activité 2 :

n étant un entier naturel et x un réel strictement positif,

a) Montrer que $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

b) Montrer de même que si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ on a : $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

Activité 3 :

Soient a et b deux réels strictement positifs, r et r' deux rationnels.
Montrer, en utilisant la définition de la puissance rationnelle, les égalités suivantes :

$$\ln a^r = r\ln a \quad ; \quad a^{r+r'} = a^r a^{r'} \quad ; \quad a^{r-r'} = \frac{a^r}{a^{r'}}$$

$$\left(a^r\right)^{r'} = a^{rr'} \; ; \; \left(ab\right)^r = a^r b^r \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Activité 4 :

Soit r un rationnel strictement positif et x un réel strictement positif.

a) En remarquant que $\ln x^r = r\ln x$, montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^r} = 0$

b) Vérifier que $\dfrac{e^x}{x^r} = e^{(x - r\ln x)}$

En remarquant que $x - r\ln x = x\left(1 - r\dfrac{\ln x}{x}\right)$, montrer que pour tout rationnel positif r, on a :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^r} = +\infty$

c) Montrer que $x^n e^x = \dfrac{x^n}{e^{-x}}$

En déduire que pour tout entier positif n, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

A retenir

Définition

x étant un réel strictement positif, et r un rationnel,
x^r est une puissance rationnelle de x définie par :

$$x^r = e^{r\ln x}$$

Propriétés

Si a et b sont deux réels strictement positifs, r et r' sont deux rationnels
on a :

$$\ln a^r = r\ln a \quad ; \quad a^{r+r'} = a^r a^{r'} \quad ; \quad a^{r-r'} = \frac{a^r}{a^{r'}}$$

$$\left(a^r\right)^{r'} = a^{rr'} \; ; \; \left(ab\right)^r = a^r b^r \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Applications

1 Simplifier les écritures suivantes :

a) $81^{\frac{2}{3}}$ b) $16^{\frac{3}{4}}$ c) $121^{\frac{3}{2}}$ d) $5^{\frac{3}{2}}\sqrt[6]{125}$

2 Ecrire sous la forme a^r où a est un réel strictement positif :

a) $\sqrt{\sqrt{a}}$ b) $a\sqrt{a}$ c) $\dfrac{\sqrt{a}}{a^2}$ d) $\sqrt[3]{a^2}$

IV. Fonction exponentielle de base *a*.

Activités de découverte

Activité 1 :

Soit a un réel strictement positif et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{x\ln a}$

a) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(-3)$, $f(\frac{1}{2})$ et $f(-\frac{1}{2})$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, , $f(n) = a^n$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{1}{n}) = a^{\frac{1}{n}}$

d) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{p}{q}) = a^{\frac{p}{q}}$.

➢ On convient de remplacer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la notation $e^{x\ln a}$ par a^x.

Ainsi $e^{x\ln a} = a^x$

Pour $a \neq 1$, f est appelée **fonction exponentielle de base *a*.**

Activité 2 :

Montrer que pour tous réels x et x' et pour tous réels strictement positifs a et b on a :

$$a^x.a^{x'} = a^{x+x'} \quad , \quad a^x.b^x = (ab)^x$$

$$a^x.a^{-x} = 1 \quad , \quad \frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'} \quad , \quad (a^x)^{x'} = a^{xx'}$$

Activité 3 :

Soit a un réel strictement positif et $f_a(x) = a^x$.

a) Montrer que $f'_a(x) = a^x \ln a$.

b) On prend $a = 2$. Donner le tableau de variations de f_2 , déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x}$ et tracer la courbe représentative de f_2.

c) On prend $a = \frac{1}{2}$. Montrer que $f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{f_2(x)}$,déterminer $\lim_{x \to -\infty} \frac{f_{\frac{1}{2}}(x)}{x}$ et tracer la courbe. représentative de $f_{\frac{1}{2}}$

d) Vérifier que pour tout réel x, $f_2(-x) = f_{\frac{1}{2}}(x)$. En déduire que les courbes représentatives

de f_2 et $f_{\frac{1}{2}}$ sont symétriques par rapport à la droite des ordonnées.

A retenir

Définition et Notation

a étant un réel strictement positif et x un réel, on appelle fonction exponentielle de base a la fonction $x \longmapsto e^{x\ln a}$

et on note a^x le réel e^{xLna}.

$$a^x = e^{x\ln a}$$

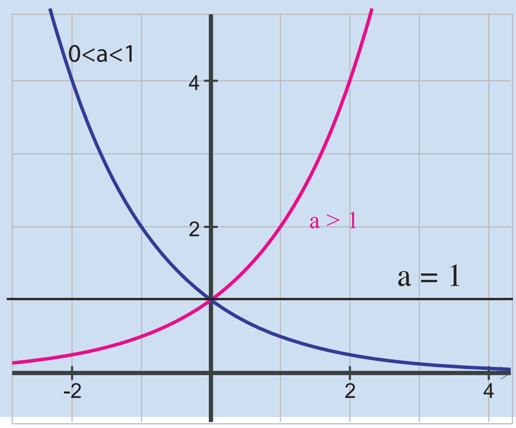
Propriétés

Pour tous réels x et x' et pour tous réels strictement positifs a et b on a :

$a^x.a^{x'} = a^{x+x'}$, $a^x.b^x = (ab)^x$

$a^x.a^{-x} = 1$, $(a^x)^y = a^{xy}$

Courbe représentative



Applications

1 Résoudre les équations suivantes :

$3^x = 15$, $10^x = 72$

$7^{x-1} = 5^x$, $4^x - 3.2^x + 2 = 0$

2 Sur un étang (de surface infinie…) une population de nénuphars double chaque jour (au premier jour elle est de un nénuphar). Comment modéliser le phénomène ?
Au bout de n jours on a 2^n nénuphars (n est un entier). Combien en a-t-on au bout de 16 jours 12 heures 45 minutes (… soit 16,53125 jours) ?

V. Etude de fonctions du type $x \longmapsto e^{u(x)}$.

Exemple 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-x^2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer qu'elle est paire.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$.

4) Tracer la courbe représentative (C_f) de f.

Solution

1) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $(-x) \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$. Donc f est paire.

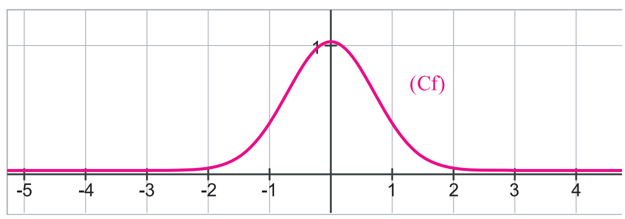
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2) = -\infty$

3) $f(x)$ est de la forme $e^{u(x)}$ avec $u(x) = -x^2$. Comme la fonction $x \mapsto -x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a : $f'(x) = -2xe^{-x^2}$.

Comme e^{-x^2} est toujours positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $(-2x)$.

4) Le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$ est le suivant ainsi que sa courbe :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$+\infty$ 0



Exemple 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - e^{\frac{1}{2}x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

c) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement le résultat.

d) Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$ est une asymptote pour la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

2) Etudier les variations de f.

3) Tracer Δ et (C).

4) Montrer graphiquement que l'équation $2e^{\frac{1}{2}x} = x + 4$ admet deux solutions α et β

Donner un encadrement de α et de β avec la précision permise par le graphique.

Solution

1) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{1}{2}x + 2) - \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{2}x} = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{2}x} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{2}x + 2 - e^{\frac{1}{2}x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x(1 + \frac{4}{x} - \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}x})$. L'expression $\frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}x}$ est de la forme

$\dfrac{e^u}{u}$ avec u tendant vers $+\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}x} = +\infty$ et par suite $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \dfrac{4}{x} - \dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}x}) = -\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{\frac{1}{2}x + 2 - e^{\frac{1}{2}x}}{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{x}$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2} \dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}x} = +\infty$ car $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{e^u}{u} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$

Il en résulte que la courbe (C) présente au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite des ordonnées.

d) On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (\dfrac{1}{2}x + 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-e^{\frac{1}{2}x}) = 0$. Donc la droite Δ est une asymptote pour (C).

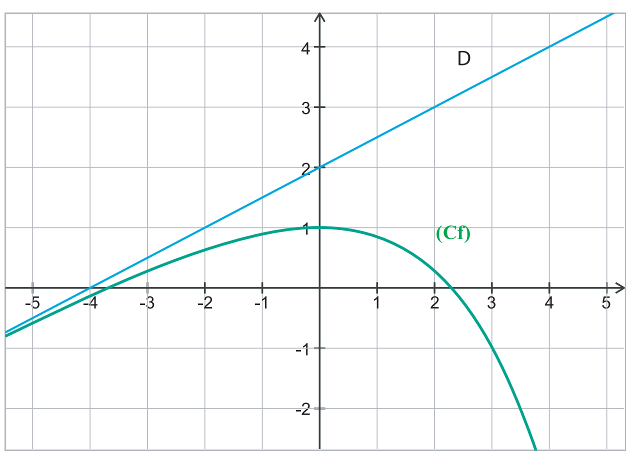
2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions dérivables et on a :

$f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \dfrac{1}{2}(1 - e^{\frac{1}{2}x})$. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^{\frac{1}{2}x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

3) courbe



4) $2e^{\frac{1}{2}x} = x + 4 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = \dfrac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} - \dfrac{1}{2}x - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$

Donc les solutions de l'équation précédente sont les abscisses des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. Graphiquement on a deux points d'abscisses α et β telles que :

$-4 < \alpha < -3$ et $2 < \beta < 3$

Apprendre à chercher

Situation1

Dans un pays, l'effectif de la population en 2006 est de 9 millions d'habitants. La population après t années est donnée par :

$$f(t) = 9.e^{0,04t}$$

1) A partir de quelle année la population aura-t-elle plus que doublé ?
2) On estime que les ressources du pays ne peuvent pas nourrir plus que 15 millions. Pendant combien d'années à partir de l'an 2006 la nourriture sera-t-elle suffisante ?

Situation2

Une forme de grippe est apparue dans une ville. Une étude a montré que l'évolution de l'épidémie est donnée par la fonction P et telle que $P(t) = \dfrac{20t}{1+19e^{-1,2t}}$ où t désigne le nombre de semaines écoulées depuis l'apparition de l'épidémie et P(t) désigne le nombre d'habitants (en milliers).

1) Quel est le nombre de personnes initialement atteintes ?
2) Si la situation ne change pas , combien de personnes en tout seront-elles atteintes ?

Situation3

Soit a,b et c des réels et la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (ax + b)e^{cx}$

1) Calculer $F'(x)$. Que remarque-t-on ?.

2) On donne $f(x) = (2x - 3)e^{2x}$. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer une primitive F de f.

Les calculs précédents donnent une méthode de recherche d'une primitive d'une fonction de la forme $x \longmapsto (ax + b)e^{cx}$, dite méthode d'identification.

Avec l'outil informatique

Un programme qui donne une approximation de $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ à epsilon près.

Le calcul s'arrête lorsque $\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq epsilon$. ($x$ et epsilon données)
Exemple $e^2 \approx 7{,}389$

```
program exponentielle;
uses wincrt;
var
  x,e,s,p,f:real;
  i:integer;
begin
write('x= ');readln(x);
write('Epsilon = ');readln(e);
S:=1;
i:=1;
p:=1;
f:=1;
repeat
    p:=p*x;
    f:=f*i;
    S:=S+p/f;
    i:=i+1;
until abs(P/f) <= e;
writeln('La valeur approchée d''exponentielle de x = ',S);

end.
```

1 Ecrire plus simplement chacun des nombres suivants :

a) $\ln e^{-\frac{2}{3}}$ b) $e^{\ln 3}$ c) $e^{5\ln 3} - 3e^{\ln 7}$

d) $\dfrac{e^{2\ln 3}}{e^{\ln 8}}$ e) $\dfrac{e^{3}}{e^{4+\ln 3}}$ f) $\ln\dfrac{e^{-3}}{(e^{2})^{-2}}$

2 Résoudre, dans IR ,les équations suivantes

a) $exp(2x - 3) = 1$ **b)** $e^{x} = 2$

c) $e^{-2x} = -2$ **d)** $exp(3x + 1) = e^{1-5x}$

e) $e^{4x} + 1 = 3$ **f)** $e^{2x} = e^{x}$

g) $(e^{x})^{2} - 3e^{x} + 2 = 0$ **h)** $e^{x^{2}-16} = 144$

i) $e^{(x-4)(2x-1)} = e$ ***j)*** $e^{-x} + e^{x} = 2$

k) $e^{x} - 5 + \dfrac{6}{e^{x}} = 0$ **l)** $2e^{x}(e^{x} - 6e^{-x}) = 5e^{x}$

3 Résoudre,dans IR,les inéquations suivantes

a) $e^{3x+1} > 0$ **b)** $e^{x-1} \leq -2$ **c)** $e^{-5x+2} < 1$

d) $exp(3x + 14) > -3$ **e)** $e^{2x+2} - e^{3x-5} < 0$

4 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^{-2x+6}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}+3}{e^{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(\sqrt{x} - 5)$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{2x} - e^{x} + 2)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 + e^{-x})$ **f)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}-1}{3-e^{x}}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{3x} - 2e^{x} + 4)$ **h)** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x^{2}-x+1}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{-x} - 3e^{2x} - 2)$ **j)** $\lim\limits_{x\to0^{-}} \dfrac{1}{e^{x}-1}$

5 **1)** Démontrer que pour tout réel $x \neq 0$

$$\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1} = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

2) Utiliser l'écriture la plus adaptée pour calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$

c) $\lim\limits_{x\to0^{+}} \dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to0^{-}} \dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$

6 Répondre par Vrai ou Faux :

1) $x \longmapsto exp(x^{2})$ est la dérivée de la fonction f définie sur IR par: $f(x) = exp(x^{2})$

2) $x \longmapsto -e^{-x}$ est la dérivée de la fonction g définie sur IR par : $g(x) = e^{-x}$

3) $x \longmapsto -\dfrac{1}{e^{2x}}$ est la dérivée de la fonction h définie sur IR par: $h(x) = \dfrac{1}{e^{x}}$

4) $x \longmapsto (3x^{2} - 1)exp(x^{3} - x + 1)$ est la dérivée de la fonction k définie sur IR par : $k(x) = e^{x^{3}-x+1}$

5) La fonction *exp* est une primitive sur IR de la fonction *exp*.

6) La fonction $f : x \longmapsto e^{-3x}$ admet pour primitive sur IR la fonction $f : x \longmapsto e^{-3x}$.

7) G définie sur IR par $G(x) = exp(3x^{2} - 5)$ est une primitive sur IR de la fonction $g : x \longmapsto 6x\, exp(3x^{2} - 5)$.

8) La fonction $h : x \longmapsto (e^{x})^{3}$ admet pour primitive sur IR la fonction $H : x \longmapsto \dfrac{1}{3}e^{3x}$.

9) $K : x \longmapsto exp\left(\dfrac{1}{x^{2}}\right)$ est une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction k définie par :

$x \longmapsto -\dfrac{2}{x^{3}}\, exp\left(\dfrac{1}{x^{2}}\right)$

7 Déterminer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous en précisant dans chaque cas l'ensemble de définition.

a) $f(x) = e^{-x}$ **b)** $f(x) = e^{2x} - 3e^{x} + 4$

c) $f(x) = (x + 1)e^{x}$ **d)** $f(x) = exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$

e) $f(x) = ln(3 + e^{-x})$ **f)** $f(x) = 2e^{x}$

g) $f(x) = 2x + e^{x}$ **h)** $f(x) = x.e^{x}$

i) $f(x) = x^{2}.e^{x}$ **j)** $f(x) = (2x + 1)e^{x}$

k) $f(x) = (x^{2}-1)e^{x}$

8 **1)** Déterminer l'ensemble de définition, puis une primitive des fonctions:

a) $f(x) = 2e^x$ **b)** $f(x) = 2x + 1 + e^x$

c) $f(x) = -e^x + x^2$

2) Montrer que $F(x) = (x+1)e^x$ est une primitive sur IR, de $f(x) = (x+2)e^x$

3) Montrer que $F(x) = (x^2 - 1)e^x$ est une primitive sur IR, de $f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^x$

9 On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = -x + 1 - e^x$.

1) étudier les variations de f sur IR, et dresser le tableau des variations de f.

2) Etudier les branches infinies de C_f.

3) Montrer que C_f coupe l'axe des abscisses en un unique point A et construire C_f.

4) En déduire la courbe représentative de la fonction h définie sur IR par

$$h(x) = -|x| + 1 - e^{|x|}$$

10 On considère la fonction f définie sur IR par:

$$f(x) = 2x + 5 - 2e^x.$$

1) Donner les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

2) a) Etudier les variations de f sur IR, et dresser le tableau des variations de f.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et α ($\beta < 0$ et $\beta > 0$).

c) Donner les valeurs arrondies de α et de β à 10^{-1} près.

3) Construire C_f et faire apparaitre α et β.

4) En déduire la courbe représentative de la fonction g définie sur IR par :

$$g(x) = |2x + 5 - 2e^x|$$

11 On considère la fonction $f : f(x) = e^{2x} - e^x$

1) a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition .

b) Donner l'équation de l'asymptote au graphe de f

2) Dresser le tableau de variation de f, puis construire le graphe de f

3) Déterminer une primitive de f

12 Soit f la fonction définie pour tout x appartenant à IR \{1} par : $f(x) = \dfrac{e^x}{2(1-x)}$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Justifier les éléments contenus dans le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e^2}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

2) Préciser la branche infinie au voisinage de $+\infty$

3) Tracer C dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

13 **A** On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x + e^x$.

On appelle C sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$

2) Etudier les variations de f.

3) Déterminer les coordonnées du point de C où la tangente T à C a pour coefficient directeur 3.

4) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α

b) Montrer que $\alpha \in]-1, 0[$.

c) Etudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

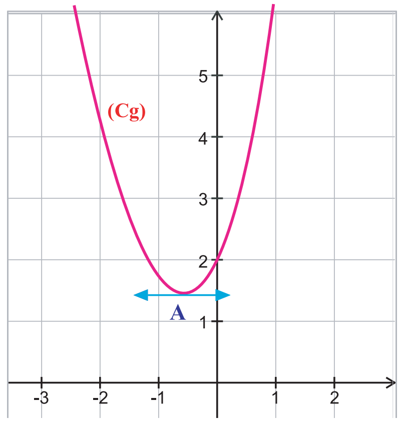
5) a) Démontrer que la droite D : $y = x$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$.

b) Préciser la position de D par rapport à C.

c) Pour quelles valeurs de x la distance entre C et D (mesurée parallèlement à $(o, \vec{j})$) est-elle inférieure à 0,01 cm ?

6) Représenter C sur [-3 ; 2], ainsi que D et T.

B- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 + 2e^x$ et soit (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé



1) a) En utilisant ce qui précède, étudier les variations de g.

b) Montrer que le point A où (C_g) admet une tangente horizontale a pour coordonnées

$$(\alpha,\ \alpha^2 - 2\alpha)$$

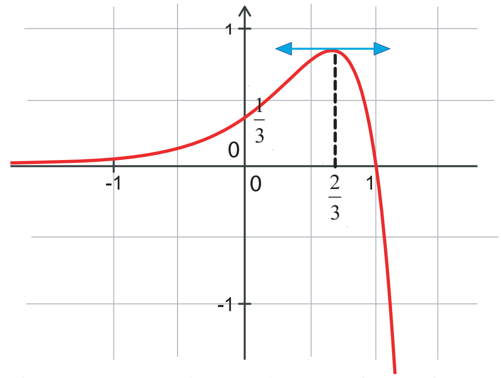
2) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$

3) Pour m réel, on considère l'équation :

$$g(x) = m.$$

Discuter selon la valeur de m le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation

14 Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}.)$
La courbe C ci-après représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (ax + b)e^{cx}$,
où a,b et c sont trois réels que l'on se propose de déterminer.
On sait que la courbe C contient les points de coordonnées (1 ; 0) et $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ et admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{2}{3}$.



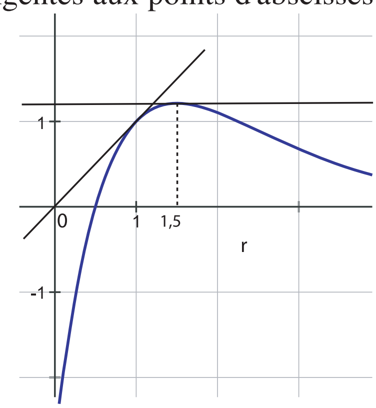
1) Par lecture graphique, dresser le tableau de variation de f.

2) Donner $f(0)$, $f(1)$ et $f'\left(\frac{2}{3}\right)$.

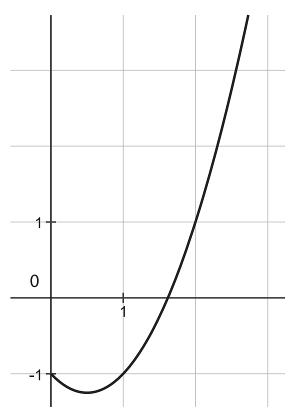
3) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.

4) Déduire des questions précédentes les réels a, b et c.

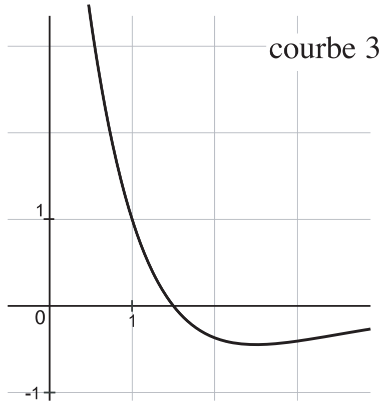
15 On donne ci-dessous la courbe Γ représentative d'une fonction f définie sur [0 ; 4] et ses tangentes aux points d'abscisses 1 et 1,5.



1) Lire graphiquement $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(1{,}5)$


courbe 1


courbe 2



2) Parmi les trois courbes (courbes 1 à 3), laquelle est susceptible de représenter f', la fonction dérivée de f ?
Justifier la réponse à l'aide d'arguments graphiques.

3) On admet que $f(x) = (ax + b)e^{-x+1}$ où a et b sont deux réels fixés. Calculer $f'(x)$ puis utiliser la question 1) pour déterminer a et b.

4) On pose : $F(x) = -(2x + 1)e^{-x+1}$
Vérifier que F est une primitive de f sur $[0 ; 4]$.

16 On place le 1/1/2007 un capital C sur un compte à intérêts composés au taux de 5,35 % par an.

1) Exprimer la somme présente sur le compte: après un an, après 2 ans, et après 3 ans.

2) Exprimer en fonction de l'entier naturel n, la somme présente sur le compte: après n ans.

3) Construire point par point le graphe de la fonction : $f(x) = 1{,}0535^x$, sur l'intervalle $[0 ; 20]$.

4) Déterminer au bout de combien d'années la somme présente sur le compte représentera plus du double du capital de départ. Vérifier graphiquement

17 Un pays, qui avait 5 000 000 d'habitants, voit sa population baisser de 2% tous les ans

1) Exprimer le nombre d'habitants de ce pays: après un an, après 2 ans, et après 3 ans.

2) Exprimer en fonction de l'entier naturel n, le nombre d'habitants de ce pays après n ans.

3) Construire point par point le graphe de la fonction : $g(x) = 0{,}98^x$, sur l'intervalle $[0 ; 20]$.

4) Déterminer au bout de combien d'années, ce pays aura perdu plus du quart de sa population. Vérifier graphiquement

18 Si à l'instant 0, un minerai contient $N(0)$ atomes d'une substance radioactive, on peut montrer qu'à l'instant t il n'en reste plus que

$$N(t) = e^{-at} N(0).$$

a) On appelle temps de demi-vie le temps T tel que pour tout $t > 0$: $N(t + T) = N(t)/2$. Calculer T en fonction de a .

b) En déduire que $N(nT) = 2^{-n} N(0)$.

c) Estimer, en fonction de T, le temps qu'il faudra pour que le nombre d'atomes soit divisé par 1000, par 10^6. (On pourra utiliser le fait que $2^{10} \simeq 1024$, voisin de 1000.)

19 **I)** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\varphi(x) = e^x + x + 1.$$

1) a) Calculer les limites φ en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Etudier le sens de variation de φ

2) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que

$$-1{,}28 < \alpha < -1{,}27.$$

3) En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II)
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x + 1}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

1) a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{e^x\varphi(x)}{(e^x + 1)^2}$

b) En déduire le sens de variation de la fonction f.
2) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$, et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3) Soit T, la tangente à C au point d'abscisse 0.
a) Donner une équation de T
b) Etudier la position de C par rapport à T.
4) a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est une asymptote à C,
c) Etudier la position de C par rapport à D.
5) Etablir le tableau de variations de f.
6) Tracer sur un même dessin C, T, et D.
La figure demandée fera apparaitre les points de C dont les abscisses appartiennent à [-2 ; 4].

20 La fonction f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x')=\dfrac{e^{x+2}}{(x+2)^2}$
1) Etudier la limite de f en $+\infty$. (On pourra poser $X = x + 2$.)
2) f' étant la fonction dérivée de f, montrer que $f(x)=\dfrac{xe^{x+2}}{(x+2)^3}$
3) Donner le tableau de variation de f.
4) Etudier les branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$,puis tracer $(\mathscr{C}_f)$.

21 L'objet du problème est l'étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + (x - 1)\, e^x$.
A) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = 2 + xe^x.$$
1) Etudier le sens de variation de g (les limites ne sont pas demandées).
2) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x.
B) On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
1) a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Montrer que la droite D d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$
c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
2) Calculer $f'(x)$ puis, à l'aide de la partie A, dresser le tableau de variation de f.
3) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans l'intervalle [0 ; 1], une solution unique x_0.
b) En déduire le nombre de solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$.
c) Vérifier que $0,4 < x_0 < 0,5$.
4) Déterminer les coordonnées du point A de la courbe (C) où la tangente à la courbe est parallèle à l'asymptote (D).

22 Soient a et b deux nombres réels. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (ax + b)e^x.$$
1) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2) Déterminer a et b pour que la courbe représentative de f passe par le point E (1,3e) et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse (-3).
3) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
4) Soit $F : F(x) = (cx + d)e^x$
Déterminer c et d pour que F soit une primitive de f qui s'annule au point 1.

Le nombre "e"

Les logarithmes sont des nombres artificiels utilisés pour obtenir le résultat de l'opération. Ils servent d'intermédiaires. Cependant, ces nombres intermédiaires sont transcendants, et, de la même manière que pour le nombre *Pi* des siècles auparavant, les mathématiciens vont faire émerger un symbole qui permettra de nommer en une lettre une infinité de chiffres, c'est le nombre e. Ainsi $ln(e) = 1$.

Même s'il sera étudié par Leibniz, Huygens ou encore Bernoulli, le nombre e sera nommé conventionnellement par le mathématicien Suisse Leonhard Euler (1707-1783) qui attribuera cette lettre en rapport, non pas avec son nom, mais avec la fonction exponentielle qu'elle décrit.

Chapitre 8

CALCUL INTEGRAL

RIEMANN Bernhard (1826 - 1866)

I. Intégrale d'une fonction sur un intervalle

Activités de découverte

Activité 1 :

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

a) Donner une primitive F de f puis calculer $F(3) - F(1)$.

b) Vérifier que le réel $F(3) - F(1)$ ne dépend pas du choix de F.

• Le nombre $F(3) - F(1)$ est appelé **intégrale** de f entre 1 et 3 . On le note :

$$\int_1^3 f(x)dx$$ Lire : « intégrale de 1 à 3 de $f(x)\,dx$».

• x est une variable muette et on peut écrire :

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 f(t)dt = \int_1^3 f(u)du = \dots$$

• Le réel $F(3) - F(1)$ est aussi noté $[F(x)]_1^3$ Lire :« F(x) pris entre 1 et 3».

• Les réels 1 et 3 sont les **bornes** de l'intégrale.

Pour toute fonction définie et continue sur [ab], on peut définir $\int_a^b f(x)dx$ car elle admet une primitive sur [ab].

Activité 2 :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . Soient a, b et c des réels appartenant à I et F une primitive de f .

– Calculer $\int_a^a f(x)dx$

– Comparer $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_b^a f(x)dx$

– Montrer que $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Activité 3 :

On donne deux fonctions f et g définies et continues sur un intervalle I.

Soit h la fonction définie sur I par $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$

où α et β sont deux réels.

Soient F et G les primitives respectives de f et g.

a) Vérifier que la fonction H telle que $H(x) = \alpha F(x) + \beta G(x)$ est une primitive de h.

b) Montrer alors que $\int_a^b h(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$

Activité 4 :

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I.

1) En calculant l'intégrale entre a et b de chacun des termes de l'égalité :

$$(uv)'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

montrer que : $[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x).v(x)\,dx + \int_a^b u(x).v'(x)\,dx$

2) En déduire que $\int_a^b u(x).v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)\,dx$

A retenir

Définition

f étant une fonction continue sur un intervalle I.

On appelle intégrale de f entre a et b, le réel noté $\int_a^b f(x)dx$

défini par: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

où a et b sont des réels de l'intervalle I et F une primitive de f sur I.

Propriétés

$\int_a^a f(x)dx = 0$

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ (Relation de Chasles)

$\int_a^c [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_b^c g(x)dx$ (Linéarité de l'intégrale)

Intégration par parties

u et v étant deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I on a :

$$\int_a^b u(x).v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)\,dx$$

Applications

1 Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^2 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 1)\,dx \quad ; \quad J = \int_3^5 \frac{1}{t-1}\,dt$$

$$K = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \sin u\,du \quad ; \quad L = \int_1^{-2} e^{2x}\,dx$$

2 a) Peut-on intégrer la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ sur l'intervalle $[0,2]$? Pourquoi ?

b) Quelle condition doivent vérifier a et b pour que $\int_a^b \dfrac{dt}{1-t}$ existe ?

3 On donne la fonction f telle que $f(x) = |\,2x - 3\,|$.

a) Justifier l'existence de $\int_0^2 f(x)dx$.

b) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue , puis calculer $\int_0^3 \left|2x-3\right| dx$

4 a) Calculer $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x+2} dx$

b) Soit, $K = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x+2} dx$ calculer $2I + K$. En déduire la valeur de K.

5 En utilisant une intégration par parties , calculer :

a) $\int_1^e ln(x)\,dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

II. Intégrales et inégalités

Activités de découverte

Activité 1:

Soit f une fonction définie continue et positive sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.
a) F étant une primitive de f sur I, montrer que F est croissante sur I.

En déduire que $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

b) Soient g et h deux fonctions définies et continues sur I, et telles que $g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in I$. Comparer $\int_a^b g(x)dx$ *et* $\int_a^b h(x)dx$.

Activité 2 :

A l'instant t le tableau de bord d'une voiture indique la distance parcourue $x(t)$ et la vitesse $v(t)$. On sait que $x'(t) = v(t)$.
a) Quelle est la vitesse moyenne $\overline{v}$ de l'automobile entre les instants t_1 et t_2 ?
b) Montrer que la distance parcourue par l'automobile entre les instants t_1 et t_2 est égale à :

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

Exprimer alors $\overline{v}$ à l'aide de l'intégrale précédente.

• Plus généralement f étant une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels distincts de I, on appelle **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ le réel :

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

Activité 3:

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I , a et b deux réels distincts de I.
On suppose que pour tout réel $x \in [a,b]$ on a : $m \leq f(x) \leq M$.

Montrer que $m \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)dt \leq M$

Cette inégalité s'appelle **inégalité de la moyenne.**

Activité 4:

Soit F une primitive de f. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction F sur l'intervalle $[a,b]$, montrer qu'il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\,f(c).$$

A retenir

Positivité

Si $a \leq b$ et si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Si $a \leq b$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Valeur moyenne

f étant une fonction définie et continue sur un intervalle I, a et b deux réels distincts de I, on appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ et on note $\overline{f}$ le réel :

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

Inégalité de la moyenne

f étant une fonction définie et continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I, si pour tout réel $x \in [a,b]$ on a : $m \leq f(x) \leq M$, alors

$$m \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)dt \leq M$$

Égalité de la moyenne

f étant une fonction définie et continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I, il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Si $a \neq b$ alors l'égalité de la moyenne s'écrit : $\overline{f} = f(c)$.

Applications

a) Justifier chacune des inégalités suivantes :

1

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2+1}dx \geq 0 \qquad \textit{et} \qquad \int_1^9 (-x^2+4\sqrt{x}-3)\,dx \geq 0$$

b) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$ on a : $0 \leq \dfrac{1}{x^3+1} \leq \dfrac{1}{2}$.

En déduire que $0 \leq \displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t^3+1} \leq \frac{1}{2}$

2 Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur $[a,b]$ dans chacun des cas suivants:

a) $f(x) = 3$, $x \in [-1,2]$ *b)* $f(x) = \sin x$, $x \in [0,\pi]$

c) $f(x) = -x + 5$, $x \in [0,\frac{5}{2}]$

3 L'intensité du courant étant variable en fonction du temps t , elle est donnée par la fonction i :

$$i(t) = 2\sin(120\pi t + \frac{\pi}{2})$$

a) Montrer que $T = \dfrac{1}{60}$ est une période de cette fonction.

b) Calculer la valeur moyenne de i sur cette période.

III. Calculs d'aires planes

Activités préliminaires

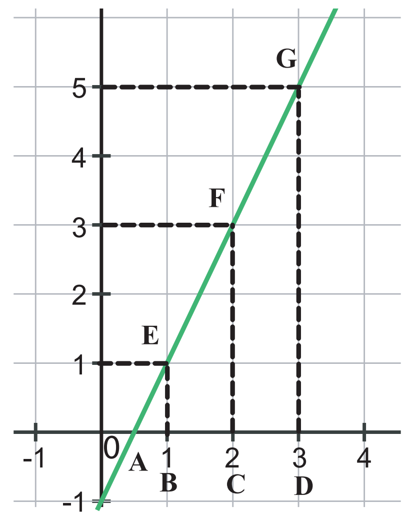
Activité 1 :

Le schéma suivant est une représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto 2x - 1$

L'unité d'aire est celle d'un carré de longueur 1.

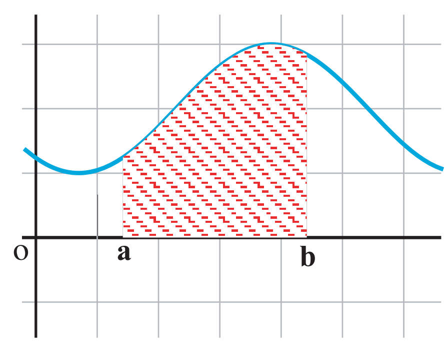
a) Déterminer l'aire du triangle ACF puis calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx$. Que remarque-t-on ?

b) Déterminer l'aire du trapèze BDGE puis calculer $\int_{1}^{3} f(x)dx$. Que remarque-t-on ?



Plus généralement on admet que si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$ alors l'aire de la partie limitée par la courbe de f ,la droite des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ a pour mesure

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

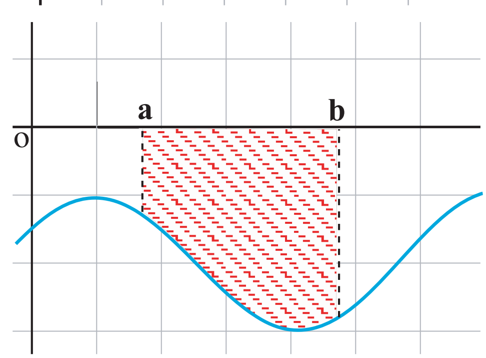


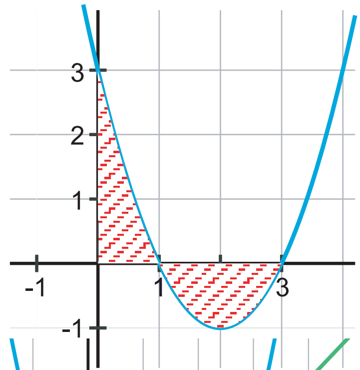
Activité 2 :

a) Soit f une fonction continue et négative sur $[a,b]$ $(a < b)$.

Montrer que l'aire A de la partie hachurée a pour mesure

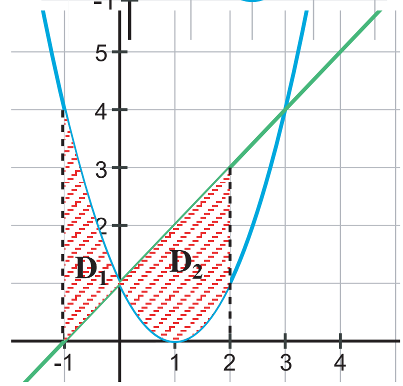
$$-\int_{a}^{b} f(x)dx$$





b) La figure ci-contre est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 3$
Donner le tableau de signe de f sur l'intervalle $[0,3]$.
Calculer l'aire de la partie hachurée et vérifier quelle a pour mesure $\int_0^3 |f(x)|\,dx$

Activité 3:

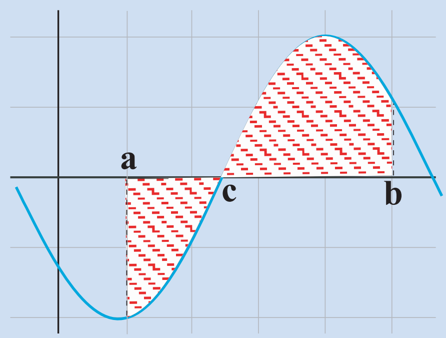


La figure ci-contre est la représentation graphique des fonctions $f : x \mapsto x+1$ et $g : x \mapsto (x-1)^2$.
a) Montrer que l'aire du domaine D_1 a pour mesure $\int_{-1}^0 [g(x) - f(x)]dx$ et que l'aire du domaine D_2 a pour mesure $\int_0^2 [f(x) - g(x)]dx$

Calculer l'aire de D_1 et l'aire de D_2.
b) Soit $D = D_1 \cup D_2$. Calculer l'aire de D et vérifier qu'elle a pour mesure $\int_{-1}^2 |g(x) - f(x)|\,dx$

A retenir

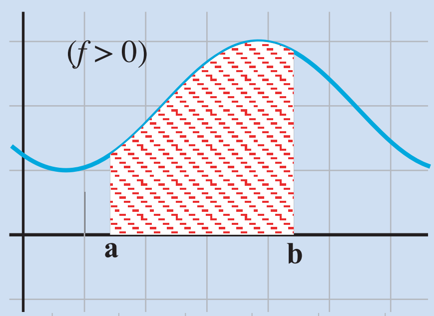
Théorème



f étant une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ (a< b) , et le plan étant rapporté à un repère orthonormé , l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ l'axe des abscisses et la courbe représentative de f a pour mesure

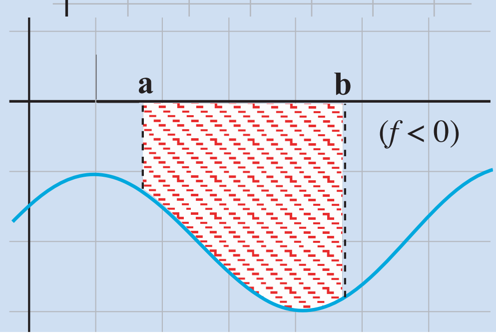
$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

En particulier



•Si f est positive sur $[a,b]$ $(a < b)$, alors

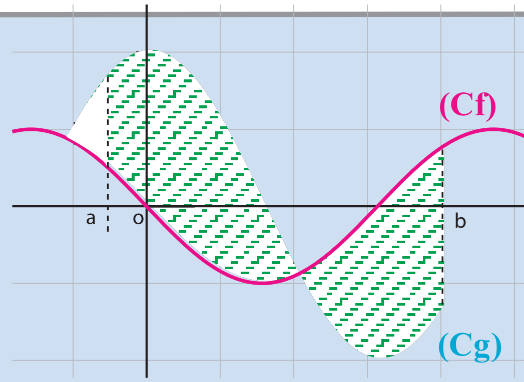
$$A = \int_a^b f(x)dx$$



•Si f est négative sur $[a,b]$ $(a < b)$, alors

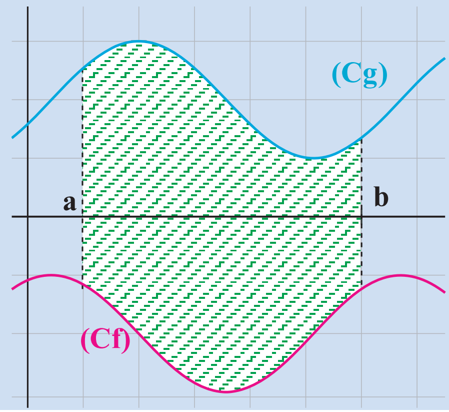
$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

A retenir



Théorème

f et g étant deux fonctions continues sur$[a,b]$ ($a < b$), et le plan étant rapporté à un repère orthonormé alors l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, l'axe des abscisses et les courbes représentatives de f et g a pour mesure $A = \int_a^b |g(x) - f(x)|\,dx$



En particulier l'aire du domaine

D = $\{M(x, y) \,/\, a \leq x \leq b \;\text{ et }\; f(x) \leq y \leq g(x)\}$

a pour mesure $A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$

Applications

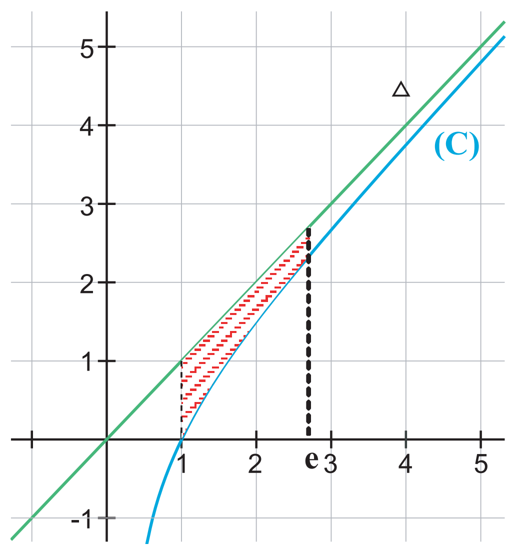
1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$. Calculer l'aire de la région du plan limitée par la courbe (C_f) , la droite de abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.

2 Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe représentative (C_f) de la fonction $f : x \longmapsto \cos x$, la droite de abscisses et les droites d'équations $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x = \pi$

3 Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$. par

$$f(x) = x - \frac{1}{x}$$

Calculer l'aire de la région du plan limitée par la courbe (C) représentative de f , Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.



Situation 1

Soit (I_n) la suite la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^x dx$

1) Calculer I_1 et I_2.

2) a) Montrer que $I_{n+1} = I_n + \dfrac{1}{(n+1)!}$

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leq 1 - x \leq 1$

c) En déduire que la suite (I_n) est positive et croissante.

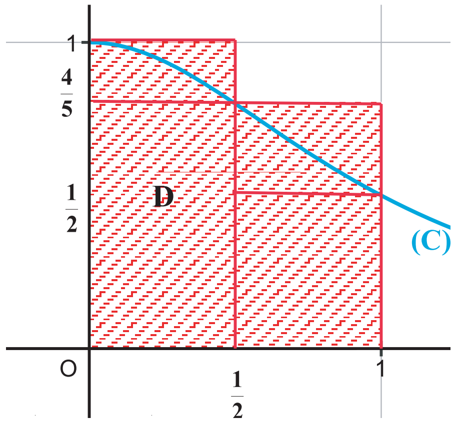
3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq I_n \leq \dfrac{e-1}{n!}$ (On pourra utiliser 2)*b*))

b) En déduire la limite de (I_n).

Situation 2

A) La courbe suivante est la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



On se propose d'encadrer l'aire du domaine $D = \left\{ M(x,y) \,/\, 0 \leq x \leq 1 \quad et \quad 0 \leq y \leq f(x) \right\}$

1) On subdivise l'intervalle $[0,1]$ en deux intervalles $[0, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, 1]$

Montrer, en considérant les rectangles de la figure que $\dfrac{13}{20} <$ aire(D) $< \dfrac{9}{10}$

2) a) On subdivise $[0,1]$ en quatre intervalles $[0,\frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ et $[\frac{3}{4},1]$

En utilisant les rectangles comme précédemment donner un encadrement de *D*.

b) Comparer l'encadrement trouvé à la question 1) et celui de la question 2).

3) Refaire le même travail en subdivisant l'intervalle $[0,1]$ en 10 intervalles de même longueur .

B) On donne la fonction g définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par $g(x) = \tan x$

1) a) Dresser le tableau de variations de g et montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $[0,1]$.

b) Déterminer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$.

2) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,1]$ et que $\left(g^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

4) Déduire des parties *A* et *B* un encadrement de π .

Avec l'outil informatique

Un programme qui donne une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction par la méthode des rectangles . La fonction f est définie par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

```
program Integration_Rectangles;
uses wincrt ;
var a,b:real;n:integer;

function f(x:real):real; {Lafonction à integrer}
begin  f:=1.0 /(1.0+x*x) end;
function Rectangles(a,b:real;n:integer):real;
   var k:integer;
   h,x,somme:real;
begin
    somme:=0.0;
    h:=(b-a)/n;
    x:=a+h/2.0;
    for k:=0 to n-1 do
    begin
        somme:=somme+f(x);
        x:=x+h;
    end;
    Rectangles:=somme*h
end;
{Le programme principal **********************************}
begin
    clrscr; write('Intégration par la méthode des rectangles');
    write('Borne inférieure  (a) " ');
    read(a);
    writeln;

    repeat
      write('Borne supérieure  (b) : ');
    read(b);
    writeln;
    until b>a;
    repeat
      write('Nombre d'intervalles : ');
    read(n);
    writeln;
    until n>0;
       writeln ('Valeur de l'intégrale est = ',Rectangles(a,b,n):0:12);
end.
```

Exercices et problèmes

1 Cocher la bonne réponse :

1) $\int_0^a dx =$ $(a)\ 0$ $(b)\ a^2$ $(c)\ a$

2) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx =$ $(a)\ 0$ $(b)\ 2$ (c) *n'existe pas*

3) $\int_0^1 e^x dx =$ $(a)\ 0$ $(b)\ e-1$ $(c)\ e$

4) $\int_{-1}^{1} x^2 dx =$ $(a)\ \frac{2}{3}$ $(b)\ 2$ $(c)\ 0$

5) $\int_0^{\pi} \sin x dx =$ $(a)\ \pi$ $(b)\ 2$ $(c)\ 0$

2 Répondre par vrai ou faux :

1) $\int_0^2 x^2 dx > 0$ 2) $\int_0^{-2} \sqrt{e^x+1}\, dx \geq 0$

3) $\int_2^3 \ln x\, dx > 0$ 4) $\int_1^2 (x+4)\, dx \geq 0$

3 Calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_1^4 \frac{x^2-1}{x} dx$, $B = \int_0^1 (t^2-t+2)dt$,

$C = \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ \ln\ x} dx$, $D = \int_1^e \frac{1}{t} e^{\ln t} dt$,

$E = \int_0^1 \frac{e^{3x}+1}{e^x} dx$ $F = \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt$,

$G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, e^{\sin t}\, dt$, $H = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x e^{x^2} dx$,

$I = \int_1^{-1} \frac{1}{(4+2t)^2} dt$, $J = \int_{-1}^{0} \frac{1}{1-2t} dt$

$K = \int_0^x \frac{t}{(1+t)^3} dt$, $L = \int_1^e \frac{e^x}{e^x-1} dx$,

$M = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$, $N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{1+\cos u} du$

4 Soient $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+e^x} dx$

et $J = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{-x}+e^x} dx$.

1) Calculer $I+J$ et $J-I$.
2) En déduire les valeurs de I et J.

5 La population d'une ville est modélisée par la fonction f définie sur $[0\ ;\ 10]$ par :

$$f(x) = 50.(1{,}04)^x$$

où x est le rang donné depuis l'an 2000 et $f(x)$ le nombre d'habitants en milliers.

a) Calculer la population de cette ville après 10 ans.
b) Calculer la valeur moyenne de cette population entre 2000 et 2010.

6 En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_0^1 t\, e^{-2t}\, dt$ $B = \int_1^e t \ln t\, dt$

$C = \int_0^{\ln 2} (t^2+1)e^t\, dt$ $D = \int_1^e x^2 \ln x\, dx$

$E = \int_0^{\pi} t \cos t\, dt$ $F = \int_1^e \ln x\, dx$

$G = \int_0^1 x^2 e^x dx$

7 Soit (I_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt \\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin t\, dt , \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) a) Calculer I_0 .
b) Calculer I_1 par une intégration par parties.
2) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$I_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1}\cos t\, dt$$

3) a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout $n \geq 2$ on a :

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$$

b) En déduire I_2 et I_3 . Puis la valeur de l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2t+t^2-t^3)\sin t\, dt$

8 Soit $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + x}{1 - x}$, $x \neq 1$.

1) Déterminer les réels a , b , c et d tels que
$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c + \dfrac{d}{1 - x}$

2) Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$

9 **1)** Soit $n \geq 1$. Calculer $\int_0^n e^{-t}\,dt$.

2) Calculer en fonction de n l'intégrale

$U_n = \int_0^n te^{-t}\,dt$ (par parties)

3) Soit $V_n = \int_0^n t^2e^{-t}\,dt$

Montrer que $V_n = 2U_n - n^2e^{-n}$, $n \geq 1$.

4) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

10 Les ventes mensuelles d'un produit durant une campagne publicitaire croissent suivant le modèle: $V(t) = \dfrac{600}{1+3e^{-0,5t}}$

où t désigne le nombre de mois écoulés à partir du début de la campagne publicitaire et $V(t)$ désigne le volume des ventes.
1) Quel était le volume des ventes au début de la campagne ?
2) Quel est le volume de vente maximum ?
3) Calculer le volume moyen des ventes au cours des 4 premiers mois.

11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1}$.

1) Montrer qu'il existe deux réels a *et b* tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$f(x) = a + \dfrac{be^x}{e^x + 1}$

2) Calculer alors

$$\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$$

12 On se propose de calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}dx$$

1) Calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_0^1 \dfrac{e^x}{1+e^x}dx$ et $B = \int_0^1 \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$

2) Déterminer les réels a,b et c tels que

$$\frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{a}{1+e^x} + \frac{b}{(1+e^x)^2}$$

3) En déduire $J = \int_0^1 \dfrac{1}{(1+e^x)^2}dx$

4) En intégrant J par parties , exprimer I en fonction de J. En déduire I .

13 Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = e^x - 2$ et $g(x) = e^x - e^{-x}$.

1) Etudier les fonctions f et g et tracer leurs courbes représentatives C_f et C_g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(on prendra pour unité : 2 cm).

2) Déterminer le point commun à C_f et C_g.

3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre C_f et C_g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

4) Etudier la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement le résultat.

14 On définit la fonction f sur l'intervalle $I =]-2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x + 2}$$

On appelle (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Déterminer trois réels a,b et c tels que

pour tout $x \in I$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 2}$

2) Etudier alors les variations de f sur I.

Préciser les limites de f aux bornes de I. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

3) Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote (D) oblique.

Etudier la position (C_f) par rapport à (D).

4) Tracer (C_f) ainsi que ses asymptotes:(unité graphique = 2 cm).

5) Pour $a \geq 1$, on définit la partie du plan A(a) comme étant l'ensemble des points M de coordonnées (x ; y) tels que:

$$1 \leq x \leq a \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)$$

a) Représenter la partie A(3) sur la figure.

b) Vérifier que

$$\int_1^3 [f(x)-3x+7]dx = 12\ln\frac{2}{3}$$

Quelle est l'aire de $A(3)$ en cm²?

c) Déterminer en fonction de a l'intégrale

$$I(a) = \int_1^a [f(x) - 3x + 7]dx$$

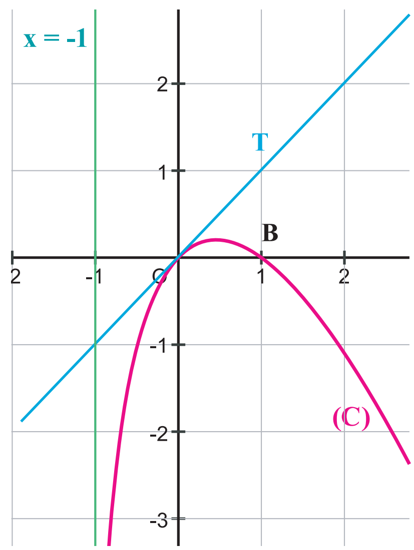
Quelle est l'aire de A(a) en fonction de a, en cm²? Quelle est la limite de cette aire si a tend vers $+\infty$?

15 **1)** La fonction f représentée ci-dessous par la courbe (C) est définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = (ax+b)\ln(x+1)$$

où a et b sont deux constantes. La courbe (C) passe par le point $B(1,0)$ et admet à l'origine une tangente T d'équation $y = x$.

Déterminer les réels a et b



2) Soit la fonction F définie sur $]-1,+\infty[$ par

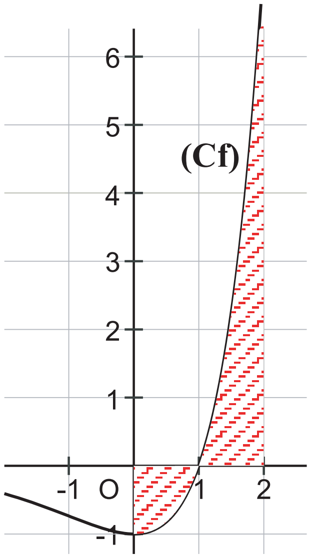
$$F(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} - \left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}\right)\ln(x+1)$$

a) Montrer que la fonction F est une primitive de f qui s'annule en 0.

b) Calculer $\int_0^1 f(x)dx$ Donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

16 Soit f la fonction telle que $f(x) = (x - 1)e^x$.

$x \in \mathbb{R}$; C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (voir figure).



1) Calculer , par une intégration par parties, chacune des intégrales suivantes

$$I=\int_0^1 f(x)dx \quad \text{et} \quad J=\int_1^2 f(x)dx$$

2) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par C_f , $x=0$, $x=2$ et $y=0$

(La partie hachurée voir la figure)

17 **1)** Calculer, par parties, l'intégrale :

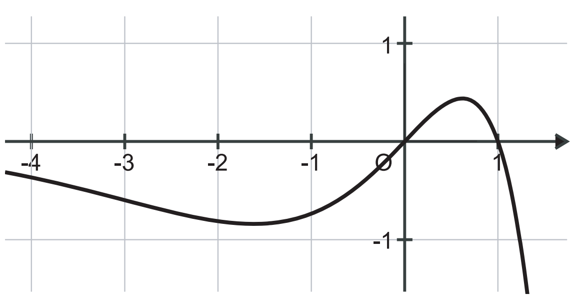
$$\mathrm{I} = \int_0^{\alpha}(x-x^2)e^x dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}-)$$

2) Soit $f(x) = (x - x^2)\, e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(unité = 2 cm) (Voir figure ci-dessous).

a) Calculer, en cm², l'aire $A(\alpha)$ de la région limitée par (C), $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et les droites $x = \alpha$ et $x = 1$.



b) calculer : $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$

18 **1)** Soit la suite (I_n) définie par

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

a) Montrer que $I_1 = \dfrac{e^2+1}{4}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$2\, I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$ pour tout $n \geq 1$.

c) En déduire I_2 et I_3.

2) Soient les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\, e^{2x}$ et $g(x) = x^3\, e^{2x}$.

a) Étudier la position relative de f et g .

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , (C_g) , $x = 0$ et $x =1$.

3) a) Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et que (I_n) est décroissante.

b) Déduire de la question 1) b) et de la monotonie de (I_n) que :

$$\frac{e}{n+3} \leq \mathrm{I}_n \leq \frac{e}{n+2}$$

Déterminer alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$

Bernhard Riemann est né le 17 septembre 1826 à Hanovre.

De 1847 à 1849, c'est à Berlin qu'il poursuit ses études, avant de revenir à Göttingen préparer sa *Dissertation inaugurale* (selon la terminologie allemande) sous la direction de Gauss. Il la soutient en 1851 : elle concerne principalement la théorie des fonctions d'une variable complexe, dont il s'intéresse particulièrement aux propriétés géométriques. Il donne notamment la définition de ce qu'on nomme désormais une surface de Riemann.
Dans la foulée, Riemann prépare son habilitation pour devenir Privat Dozent. Il étudie désormais la représentation des fonctions par des séries trigonométriques, et au passage pose les jalons de **l'intégrale de Riemann** : contrairement à Cauchy, il ne se limite plus aux fonctions c ontinues.

L'intégrale de Riemann d'une fonction continue

On sait depuis Mercator et Leibniz, que si une fonction est positive, l'intégrale sur un intervalle [a,b] évalue l'aire sous la courbe. L'idée de Riemann fut de remplacer un arc de courbe sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$ par un segment d'ordonnée $f(c_i)$, $x_i < c_i < c_{i+1}$: on parle de fonction en escalier.
Considérons un intervalle [a,b] sur lequel une fonction f est continue et soit :

$$a = x_o < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

une subdivision s = (x_i) de [a,b] en n sous-intervalles. La somme :

$$S_n = (x_1 - x_o) f(c_1) + (x_2 - x_1)\ f(c_2) + (x_3 - x_2)f(c_3) + ... + (x_n - x_{n-1}) f(c_n)$$

sur cet intervalle, est une somme de Riemann attachée à f sur l'intervalle [a,b].
Si, lorsque n tend vers l'infini, de sorte que le plus grand des pas $x_i - x_{i-1}$ tende vers 0, la somme S_n admet une limite finie pour toute subdivision s et tout choix des c_i, on dit que *f* est intégrable au sens de Riemann. On démontre alors que cette limite ne dépend ni de s ni des c_i choisis. On l'appelle intégrale de *f* sur [a,*b*] au sens de Riemann et on écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \int_a^b f(x)dx$$

(le signe $\int_a^b$ est dû à Leibniz)

- Toute fonction numérique continue sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle.
- Une fonction numérique bornée sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle si et seulement si ses sommes de Riemann sont convergentes.

Approximation :

Ce principe permet *le calcul approché d'intégrales* en choisissant une subdivision régulière: de pas : $x_{i+1} - x_i = (b - a)/n$, indépendant de i, et un n "assez grand". On obtient une succession de rectangles approchant l'aire sous la courbe, en rose ci-dessus où ci est choisi ici au "milieu" de $[x_i ; x_{i+1}]$: on calcule :

$$Sn = h.f(c_i)\ ,\ i \text{ variant de } 0 \text{ à } n-1$$

avec : $h = (b - a)/n$, $x_i = a + i.h$, $c_i = (x_{i+1} + x_i)/2 = x_i + h/2$.
Le passage à la limite fournit l'intégrale cherchée.

•les arcs de courbe $(M_i M_{i+1})$ étant remplacés par les segments "horizontaux" $[M_iN_{i+1}]$, on parle de la méthode des rectangles (méthode correspondant à la théorie ci-dessus). Mais la méthode converge "lentement" : elle nécessite de "grandes" valeurs de n pour obtenir un résultat acceptable.

•les arcs de courbe (M_iM_{i+1}) étant remplacés par les segments $[M_iM_{i+1}]$, ce qui a pour effet *d' accélérer*la convergence, on parle de la méthode des trapèzes (interpolation linéaire).

Chapitre 9

ARITHMETIQUE

I . Divisibilité dans $\mathbb{Z}$
II . Division euclidienne
III . Congruences
IV . PGCD et PPCM de deux entiers
V . Théorème de Bézout
VI . Lemme de Gauss
VII . Application : résolution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ d'équations du type $ax+by = c$ où a, b et c sont des entiers relatifs

Euclide dans l'école d'Athènes de Raphaél
(Musée du Vatican)

I. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Activités préliminaires

Activité 1 :

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+5} - 3^n$ est un multiple de 11.

Activité 2 :

1) Vérifier que 111 est un multiple de 37
2) En déduire que tout nombre de trois chiffres identiques en base décimale est un multiple de 37

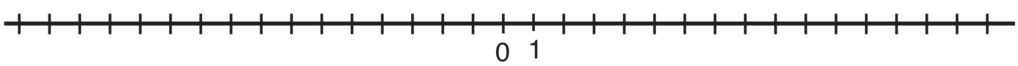
Activité 3 :

On choisit un entier s'écrivant avec quatre chiffres, par exemple 7892 puis on l'écrit «à l'envers» : 2987.
On fait la somme des deux nombres obtenus. Obtient-on un multiple de 11 ?
Recommencer avec d'autres nombres de quatre chiffres. Expliquer le phénomène observé.

Activités de découverte

Activité 1 :

Reproduire la droite réelle ci-dessous



1) Repérer en vert sur cette droite l'ensemble E des entiers relatifs de la forme 4k où $k \in \mathbb{Z}$.
2) Repérer en rouge sur cette droite l'ensemble F des entiers relatifs de la forme $(-4)k$ où $k \in \mathbb{Z}$. Que constate-t-on ?

➢ Tout entier relatif de la forme $4k$ où $k \in \mathbb{Z}$, s'appelle **multiple** de 4 dans $\mathbb{Z}$.

➢ L'ensemble de multiples de a est identique à l'ensemble de multiples de (- a).

3) Choisir deux multiples de 4 et en faire la somme. Obtient-on encore un multiple de 4 ? Enoncer une propriété générale et la démontrer.
4) On considère deux multiples consécutifs de 4. Si le plus petit s'écrit $4k$ où k est un entier, comment s'écrit le suivant ? Comment s'écrivent les nombres qui sont compris entre ces deux multiples consécutifs ?

Activité 2 :

1) Soit a un entier relatif non nul, citer quatre diviseurs distincts de a .
2) Soit a un entier relatif non nul, montrer que si un entier b divise a alors $-|a| \leq b \leq |a|$.
En déduire que tout entier non nul admet un nombre fini de diviseurs.

Activité 3 :

a,b,c désignent des entiers relatifs non nuls et différents de 1. Démontrer les propriétés suivantes :

1) Si a divise b et b divise a alors $a = b$ ou $a = -b$.
2) Si a divise b et b divise c alors a divise c .
3) Si a divise b et c , aalors, pour tout entiers relatifs n et m, a divise $nb + mc$

A retenir

Définitions

Soient a et b deux entiers relatifs.
On dit que a **est un multiple de** b s'il existe un entier relatif k tel que $a = kb$.
Si $b \neq 0$, dire que b divise a signifie qu'il existe un entier relatif k tel que $a = k\,b$, c'est à dire, que a est un multiple de b.

Remarques

- Les multiples d'un entier a sont les nombres : 0, a, $2a$, …., $k\,a$ …et 0, $-a$ $-2a$, …, $-k\,a$, …
- Tout entier relatif a non nul et différent de 1 admet au moins quatre diviseurs entiers relatifs : 1, -1, a , $-a$.
- Si $a \neq 0$, tout diviseur b de a vérifie $-|a| \leq b \leq |a|$.
- Tout entier relatif non nul a divise 0, mais 0 ne divise acun entier relatif.

Propriétés

a,b et c désignent des entiers relatifs non nuls.

- Si a divise b alors $-a$ divise b.
- Si a divise b et b divise a alors $a = b$ ou $a = -b$.
- Si a divise b et b divise c alors a divise c .
- Si a divise b, alors pour tout entier relatif non nul k , ka divise kb.
- Si a divise b et c, alors pour tous entiers relatifs n et m, a divise $nb + mc$.

Applications

1 1) Déterminer la liste des diviseurs positifs de chacun des entiers : 72 ; 75 ; 83 ; 120 ; 200.
2) Déterminer la liste des diviseurs de chacun des entiers relatifs : 50 ; -56 ; -8 ; 63.

2 Démontrer que la somme de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 3.

3 Comment choisir l'entier relatif n pour que n divise $n + 8$?

4 n étant un entier relatif. Démontrer que $n(n^2-1)$ est un multiple de 2 et un multiple de 3.

5 Déterminer les entiers n pour que les rationnels suivants soient des entiers relatifs :

a) $\dfrac{n+2}{n-4}$; b) $\dfrac{2n+8}{n-2}$; c) $\dfrac{7n-1}{n+3}$; d) $\dfrac{-6n+3}{n+5}$

II. Division euclidienne

Activités préliminaires

Activité 1 :

Dans chaque cas, écrire la division euclidienne de a par b :

a) $a = 2007$ et $b = 35$; b) $a = 5000$ et $b = 17$; c) $a = 18$ et $b = 50$.

Activité 2:

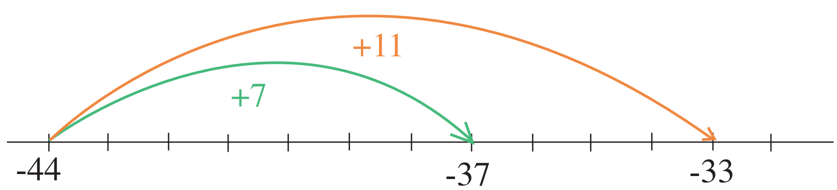
A et B sont deux entiers naturels vérifiant $A = 13B + 50$.

Ecrire la division euclidienne : a) de A par 13 ; b) de $3A + 20$ par 13.

Activités de découverte

Activité 1 :

1) Encadrer -37 par deux multiples consécutifs de 11.



2) Vérifier alors que : $- 37 = - 44 + 7 = 11 \times (- 4) + 7$.

➢ La dernière égalité traduit ce qu'on appelle **la division euclidienne de** - 37 par 11.

Le reste de cette division est l'entier positif 7.

3) A partir de l'égalité : $- 356 = 17 \times (-20) -16$, compléter l'égalité : $-356 = 17 \times (\dots)+ 1$.

4) Quel reste obtient-on en divisant - 37 par - 4 ?

➢ De façon générale, si a et b sont deux entiers relatifs tel que b est non nul, effectuer **la division euclidienne de** a **par** b, c'est trouver le couple $(q\ ;\ r)$ d'entiers relatifs tels que :

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < |b|$$

5) Ecrire la division euclidienne de 118 par 23, puis celle de - 118 par 23, de 118 par - 23, de -118 par -23.

Activité 2 :

1) a et b sont deux entiers relatifs tels que b est non nul. En effectuant la division euclidienne de a par b, quelles sont les valeurs possibles du reste ?

2) Expliquer pourquoi tout entier a peut s'écrire sous la forme $2k$ ou $2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3) Démontrer que le nombre $A = n (n^2 +5)$ où n est entier relatif, est divisible par 3.

A retenir

Théorème (admis)

Soit a un entier relatif et b un entier relatif non nul. Il existe un unique couple (q,r) d'entiers relatifs vérifiant à la fois : $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$.

Définitions

Soit a un entier relatif et b un entier relatif non nul.
Effectuer **la division euclidienne de a par b** , c'est trouver le couple d'entiers relatifs (q,r) tels que : $a = bq+r$ et $0 \leq r < |b|$.
q est **le quotient**, r est **le reste**, a s'appelle le **dividende** et b le **diviseur**.

Remarques

Si $a = bq+r$ et $0 \leq r < |b|$.

- b divise a si et seulement si le reste r est nul.
- Le reste ne peut prendre que l'une des valeurs parmi 0 ; 1 ; 2 ;.... ; $|b|$-1.
- b étant fixé, les entiers relatifs peuvent être classés selon leur reste dans la division euclidienne par b .

Applications

1 Déterminer le quotient q et le reste r de la division euclidienne de a par b .
a) $a = 117; b = 28$ b) $a = -317; b = 21$; c) $a = -671$; $b = -6$
Sachant que 287025 = 635 x 452 + 5.

2 Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de :
a) - 287 025 par 635 b) - 287 025 par 452

3 Soit m et n deux entiers naturels.
Les restes de la division euclidienne de m et n par 11 sont respectivement 2 et 7.
Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres $m+n$ et $m-n$ par 11. En déduire celui de $m^2 - n^2$.

4 Déterminer les entiers naturels a,b et c tels que : $\frac{59}{3^2} = a + \frac{b}{3} + \frac{c}{3^2}$.

III. Congruences

Activités de découverte

Activité 1 :

Le 1er janvier 2010 est vendredi, quel jour de la semaine sera le 20 mars 2015 ?

Activité 2 :

On a écrit les entiers par rangées de 2, de 3, de 4, … dans différents tableaux.
Quelle propriété commune ont tous les entiers d'une même colonne d'un tableau ?

0	1
2	3
4	5
6	7
8	9
10	11
12	13

0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
12	13	14
15	16	17
18	19	20

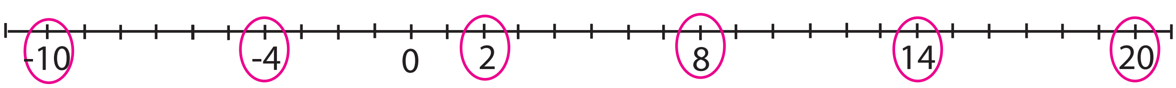
0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	28	29
30	31	32	33	34

Activité 3 :

a et a' étant deux entiers relatifs quelconques, on se demande à quelle condition a et a' ont le même reste lorsqu'on les divise par un entier naturel non nul n .

1) Le dessin ci-dessous indique des nombres qui « divisés par 6 donnent un reste égal à 2 ».



Que peut-on dire de la différence entre deux d'entre eux ?

2) Sachant que $a = nq + r$ et $a' = nq' + r'$ avec $0 \leq r < n$ *et* $0 \leq r' < n$,
vérifier que lorsque a et a' ont le même reste dans la division euclidienne par n, $a - a'$ est un multiple de n.

Réciproquement, supposer que $a - a' = nk$ et que $a = nq + r$. Prouver que r est aussi le reste de la division de a' par n .

➢ On dit que a et a' sont **congrus** modulo n, et on note $a \equiv a'\,[n]$
(on lit a congru à a' modulo n)

Vérifier les congruences suivantes :

- $a \equiv a\,[n]$ pour tout entier naturel non nul.
- $a \equiv r\,[n]$ lorsque r est le reste da la division euclidienne de a par n.
- $14 \equiv 2\,[6]$; $-2 \equiv 5\,[7]$; $27 \equiv -3\,[10]$

Activité 4 :

a, b, c et *d* sont des entiers relatifs, *n* un entier naturel non nul. En utilisant la définition d'une congruence, prouver les résultats suivants :

1) Si $a \equiv b\,[n]$ alors $b \equiv a\,[n]$

2) Si $a \equiv b\,[n]$ et $b \equiv c\,[n]$ alors $a \equiv c\,[n]$

3) Si $a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]$ alors

- $a + c \equiv b + d\,[n]$ et $a - c \equiv b - d\,[n]$
- $ac \equiv bd\,[n]$
- $a^p \equiv b^p\,[n]$ pour tout $p \in \mathbb{N}$

C'est en 1801 que Carl Friedrich Gauss a introduit la notion de congruence et le symbole $\equiv$

A retenir

Définition

Soit n un entier naturel non nul, *a* et *b* deux entiers relatifs.
On dit que *a* et *b* sont **congrus modulo *n*** lorsque *a* et *b* ont le même reste dans la division euclidienne par *n*. On note : $a \equiv b$ (modulo *n*) ou $a \equiv b\,[n]$

Théorème

Soit n un entier naturel non nul, *a* et *b* deux entiers relatifs. On a :
$a \equiv b\,[n]$ si, et seulement si, $a - b$ **est multiple de *n***.

Remarque

• *n* étant un entier naturel non nul, si *r* est le reste dans la division euclidienne de *a* par n alors $a \equiv r\,[n]$ mais une relation $a \equiv r\,[n]$ ne permet de conclure que *r* est le reste dans la division euclidienne de *a* par *n* que dans le cas où $0 \leq |n|$

Propriétés

Soient n un entier naturel non nul et *a,b , c, d* des entiers relatifs.

1) $a \equiv a\,[n]$

2) Si $a \equiv b\,[n]$ alors $b \equiv a\,[n]$.

3) Si $a \equiv b\,[n]$ et $b \equiv c\,[n]$ alors $a \equiv c\,[n]$.

4) Si $a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]$ alors $a + c \equiv b + d\,[n]$ et $a - c \equiv b - d\,[n]$.

5) Si $a \equiv b \left[n\right]$ et $c \equiv d\left[n\right]$ alors $a \times c \equiv b \times d\left[n\right]$.

6) Si $a \equiv b \left[n\right]$ alors $a^p \equiv b^p \left[n\right]$ pour tout $p \in \mathbb{N}$

Remarque

Pour l'addition, la soustraction et la multiplication les règles de calculs sur les égalités se transmettent aux congruences.

Applications

1 Interpréter à l'aide des congruences la représentation suivante :

1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

2 1) Comment écrire par une congruence que a est un multiple de m ?

2) Compléter les congruences suivantes :

$17 \equiv$ .... [5] ; $-3 \equiv$ ... [8] ; $21 \equiv$ ... [3].

3) Les congruences suivantes sont-elles vraies ?

$27 \equiv 37\ [3]$; $145 \equiv 1315\ [5]$; $-5 \equiv -4\ [2]$.

3 Vérifier que :

$10 \equiv 3 \left[7\right]$, $100 \equiv 2 \left[7\right]$, $1000 \equiv -1 \left[7\right]$, $10000 \equiv -3 \left[7\right]$, $100000 \equiv -2 \left[7\right]$

$1000000 \equiv 1 \left[7\right]$

En déduire, parmi ces nombres, ceux qui sont multiples de 7 :

4 123 ; 321 083 ; 39 398 ; 1 111 117 ; 3 333 337.

4 Vérifier que $9 \equiv -1 \left[10\right]$. En déduire le chiffre des unités des nombres 9^{2n} et 9^{2n+1}.

5 1) Montrer que 9 divise 7^{3n} -1pour tout n nombre entier naturel.

2) Démontrer que l'on a : $2 \times 35^{2006} - 3 \times 84^{2007} \equiv 5\left[17\right]$

6 1) Quel est le reste de la division euclidienne par 7 du nombre 32^{45} ?

2) Quel est le reste de la division euclidienne par 19 du nombre 57383^{114} ?

3) Quel est le reste de la division euclidienne par 7 du nombre 91234^{2007} ?

4) Quel est le reste de la division euclidienne de 2006^{2008} par 2007 ?

7 a et b ont pour reste 17 et 15 dans la division par 19.

Quel est le reste de $a + b$, de ab , de $2a-5b$, de $a^2 b^3$ par 19 ?

8 1) Prouver par des exemples, qu'en général, lorsque c divise a et a'

« $a \equiv a'\left[n\right]$ » n'implique pas « $\dfrac{a}{c} \equiv \dfrac{a'}{c}\left[n\right]$ ».

2) Prouver que si a, a' et n sont divisibles par un même entier c,

alors « $a \equiv a'[n]$» implique « $\frac{a}{c} \equiv \frac{a'}{c}\left[\frac{n}{c}\right]$ ».

IV. PGCD et PPCM de deux entiers

Activités préliminaires

Activité 1 :

1) Quels sont les diviseurs de 9? de 12?
2) Déterminer $9 \wedge 12$ (plus grand commun diviseur de 9 et 12).
3) Déduire $63 \wedge 84$ puis $63 \wedge 147$.

Activité 2 :

1) Donner les 6 premiers multiples positifs de chacun des entiers 6 et 8.
2) Déterminer $6 \vee 8$ (plus petit commun multiple de 6 et 8)
3) Déduire $30 \vee 240$ puis $210 \vee 240$

Activités de découverte

Activité 1 :

Déterminer les diviseurs de 12 puis les diviseurs de (- 18). En déduire les diviseurs communs à 12 et (-18). Quelle est alors le plus grand commun diviseur de 12 et (-18). Ce nombre est noté **PGCD** (12 ;-18) ou $12 \wedge (-18)$

Activité 2:

Soit a et b deux entiers relatifs et $D(a , b)$ l'ensemble des diviseurs communs à ces deux entiers.
1) Démontrer que $D(a, b) = D(a - b, b) = D(a - k b, b)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
2) Si $0 < b \leq a$, démontrer que $D(a,b) = D(r,b)$, où r est le reste de la division euclidienne de a par b .
3) Si a et b sont tous les deux non nuls, démontrer que $D(a, b)$ admet un plus grand élément d.Ce nombre est le PGCD de a et b . Pourquoi ce nombre est strictement positif ?
Conclure que $PGCD(a, b) = \text{PGCD}(b,a) = PGCD(|a|,|b|)$;
donc on se ramène en général à a et b positifs.
4) Chercher $PGCD$ (240,36) en appliquant plusieurs fois de suite la propriété vue dans 2).
5) Si $0 < b \leq a$, démontrer que PGCD (a, b) = PGCD (b, r) où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

Activité 3:

1) Si a et b sont tous les deux non nuls, vérifier que $|a\, b|$ est un multiple commun à a et b .
2) En déduire l'existence d'un plus petit commun multiple, strictement positif, à a et b.
Ce nombre se note ***PPCM*** *(a , b) ou* $a \vee b$.
Déduire que $PPCM\,(a, b) = PPCM\,(b, a) = PPCM\,(|a|,|b|)$.

Activité 4 :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

1) En écrivant l'algorithme d'Euclide pour la recherche du $PGCD(a, b)$ puis en multipliant les égalités obtenues par un entier relatif non nul k, montrer que :

$$PGCD(ka, kb) = |k| \, PGCD(a, b).$$

2) a) Montrer que si $d = PGCD(a, b)$ alors il existe a' et b' deux entiers premiers entre eux (c'est-à -dire $a' \wedge b' = 1$) tels que $a = da'$ et $b = db'$.

b) Montrer que si $a = da'$ et $b = db'$ avec $a' \wedge b' = 1$ et $d > 0$ alors $a \wedge b = d$.

la propriété démontrée en 2) est **la propriété caractéristi**que du $PGCD$. Enoncer cette propriété.

A retenir

Définitions

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

1) Le plus grand entier qui divise à la fois a et b s'appelle **le plus grand commun diviseur** ou **PGCD** de a et b. On le note $a \wedge b$.

2) Le plus petit entier strictement positif qui est à la fois multiple de a et b s'appelle **le plus petit commun multiple** ou **PPCM** de a et b. On le note $a \vee b$

3) Deux entiers relatifs non nuls a et b sont **premiers entre eux** lorsque leur PGCD est égal à 1.

Propriétés

1) Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

Pour tout k entier relatif non nul, $PGCD(ka, kb) = |k| \, PGCD(a, b)$.

2) Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et d un entier naturel non nul.

$d = PGCD(a, b)$ si, et seulement si, $a = da'$ et $b = db'$ avec a' et b' entiers premier entre eux.

L'algorithme d'Euclide

Le résultat suivant permet de calculer $d = PGCD(a, b)$ sous forme algorithmique.

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Considérons la suite des divisions euclidiennes :

- de a par b : $a = bq_0 + r_0$
- de b par r_0 (si $r_0 \neq 0$) : $b = r_0q_1 + r_1$
- de r_0 par r_1 (si $r_1 \neq 0$) : $r_0 = r_1q_2 + r_2$
- de r_{n-1} par r_n (si $r_n \neq 0$) : $r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}$

Lorsque b ne divise pas a, le $PGCD$ de a et b est le **dernier reste non nul** obtenu par cet algorithme.

Si b divise a alors $PGCD(a,b) = b$.

Remarque

Pour $b \neq 0$ $PGCD(1,b) = 1$ et , $PGCD(0,b) = |b|$

Si a et b sont deux entiers non nuls tels que b divise a alors PPCM$(a, b) = |a|$

1 Dans chaque cas, déterminer le PGCD, puis le PPCM des entiers a et b par une méthode au choix.
a) $a = 35$ et $b = 84$; b) $a = 39$ et $b = 52$; c) $a = -60$ et $b = 45$; d) $a = 18$ et $b = -12$.

2 A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer $a \wedge b$.
a) $a = 441$ et $b = 777$; b) $a = 2007$ et $b = 9185$; c) $a = 1600$ et $b = 259$.

3 Les entiers suivants sont-ils premiers entre eux ?
a) $a = 4847$ et $b = 5633$ b) $a = 5617$ et $b = 813$

4 Soit a et b deux entiers non nuls.Sachant que $a \wedge b = b \wedge (a - b)$. Calculer par cette méthode $1575 \wedge 210$.

V. Théorème de Bézout

Activités de découverte

Activité 1 :

1) Ecrire l'algorithme d'Euclide pour déterminer $PGCD(145,55)$.
2) En partant de la dernière égalité où le reste est non nul et en exprimant celui-ci successivement en fonction des restes précédents,déterminer un couple (u;v) d'entiers relatifs tels que : $145u + 55v = PGCD(145,55)$.


E Bézout

Activité 2 :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et d leur $PGCD$.
Considérons l'ensemble G des entiers naturels non nuls de la forme $(am + bn)$ (avec m et n dans $\mathbb{Z}$).
1) Vérifier que $|a| \in G$. En déduire que G admet un plus petit élément D.
Il existe alors u et v deux entiers relatifs tels que $au + bv = D$.
2) Montrer que d divise D, en déduire que $d \leq D$.
3) La division euclidienne de a par D s'écrit $a = Dq + r$ avec $0 < r < D$.
Exprimer r en fonction de a ,b , u, v et q. En déduire que r est de la forme $am + bn$.
4) Déduire que $r = 0$ et que D divise a .
5) On montre de façon analogue que D divise b . Déduire que $D = d$

Activité 3 :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. En utilisant le résultat de l'activité 2 démontrer que
1) Tout diviseur commun à a et b divise leur $PGCD$.

2) a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$

3) L'équation $ax + by = c$ (c entier fixé non nul) admet des solutions entières si, et seulement si c est un multiple de $PGCD\ (a,b)$.

A retenir

Théorème

a et b désignent deux entiers relatifs non nuls et d leur $PGCD$. Il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = d$.

Théorème de Bézout

a et b désignent deux entiers relatifs non nuls. a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que :

$$au + bv = 1.$$

L'égalité $au + bv = 1$ s'appelle **relation de Bézout** (ou identité de Bézout *)

Remarque

Le théoréme de Bézout est un théorème d'existence mais pas d'unicité.

Conséquences

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls

1) tout diviseur commun à a et b divise leur $PGCD$.

2) l'équation $ax + by = c$ (c entier fixé non nul) admet des solutions entières si, et seulement si c est multiple de $PGCD\ (a, b)$.

***Ce théorème fut en fait énoncé pour les entiers par Bachet de Méziriac (1581-1638), mais fut ensuite démontré et utilisé dans d'autres domaines par Etienne Bézout (1730-1783).**

Applications

1 Pour déterminer les entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$ quand a et b sont premiers entre eux, l'examen rapide des multiples de a et b peut permettre de conclure, sinon, on écrit l'algorithme d'Euclide pour a et b , puis on exprime pas à pas chacun des restes comme combinaison linéaires de a et b , jusqu'au dernier reste non nul qui est PGCD(a, b).

Ce procédé permet d'exprimer $PGCD(a, b)$ comme combinaison linéaire de a et b, que a et b soient premiers entre eux ou non.

On utilise ci-dessous l'algorithme d'Euclide pour déterminer $212 \wedge 87$

Etape 1 : $212 = 2 \times 87 + 38$

Etape 2 : $87 = 2 \times 38 + 11$

Etape 3 : $38 = 3 \times 11 + 5$

Etape 4 : $11 = 2 \times 5 + 1$

Etape 5 : $5 = 5 \times 1$

1) De l'étape1, déduire $u_2 \in \mathbb{Z}$ et $v_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $38 = au_2 + bv_2$

2) De l'étape 2, déduire $u_3 \in \mathbb{Z}$ et $v_3 \in \mathbb{Z}$ tels que $11 = au_3 + bv_3$

3) De l'étape 3, déduire $u_4 \in \mathbb{Z}$ et $v_4 \in \mathbb{Z}$ tels que $5 = au_4 + bv_4$

4) De l'étape 4, déduire $u_5 \in \mathbb{Z}$ et $v_5 \in \mathbb{Z}$ tels que $1 = au_5 + bv_5$

2 Pour $a = 4$ et $b = 9$, vérifier que les couples (-2 ;1) ; (7 ;-3) ; (97 ;-43) sont tous des couples $(u\ ;v)$ vérifiant l'égalité $au + bv = 1$.

3 Démontrer que les entiers a et b sont premiers entre eux, où n est un entier.

a) $a = n$; $b = 2n+1$ b) $a = 2n+3$; $b = 3n+5$ c) $a = n^2+1$; $b = n$

4 n désigne un entier naturel non nul.
1) Vérifier que $(n^3+1)^2 = n^2(n^4+2n)+1$
2) En déduire que les entiers naturels $n^3 + 1$ et $n^4 + 2n$ sont premiers entre eux

5 Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer une solution particulière $(x_0\ , y_0)$ d'entiers relatifs de chaque équation :

a) $726x + 137y = 1$ b) $2017x + 1771y = 1$

VI. Lemme de Gauss

Activités de découverte

Activité 1 :

C . F Gauss
(1777 - 1855)

Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
On suppose que a divise bc et a est premier avec b.
1) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $bc = ka$.
2) Montrer qu'il existe u et v dans $\mathbb{Z}$, tel que $c = a(cu + kv)$.
En déduire que a divise c.
3) Enoncer alors ce résultat établi par Gauss.

Activité 2 :

En utilisant le résultat précédent, démontrer les propriétés suivantes :

1) Si a et b divisent un entier c, et si a et b sont premiers entre eux alors ***ab* divise *c*.**

2) Si un entier a est premier avec chacun des entiers $b_1, b_2, \ldots, b_k$ alors a **est premier** avec leur produit $b_1\, b_2 \ldots b_k$ **.**

Activité 3 :

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, d leur $PGCD$ et m leur $PPCM$.
1) Justifier que $a = da'$ et $b = db'$ avec a' et b' des entiers premiers entre eux .

2) Montrer que $da'b'$ est un multiple commun à a et b.
3) Soit $M = ka = k'b$ un autre multiple commun à a et b, (k et k' sont des entiers relatifs). En exprimant M en fonction de d, a' et b', montrer que $ka' = k'b'$ puis déduire que a' divise k'.
4) Exprimer alors M en fonction de $da'b'$ et déduire que tout multiple commun à a et b est un multiple de $da'b'$. En déduire que $m = d|a'b'|$.
5) Exprimer $PGCD(a, b) \times PPCM(a, b)$ en fonction de a et b.

Activité 4 :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls, d leur $PGCD$ et m leur $PPCM$.
1) Utiliser l'identité de Bézout pour monter que l'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs de d.
2) Prouver que l'ensemble des multiples communs à a et b est l'ensemble des multiples de m
3) En utilisant la relation entre PGCD et PPCM de deux entiers a et b, montrer que pour tout entier relatif non nul k, on a : $(ka \vee kb) = |k| (a \vee b)$.

A retenir

Lemme de Gauss

Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
Si ***a* divise *b.c*** et si ***a* et *b* sont premiers entres eux**, alors ***a* divise *c*.**

Propriétés

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls, alors on a :
1) $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$.
2) $(ka \vee kb) = |k|(a \vee b)$.
3) L'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$
4) L'ensemble des multiples communs à a et b est l'ensemble des multiples de $a \vee b$

Applications

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer $d = a \wedge b$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide, puis $m = a \vee b$.
a) $a = 576$ et $b = -480$; b) $a = 225$ et $b = 350$; c) $a = -845$ et $b = -234$.

2 Soit a et b deux entiers premiers entre eux.
a) Démontrer que, pour tous m et n dans IN, a^m et b^n sont premiers entre eux.
b) Si d et d' sont des diviseurs respectifs de a et b, montrer que d et d' sont premiers entre eux.

3 Prouver le résultat suivant : lorsque x et n sont premiers entre eux, alors

$$a x \equiv a' x [n] \text{ implique } a \equiv a' [n] .$$

VII. application : résolution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ d'équations du type $ax + by = c$ où a, b et c sont des entiers relatifs

Activités de découverte

x et y désignent des entiers relatifs.

1) Pourquoi l'équation $37x + 27y = 1$ admet-elle des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

2) En utilisant l'algorithme d'Euclide donner une solution particulière de cette équation.

3) En déduire une solution particulière $(x_o;y_o)$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation

$$(E) : 37x + 27y = 1000.$$

4) Démontrer que toute solution $(x;y)$ de (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifie : $37\,(x-x_o) = -27\,(y-y_o)$.

5) En utilisant le théorème de Gauss, démontrer que si $(x;y)$ est une solution de (E) alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} x = x_0 + 27k \\ y = y_0 - 37k \end{cases}$

6) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Méthode de résolution, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, de l'équation $ax + by = c$ où a, b et c sont des entiers relatifs.

1) On détermine $d = PGCD(a,b)$.

2) Si c n'est pas un multiple de d, on en déduit que l'équation n'a pas de solutions entières. Sinon, on divise a, b et c par d. on obtient alors une équation de la forme $Ax + By = C$, avec A et B premiers entre eux.

3) On détermine une solution particulière $(u\ ,v)$ de l'équation. Pour cela, on peut déterminer une solution particulière de l'équation $ax + by = d$ (équivalente *à* $Ax + By = 1$) à l'aide de l'algorithme d'Euclide et multiplier les nombres obtenus par $\frac{c}{d} = C$.

4) On écrit $\begin{cases} Ax + By = C \\ Au + Bv = C \end{cases}$

En soustrayant membre à membre, on obtient l'équation : $A\,(x-u) = -B\,(y-v)$.
A et B étant premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, $y-v = kA$
d'où par substitution $x- v = - k\,B$.
Finalement l'ensemble des solutions est l'ensemble des couples de la forme : $(u-kB;v+kA)$où k désigne un entier relatif arbitraire.

Exercice résolu : Soit l'équation (E) $62x +43y = 1$.

1) On va écrire l'algorithme d'Euclide avec les entiers 62 et 43 :

$62 = 43 \times 1 + 19$ (4)
$43 = 19 \times 2 + 5$ (3)
$19 = 5 \times 3 + 4$ (2)
$5 = 4 \times 1 + 1$ (1)

On remarque que, d'après la dernière égalité, PGCD(62,43) = 1, donc l'équation (E) admet des solutions (théorème de Bézout).

2) Une solution particulière de (E) :

On va déterminer une solution particulière en remontant les égalités (1), (2), (3) et (4) dans l'algorithme, et en éliminant les restes successifs sauf le PGCD.

(1) donne $5 = 4 \times 1 + 1$ (1') ;
l'étape 2 consiste à éliminer le reste 4 dans (2).
Comme (1') contient le produit 4×1, on multiplie (2) par 1 :
$19 \times 1 = 5 \times 3 + 4 \times 1 = 5 \times 3 + 5 - 1$. On obtient $19 \times 1 = 5 \times 4 - 1$ (2').
A l'étape 3, il s'agit d'éliminer le reste 5 dans (3). Comme (2') contient le produit 5×4, on multiplie (3) par 4 : $43 \times 4 = 19 \times 8 + 5 \times 4 = 19 \times 8 + 19 \times 1 + 1$.
d'après (2'), on obtient $43 \times 4 = 19 \times 9 + 1$ (3').
Etape 4 : il s'agit d'éliminer le reste 19 dans (4). Comme (3') contient le produit 19×9, on multiplie (4) par 9 : $62 \times 9 = 43 \times 9 + 19 \times 9 = 43 \times 9 + 43 \times 4 - 1$.
D'après (3'). on obtient $62 \times 9 = 43 \times 13 - 1$ (4').
Conclusion : $62 \times (-9) + 43 \times 13 = 1$, donc $(-9 ; 13) = (x_o;y_o)$ est une solution particulière de (E).

3) Solution générale de (E) :

L'équation (E) équivaut à : $62x + 43y = 62x_o + 43y_o$;
soit encore : $62(x - x_o) = 43(y - y_o)$ (E ').
62 doit diviser $43(y - y_o)$; or 62 est premier avec 43, donc 62 doit diviser $y - y_o$ (lemme de Gauss).
On établit de même que 43 doit diviser $x - x_o$. Ainsi il existe k et l entiers tels que :

$$y - y_o = 62k \quad \text{et} \quad x - x_o = 43l .$$

Puisque (E') s'écrit $62 \times 43\,l = 43 \times 62\,k$, on en tire $l = k$.
conclusion : $x = x_o + 43k = -9 + 43k$ et $y = y_o - 62k = 13 - 62k$.
réciproquement, il est clair que ces valeurs sont solutions de (E).

Applications

Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions des équations suivantes :

a) $10x+13y = 1$ b) $42x+35y = 7$ c) $120x+26y = 2$ d) $39x-52y = 3$

Situation 1 : Résolution de l'équation $\boldsymbol{a\,x \equiv b}$ (modulo n)

a,b,n sont trois entiers donnés, $n > 0$, cherchons à résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation d'inconnue x :

$$\boldsymbol{a\,x \equiv b} \text{ (modulo } n).$$

1) Démontrer que s'il existe une solution x , alors $a \wedge n$ divise b .
2) Réciproquement, prouver que si $a \wedge n$ divise b , alors l'équation $ax \equiv b$ (modulo n), a une solution.
3) On se propose de résoudre la congruence (C) : $9x \equiv 15$ (modulo 24)
a) Justifier l'existence d'une solution de (C)
b) Vérifier que $9x \equiv 15$(modulo 24) $\Leftrightarrow 3x \equiv 5$(modulo 8).
c) Prouver que $3x \equiv 5$ (modulo 8) $\Leftrightarrow x \equiv 7$(modulo 8) (on justifiera la condition nécessaire puis la condition suffisante)
d) En déduire l'ensemble de solutions de (C)
4) Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, les congruences : $6x \equiv 6$ (modulo 21); $-3x \equiv 15$ (modulo 13).

Situation 2 : Critères usuels de divisibilité

Rappelons que tout entier naturel s'écrit : $a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$
où chaque a_i désigne un nombre entier compris entre 0 et 9 et $a_n \neq 0$

1. Critère de divisibilité par 9

a) Justifier les résultats suivants :
$10 \equiv 1$(modulo 9) et pour tout entier naturel n, $10^n \equiv 1$ (modulo 9).
Si $a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ alors $a \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0 \left[9\right]$

b) Déduire le critère suivant : un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

2. Critère de divisibilité par 3

En procédant comme ci-dessus, prouver le Critère suivant : *un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3*.

3. Critère de divisibilité par 4, par 25

Prouver les critères suivants : *un entier est divisible par 4 (resp. par 25) si et seulement si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4 (resp. par 25)*.

4. Critère de divisibilité par 8, par 125

Trouver un critère de divisibilité par 8, et un critère de divisibilité par 125.

5. Critère de divisibilité par 11

a) Justifier les résultats suivants :
Lorsque n est pair, $10^n \equiv 1$ (modulo 11), et lorsque n est impair, $10^n \equiv -1$ (modulo 11).
b) En procédant comme dans 1. prouver le critère suivant : *un entier naturel est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme des chiffres de rang impair et la somme des chiffres de rang pair à partir de la droite est un multiple de 11*.
c) Le nombre 4 792 178 est-il divisible par 11 ?

6. Critère de divisibilité par 7

a) Soit n un entier naturel qui s'écrit : $n = 10a + b$ (a,b dans $\mathbb{N}$).
Vérifier que $n = 7(a+b) + 3(a-2b)$ et déduire que n est divisible par 7 si, et seulement si, $a - 2b$ est divisible par 7.
b) Sans calculatrice, déterminer les nombres divisibles par 7 parmi 25 718 ; 62 216 ; 46 663 et 38 983.

Avec l'outil informatique

1. Etudier les restes, dans la division euclidienne, de 3^n par 11.

	A	B	C	D
1			Restes de a^n par b	
2			a	b
3	Zone de saisie:		3	11
4		n	a^n	Restes
5		0	1	1
6		1	3	3
7		2	9	9
8		3	27	5
9		4	81	4
10		5	243	1

Les quatre premières lignes sont de la présentation; les formules se trouvent sur la ligne 5, colonne *C* et *D*. Ces sont respectivement : =$C$3^B5 et =MOD(C5 ;$D$3). Ensuite on recopie vers le bas les deux formules aussi loin que l'on veut en vue de déceler une périodicité.
Remarque : la présentation permet de faire des simulations en changeant les valeurs de *a* et *b* dans la zone de saisie, ce qui permet de résoudre d'autres problèmes.

2. Faites tourner ce programme, en Turbo Pascal, pour obtenir le PGCD des nombres $a = 16\ 170$ et $b = 9450$ puis $a = 195\ 728$ et $b = 178\ 211$.

```
Program euclide ;
var r,t,q,z :longint ;
begin
Writeln(' Donner a') ;readln(r) ;
Writeln('Donner  b') ;readln(t) ;
 repeat
 q:=r div t;
 z :=r ;r :=t ;t :=z-q*t
 until t=0 ;
 Writeln('Le PGCD est' ,r) ;
end.
```

3. Algorithme de calcul de coefficients u et v dans la relation de Bézout
Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On note $r_0, r_1, \dots, r_n, r_{n+1}$, les restes successifs de l'algorithme d'Euclide appliqué aux entiers *a* et *b* ($r_n = PGCD(a,b)$, $r_{n+1} = 0$).
a) Montrer que, pour tout k $(0 \le k \le n)$, il existe deux entiers u_k et v_k tels que $au_k + bv_k = r_k$ définir u_k et v_k par récurrence.
b) Programmer le calcul de u_k et v_k sur un tableur. En déduire une solution particulière de l'équation $ax + by = D$, (D = PGCD (a , b)) .
Calcul pratique des suites (u_k) et (v_k)

Avec l'outil informatique

1) Sur le tableur excel ci-dessous nous avons organisé et présenté les calculs de la manière suivante :

	A	B	C	D	E	F
1	a	b	quotient q(k)	restes r(k)	u(k)	v(k)
2	78	35	2	8	1	-2
3			4	3	-4	9
4			2	2	9	-20
5			1	1	-13	29
6			2	0		
7						

Formules utilisées

- Initialisation (k=0 et k=1)

En C2 : = **QUOTIENT (A2 ;B2)**
En D2 : = **MOD (A2 ;B2)**
En E2 : 1
En F2 : = **- C2**
En C3 : = **QUOTIENT (B2 ;D2)**
En D3 : = **MOD(B2 ; D2)**
En E3 : = **SI (D3=0 ; ' ' ; - C3)**
En F3 : = SI (D3=0 ; " " ; 1+C2*C3)

- Relations de récurrence

En C4 : = **SI(D3=0 ; ' ' ; QUOTIENT (D2 ;D3))**
En D4 : = **SI(D3=0 ; ' ' ; MOD (D2 ;D3))**
En E4 : = **SI (D4=0 ; ' ' ; E2-C4*E3)**
En F4 : = **SI (D4=0 ; ' ' ; F2-C4*F3)**

Ces relations sont étendues vers le bas, aussi loin que l'on veut.

2) En turbo Pascal

```
program coef_ besout
var
   u,v,r,u1,r1,q,a,b,z :longint ;
begin
   writeln('Donner la valeur du 1er nombre a') ;readln(a) ;
   writeln('Donner la valeur du 2e  nombre b') ;readln(b) ;
   u :=1 ;u1 :=0 ;v1 :=1 ;r :=a ;r1 :=b ;
   while r1< >0 d0
   begin
      q :=rdivr1 ;
      z :=u ;u :=u1;u1:=z-q*u1;
      z:=v;v:=v1;v1:=z-q*v1;
      z:=r;r:=r1;r1:=z-q*r1;
      end;
      writeln('u=',u,'v=',v);
end.
```

z variable intermédiaire pour ne pas perdre u.

Exercices et problèmes

1 Vrai ou Faux

Justifier chaque affirmation, par une démonstration ou présenter un contre exemple.

a) Un entier divisible par 4 et 15 est aussi divisible par 60.

b) Si les entiers m et n vérifient $1111m = 1515n$, alors m est un multiple de 1515

c) Le PGCD de 2001^{2007} et de 2007^{2001} est 3^{1995}

d) Le reste de la division de 2^{100} par 11 est égal à 1.

e) Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n - 1\,;$$
$$v_0 = 1 \text{ et } v_{n+1} = 2v_n + 3$$

Les termes de chaque suite ayant le même indice impair ont pour PGCD 5.

f) Il existe un entier k tel que 36^{36} soit de la forme $37k + 1$.

g) Si a et b sont deux entiers naturels vérifiant la relation $27^a = 3 \times 3^b$ alors les deux entiers a et b sont premiers entre eux.

h) Si a, b et c sont des entiers naturels tels que c divise ab avec a premier, alors c divise b.

i) Si le PPCM de deux entiers naturels est égal à leur produit, alors ils sont premiers entre eux.

QCM

2 Indiquer les réponses justes pour chaque question.

a) x et y sont des entiers naturels vérifiant

$$2007x - 19y = 1$$

Le nombre de solutions telles que x et y soient simultanément inférieurs à 1000 est

a. 0 ; b. 1 ; c. 53 ; d. 152

b) Un terrain rectangulaire, dont les dimensions en mètres sont des nombres entiers de PGCD 6, a pour aire 3024 m². Le nombre de valeurs possibles pour le périmètre est égal à :

a. 3 ; b. 4 ; c. 5 ; d. 6.

c) a. Si les entiers a ,b, a', et b' vérifient $ab' - a'b = 1$, alors les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont irréductibles.

b. Si les entiers a ,b, a', et b' vérifient $ab' - a'b = 2$, alors les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont irréductibles.

c. Si les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ ne sont pas irréductibles alors les entiers a ,b, a', et b' ne vérifient pas $ab' - a'b = 1$.

d. Le PGCD de deux nombres entiers a et b est 12 ; les quotients successifs obtenus dans le calcul de ce PGCD par l'algorithme d'Euclide sont 8, 2 et 8. le plus grand de ces nombres est égal à :

A. 1524 ; B. 1728 ; C. 2007.

e. Sachant que $123 \equiv 0$ (modulo 3) alors

a. $123^{2005} - 1$ est divisible par 3.

b. $124^{2006} - 1$ est divisible par 3.

c. $125^{2007} - 1$ est divisible par 3.

3 Quel est le reste dans la division par 7 des nombres

999888777666555444333222111?

999888777666555444333222111000 ?

4 Démontrer que, quel que soit l'entier $n \geq 1$

a) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

b) $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par 11.

c) $3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

5 1) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 5n$ est un multiple de 6.

2) En déduire que les entiers suivants sont multiples de 6 : $n^3 + 17n - 12$; $n^3 + 2009n$

6 1) Soit n un entier naturel non nul, et d un diviseur positif de n. Montrer que, pour tout entier $a \geq 1$, $a^n - 1$, est divisible par $a^d - 1$.

2) Montrer que $2^{2008} - 1$ est divisible par 3, 15 et 255.

7 Soit a, b et d trois entiers naturels. Démontrer que si $7a + 5b$ et $4a + 3b$ sont de multiples de d alors les nombres a et b sont des multiples de d.

8 Déterminer les entiers relatifs x tels que :
a) $x - 2$ divise $x + 5$;
b) $x + 7$ divise $2x + 15$;
c) $x - 1$ divise x^2 ;
d) $x + 1$ divise $x^3 + 2$.

9 Le dividende d'une division euclidienne est inférieur à 900. Le quotient est 72 et le reste 12. On cherche le diviseur et le dividende. Expliquer pourquoi il n'y a pas de solution

10 a et b sont deux entiers naturels. Les restes de la division euclidienne de a et b par 11 sont respectivement 2 et 7. Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres $a + b$ et $a - b$ par 11. En déduire celui de $a^2 - b^2$.

11 **1)** Vérifier que 20072007 est divisible par 137 et 73. En est-t-il de même pour 20082008 ?
2) Choisir un nombre de quatre chiffres et le juxtaposer avec lui-même pour obtenir un nombre de huit chiffres. Est-il lui aussi divisible par 137 et 73 ?. Calculer 137 x 73
et justifier le phénomène observé.

11 **1) a)** Vérifier que l'équation $2x^2 - 2x + 1 = 0$ n'admet pas de solution réelle.
b) Vérifier que -21, -13, 34, 112 sont solutions de l'équation :
(1) $2x^2 - 2x + 1 \equiv 0$ (modulo 5).
2) a) Justifier que x est solution de (1) si et seulement si il existe un entier k tel que :

$$2x^2 - 2x + 1 - 5k = 0 \quad . \quad (2)$$

b) Calculer le discriminant de cette dernière équation. Démontrer que pour que (2) admette une solution entière, il faut qu'il existe un entier p tel que : $p^2 + 1 \equiv 0$ (modulo 10).
En utilisant les congruences modulo 10, déterminer les entiers p vérifiant la relation ci-dessus.
c) Déterminer toutes les solutions de (1).
3) Vérifier que les termes des suites arithmétiques de premiers termes -1 et 2 et de raison 5 sont tous solutions de (1).

13 Vérifier les congruences :

$$2^{13} \equiv 1[13] \quad \text{et} \quad 3^6 \equiv 1[13].$$

En déduire que $2^{70} + 3^{70}$ est divisible par 13.

14 Vérifier que $7^2 \equiv -1$ (modulo 10).
b) Quel est le chiffre des unités de l'entier naturel :

$$1 + 7 + 7^2 + ... + 7^{400} \quad ?$$

15 a, b sont des entiers relatifs et c un entier > 0.
Démontrer que si $a \equiv b[c]$ alors
PGCD (a , c) = PGCD (b , c).
La réciproque est-elle vraie?

16 Pour la proposition suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.
Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0$ (modulo 6) alors $x \equiv 0$ (modulo3)

17 Déterminer les restes possibles dans $\mathbb{Z}$ la division euclidienne par 8 du carré d'un entier.
Déterminer les entiers n dans $\mathbb{Z}$ tels que :

$$(n+3)^2 \equiv 1[8]$$

18 Expliquer, sans nécessairement calculer les PGCD, pourquoi tous les résultats suivants sont visiblement faux :
a) PGCD (1602; 1846) =3
b) PGCD (1714; 3026) =1
c) PGCD (15; 23) =7
d) PGCD (132; 63) = 63
e) PGCD (2121; 111) = 140
f) PGCD (121; 128) = 8

19 Trouver les nombres entiers naturels non nuls a et b de PGCD égal à 8 et tels que $a + b = 144$.

20 n est un entier naturel non nul ; $a = 2n^2$ et $b = n(2n+1)$. justifier que $2n$ et $2n+1$ sont premiers entre eux. En déduire le PGCD de a et b.

21 a et b sont des entiers naturels. Trouver a et b sachant que $ab = 1734$ et que le PGCD de a et b est 17.

22 Calculer le PGCD et le PPCM des nombres non nuls a et b définis par :$a = 5^{n+2} - 5^n$ et $b = 7^{n+2} - 7^n$ où n est un entier naturel.

23 Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels les systèmes :

a) $\begin{cases} xy = 1512 \\ PPCM(x;y) = 252 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 276 \\ PPCM(x;y) = 1440 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy = 16128 \\ PGCD(x;y) = 24 \end{cases}$

24 Résoudre l'équation 2PGCD (a ; b) = 111 où a et b désignent des entiers naturels.

25 Trouver tous les couples (a ; b) d'entiers naturels non nuls ($a < b$) vérifiant :
2PPCM (a ; b) + 3PGCD (a ; b) = 78
et tels que a ne divise pas b.

26 Soit a, b et n des entiers naturels.
a) Montrer que si PGCD (a,b) = 1, alors PGCD (a^n , b) = 1
b) En déduire :
PGCD (a,b) = 1 $\Rightarrow$ PGCD (a^n,b^n) =1.
c) La réciproque est-elle vraie ? Justifier

27 Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (x ;y) solutions des équations suivantes :

a) $10x + 13y = 1$; b) $5x + 3y = 1$
c) $30x + 35y = 100$; d) $9x - 15y = 1$

28 On pose, pour n entier relatif $(n \neq 7)$,
$a_n = n + 7$ et $b_n = 3n - 4$
1) Calculer $3a_n - b_n$. En déduire que PGCD (a_n , b_n) est un diviseur de 25.
2) On pose $d_n = PGCD(a_n, b_n)$
Montrer que $d_n = PGCD(a_n, 25)$
3) En déduire les équivalences :
a) $d_n = 5 \Leftrightarrow n \equiv 3 [5]$

b) $d_n = 25 \Leftrightarrow n \equiv 18 [25]$

4) En dehors des deux cas précédents, prouver que a_n et b_n sont premiers entre eux.

29 1) On désigne par n un nombre entier naturel quelconque. On suppose que $n \equiv 1 [7]$
a) Déterminer un nombre entier naturel p tel que $n^3 \equiv p \ [7]$.
b) En déduire que le nombre entier $n^3 + 1$ est divisible par 7.
2) Soit m un nombre entier naturel quelconque. Prouver que si $m \equiv 4$ (modulo 7) alors le nombre entier $m^3 - 1$ est divisible par 7.
3) On considère le nombre A= $1999^3 + 2007^3$.
a) Justifier que 1999 $\equiv$ 4 (modulo 7)
b) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $2007 \equiv p$ (modulo 7).
c) En déduire, sans calcul, que 7 divise l'entier A.

30 **1)** Soit n un entier naturel qui s'écrit :
$n = 10a + b$, avec a et b dans $\mathbb{N}$.
Prouver que n est divisible par 13 si, et seulement si, $a + 4b$ est divisible par 13.
2) Application : Sans calculatrice déterminer les nombres divisibles par 13 parmi : 569 556; 8 888 ; 6 666 ; 6 567.

31 1) Soit n un entier naturel qui s'écrit :
$n = 10\,a + b$, avec a et b dans $\mathbb{N}$.
Prouver que n est divisible par 17 si, et seulement si, $a - 5\,b$ est divisible par 17.
2) Application : Sans calculatrice déterminer les nombres divisibles par 17 parmi : 16 831 ; 152 592 ; 16 983 ; 83 521.

32 Le nombre $2^{11} - 1$ est-t-il premier ?
Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, comment la somme :
$S = 1 + 2^p + 2^{2p} + 2^{3p} + \ldots + 2^{p(q-1)}$
peut-elle encore s'écrire ?
en déduire que $2^{pq} \equiv 1\left[2^p - 1\right]$
Démontrer que $2^{pq} - 1$ est divisible par les deux nombres 2^p-1 et 2^q-1. En déduire que si le nombre $2^n - 1$ est premier, alors n est lui-même premier. La réciproque est-elle vraie ?
Les nombres premiers de la forme $2^n - 1$ sont appelés nombres de MERSENNE.

33 Dans un pays imaginaire, la banque nationale émet seulement des pièces de monnaie de 13 et 4 unités monétaires.
1) Montrer qu'il est possible de payer n'importe quelle somme entière (à condition de disposer d'assez de pièces).
2) Si on ne rend pas la monnaie, quelle est la plus grande somme qu'il est possible de payer?

34 On dispose sur la table de 38 allumettes. Deux joueurs A et B prennent, chacun à son tour, un nombre d'allumettes compris entre 1 et 4. Le joueur qui prend la dernière allumette a perdu. Le joueur qui commence et qui joue avec une stratégie bien définie, peut gagner la partie à coup sûr. Trouver et justifier cette stratégie.
La stratégie est-elle valable quelque soit le nombre d'allumettes posées sur la table en début de partie ?

35 Le code ISBN (International Standard Book Number) permet d'identifier chaque livre de manière unique dans le monde entier. Il sert notamment de numéro de référence dans des bases de données informatiques. Il comprend dix chiffres répartis en quatre groupes séparés par des tirets (Exemple : ISBN 9973 - 719 - 55 - 7).
Le premier groupe correspond au pays de l'éditeur, le deuxième groupe est le numéro de l'éditeur, le troisième celui du livre, enfin le dernier chiffre est une clé qui sert à vérifier qu'on n'a pas effectué d'erreur de saisie en rentrant le code dans un ordinateur. Cette clé est calculée de la maniéré suivante $a_1, a_2, a_3, \ldots a_9$
A partir des neuf premiers chiffres
(sans tenir compte des tirets), on calcule la somme$S = a_1 + 2 \times a_2 + 3 \times a_3 + 4 \times a_4 + 5 \times a_5 + 6 \times a_6 + 7 \times a_7 + 8 \times a_8 + 9 \times a_9$ puis on calcule le reste de la division euclidienne de S par 11.
Ce reste est la clé.
Il s'agit d'un entier compris entre 0 et 10 inclus ; s'il vaut 10 on l'écrit alors avec le chiffre romain X.
1) Complétez les codes susivants par leur clé :
ISBN 9973 - 719 - 55 - 7.
ISBN 2 - 7427 - 0008.
ISBN 0 - 691 - 05729.
2) Un bibliothécaire saisit le code ISBN 2 - 70 - 031999 - 7.Le logiciel lui indique alors qu'il a commis une erreur.
(a) Comment le logiciel a-t-il détecté l'erreur?
(b) Le bibliothécaire s'aperçoit alors qu'il a interverti les deux chiffres du numéro de l'éditeur ; il saisit donc le code ISBN 2 - 07 - 031999 - 7. Ce code est-il cohérent avec la clé de contrôle ?
3) Le bibliothécaire reçoit un nouveau message d'erreur en rentrant le code ISBN 2 - 85368 - 313 - 2. Corriger son erreur, sachant qu'elle porte seulement sur le chiffre de gauche.

4) Décrire en langage naturel l'algorithme (le programme) qui permet de détecter éventuelles erreurs de saisie grâce à la clé de contrôle.
5) Les propositions suivantes sont-elles justes ou bien fausses ? (justifier rapidement) :
(a) « Si la somme S est un multiple de 11, alors la clé est 0. »
(b) «Si la somme S est un multiple de 10, alors la clé est X.»
(c) «Toutes les erreurs de saisie sont détectables.»
(d) « Si deux codes possèdent la même clé. alors les sommes S correspondantes sont congrues modulo 11.»
6) Ecrire la réciproque de la dernière proposition puis préciser si cette dernière est juste ou fausse.
7) On voudrait savoir si intervertir deux chiffres entraine toujours une modification de la clé, ce qui permet de déceler l'erreur.
On suppose par exemple qu'au lieu de saisir les neuf chiffres d'un code ISBN $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9$, le bibliothécaire saisisse $a_1a_3a_2a_4a_5a_6a_7a_8a_9$. On considère les sommes S et S' correspondant respectivement au code correct et erroné.
(a) Calculer $S - S'$ en fonction des chiffres a_2 et a_3.
(b) Quelles sont les valeurs possibles pour $S - S'$?
(c) Est-ce que S et S' peuvent être congrues modulo 11 ?
(d) Que peut-on en conclure ?

36 Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant : «Etant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si PGCD(a ; b) = 1 alors $PGCD(a^2;b^2)=1$».
Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.
1) Démontrer que pour tout $n > 0$, on a

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

2) Etude de cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.
a) démontrer que

$$PGCD(S_{2k};S_{2k+1}) = (2k+1)^2\, PGCD(k^2;(k+1)^2)$$

b) calculer $PGCD(k;k+1)$;

c) calculer $PGCD(S_{2k};S_{2k+1})$.
3)Etude de cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n=2k+1$.
a) Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.
b) calculer $PGCD(S_{2k+1};S_{2k+2})$.
4) Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

La liste des nombres premiers inférieurs à 1000 (sa consultation ne peut que faciliter la résolution de certains exercices). 2-3-5-11-13-17-19-23-29-31-37-41-43-47-53-59-61-67-71-73-79-83-89-97-101-103-107-109-113-127-131-137-139-149-151-157-163-167-173-179-181-191-193-197-199-211-223-227-229-233-239-241-251-257-263-269-271-277-281-283-293-307-311-313-317-331-337-347-349-353-359-367-373-379-383-389-397-401-409-419-421-431-433-439-443-449-457-461-463-467-479-487-491-499-503-509-521-523-541-547-557-563-569-571-577-587-593-599-601-607-613-617-619-631-641-643-647-653-659-661-673-677-683-691-701-709-719-727-733-739-743-751-757-761-769-773-787-797-809-811-821-823-827-829-839-853-857-859-863-877-881-883-887- 907-911-919-929-937-941-947-953-967-971-977-983-991-997.

Ibn al-Haytham et le théoréme de Wilson

En 1770, E.WARING enregistrait en deux phrases l'acte de naissance du théorème de Wilson :

“Sit n numerus primus, & $\frac{1.2.3.4...(n-2)(n-1)+1}{3}$ erit integer numerus, e.g. $\frac{1.2+1}{3}=1$,

$\frac{1.2.3.4+1}{5}=5, \frac{1.2.3.4.5.6+1}{7}=103$ &c.Hanc maxime elegantem primorum numerorum pro

prietatem invenit vir clarissimus, rerumque mathematicorum peritissimus Joannes Wilson Armiger “.

Bien que ce théorème n'ait cessé depuis d'être attribué à J.Wilson, à aucun moment E.Waring ne laisse entendre que celui-ci en a donné la démonstration ; et, du reste, tout concourt à montrer que Wilson ne détenait pas la démonstration du théorème qui porte son nom. Aussi WARING, après avoir cité ce théorème et quelques autres qui s'y rapportent, écrit-il:

3Demonstrationes vero hujjusmodi propositionum eo magis difficiles erunt, quod nulla fingi potesi notatio, quae primum numerum exprimit”

C'est seulement grâce à une meilleur connaissance des manuscrits de LEIBNIZ que se trouve ébranlé e la priorité de WILSON, unanimement admise jusque là par les historiens. A la fin du siècle dernier, en effet, G.VACCA a pu trouver chez LEIBNIZ une formulation équivalente de ce même théorème, et bien antérieure par conséquent à celle de WILSON. Et de fait le texte de LEIBNIZ ne permet aucun doute: "Productus continuorum usque ad numerum qui antepraecedit datum divisus per datum relinquit 1, si datus sit primitivus. Si datus sit derivativus, relinquet numerum qui cum dato habeat communem mensuram unitate majorem".

On peut ainsi traduire la proposition de LEIBNIZ:

Si p est un nombre premier, alors (p-2)! $\equiv 1 (\bmod p)$

Il fallut attendre 1771 pour que fut démontré ce théorème.

C'est LAGRANGE qui en donna la démonstration, de deux manières; la première est directe; la deuxième consiste à déduire le théorème de WILSON du petit théorème de FERMAT. LAGRANGE montre en outre la réciproque de l'énoncé de WILSON, si bien que l'on aboutit finalement au théorème suivant:

Si n > 1, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

a) *n* est premier

b) $(n-1)! \equiv -1 (\bmod n)$

Ainsi se présente l'histoire connue du théorème de WILSON. Or, bien avant LEIBNIZ, un mathématicien du X éme siécle avait énoncé ce même théorème, en des termes aussi précis que ceux que rapporte WARING. Nous allons en effet montrer que dans un Opuscule dont on trouve ici même l'édition et la traduction, le célèbre mathématicien et physicien IBN AL-HAYTHEM (965-1040) présente au cours de sa solution d'un problème de congruences linéaires le théorème de WILSON comme une proposition exprimant précisément "une propriété nécessaire" des nombres premiers, autrement dit une propriété appartenant à ceux-ci "exclusivement".

Il est de bonne méthode de commencer par suivre l'ordre d'exposition d'IBN AL- HAYTHAM lui-même, pour voir comment il situe le dit théorème dans sa propre étude, et pour saisir quelle fonction il lui assigne.

IBN AL-HAYTHAM propose dans cet Opuscule de résoudre le système $(1)\begin{cases} x \equiv 1 (\bmod m_i) \\ x \equiv 0 (\bmod p) \end{cases}$

avec p un nombre premier, et $1 < m_i \leq p-1$. Nous sommes donc en présence d'un cas particulier du célèbre théorème chinois ,aprés avoir affirmé qu'il s'agit d'un problème qui admet une infinité de solutions entières,....

Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes (R. RAHED)

Chapitre 10

NOMBRES COMPLEXES

I . Définition et propriétés
II . Représentation géométrique d'un nombre complexe
III . Conjugué d'un nombre complexe
IV . Module d'un nombre complexe
V . Equations dans $\mathbb{C}$

Cardan Girolamo (Jérôme)
1501-1576

I. Définition et propriétés

Activités préliminaires

Activité 1 :
1) Calculer $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

2) Ecrire alors sous la forme $a+b\sqrt{3}$ les réels suivants $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ et $\frac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ où a et b sont deux nombres rationnels.

Activité 2 :
Résoudre dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$x+1=0$, $2x+1=0$, $x^2-2=0$.

Activités de découverte

Activité 1:
1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2+1=0$
➢ L'équation $x^2+1=0$ n'admet pas des solutions dans $\mathbb{R}$.

- On suppose qu'il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$, appelé ensemble des nombres complexes, et dans lequel l'équation $x^2+1=0$ admet une solution.

Cette solution notée i n'est pas un nombre réel; c'est **un imaginaire pur**.

- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a+ib$ où a et b sont deux réels et $i^2=-1$
- On définit dans $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication ayant les mêmes propriétés que celles définies dans $\mathbb{R}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $x^2+a=0$ où a est un réel donné strictement positif.

Activité 2 :
1) Soient $z=2-3i$ et $z'=1+i$.
Ecrire sous la forme $x+iy$ (x et y des réels) : $3z$; $z+z'$; $z-z'$; zz'
2) Soient $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ où a, b, a' et b' sont des réels.
Ecrire sous la forme $x+iy$ (x et y des réels) : $z+z'$; $z-z'$; $z.z'$
3) a) Calculer : $(1+i)(1-i)$

b) Ecrire alors $\frac{1}{1+i}$ et $\frac{2-3i}{1+i}$ sous la forme $x+iy$ (x et y des réels)

4) Soient $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ où a, b sont des réels et a', b' sont des réels non nuls.
a)Vérifier que : $(a'+ib')(a'-ib')=(a')^2+(b')^2$
b) En déduire l'écriture sous la forme $x+iy$ (x et y des réels) de $\frac{1}{z'}$ et $\frac{z}{z'}$

A retenir

Théorème et définition

Il existe un ensemble, appelé ensemble des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient un nombre non réel noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément z de s'écrit de maniére unique : $z = a + i\,b$ où a et b sont des réels.

Vocabulaire et notation

L'écriture $z = a + i\,b$, où a et b sont des réels, s'appelle forme algébrique (ou cartésienne) du nombre complexe z .
Le réel a est appelé **la partie réelle** de z et noté $Re(z)$.
Le réel b est appelé **la partie imaginaire** de z et noté $Im(z)$.
Si $a = 0$, alors z est appelé imaginaire pur.

Conséquences

Soit z *et* z' deux nombres complexes.

- z est réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$.
- $z = 0$ si et seulement si $Re(z) = Im(z) = 0$.
- $z = z'$ si et seulement si $Re(z) = Re(z')$ *et* $Im(z) = Im(z')$.

Propriétés: Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$ avec a, b, a' et b' des réels.

- $z + z' = (a + a') + i\,(b + b')$
- $z - z' = (a - a') + i\,(b - b')$
- $z\,.z' = (a\,a' - b\,b') + i\,(a\,b' + b\,a')$

Si en plus $z' \neq 0$ alors on a :

- $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{a'}{a'^2 + b'^2} + i\dfrac{-b'}{a'^2 + b'^2}$
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{a\,a' + b\,b'}{a'^2 + b'^2} + i\dfrac{b\,a' - a\,b'}{a'^2 + b'^2}$

Les calculs dans $\mathbb{C}$ se font de la même manière que les calculs dans $\mathbb{R}$ en remplaçant i^2 par (- 1) chaque fois que le cas se présente.
Dans la pratique, on ne retient pas les formules de l'inverse et du quotient, on fait intervenir l'égalité :
$$(x + i\,y)(x - i\,y) = x^2 + y^2$$

Applications

1 On considère les nombres complexes suivants : $z = 3 + 2\,i$ et $z' = 2 + i$.
Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants : $z + z'$, $z - z'$, $3\,z - 5\,z'$, $z\,.\,z'$, $\dfrac{1}{z'}$, $\dfrac{z}{z'}$

2 1) Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :
$(1 - 2i) - (3 + i)$; $(1 + i)^2$; $(1 + i)^3$; $(3 + i)(3 - i)$; $(a + i)(a^2 - ia + i^2)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

2) Trouver le réel x tel que : $x^2 + 3x - 3 + i(x + 2) = 1 - 2i$.

3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $z - 2i = iz + 5$; $2z(z - i) = 0$;

$\dfrac{z - 2i}{z + 3} = 2 - i$ (On donnera le résultat sous forme algébrique.)

4 1) Calculer : i^3 , i^4 , i^5 , i^6 , i^7 et i^8

2) Calculer : i^{50} , i^{57} , i^{2000} et i^{2007}

3) Calculer : $(1 + i)^2$, $(1 - i)^2$, $(1 + i)^{50}$ et $(1 - i)^{50}$

II. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Activités de découverte

Activité 1:

On donne les nombres complexes $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = -2 + 3i$.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

1) Placer les points : $A(Re(z_1), Im(z_1))$ et $B(Re(z_2), Im(z_2))$.

➢ Les points A et B ainsi obtenus s'appellent les **images** respectives des nombres complexes z_1 et z_2 dans le plan.
Réciproquement les nombres complexes z_1 et z_2 s'appellent les **affixes** respectives des points A et B. On note
$Aff(A) = z_1$; on lit : affixe de A est égal à z_1 ou encore
$A(z_1)$; on lit : A d'affixe z_1 .

2) a) Donner les affixes des points suivants : $C(1, 3)$; $D(0, -2)$; $E\left(\sqrt{2}, 0\right)$; $F\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

b) Que peut-on dire de l'affixe d'un point appartenant à la droite des abscisses? à la droite des ordonnées ?

3) a) Déterminer l'affixe du point I milieu de $[AB]$.

b) Calculer $\dfrac{z_1 + z_2}{2}$. Conclure.

Activité 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. On considére un vecteur $\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ et le point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$
Le nombre complexe $z = x + iy$, qui est l'affixe du point M, est aussi appelé affixe du vecteur $\vec{u}$. On le note : Aff($\vec{u}$) ou $z_{\vec{u}}$.

On donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = a + ib$, $z_B = a' + ib'$ où a, b, a' et b' sont des réels.

1) a) Donner l'affixe du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$

b) Vérifier que : $Aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = z_B - z_A$

2) Soit I le milieu de $[AB]$. Montrer que : $Aff\left(I\right) = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

Activité 3:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives z *et* z' tels que : $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$, où a, b, a' et b' sont des réels.

1) Donner les coordonnées des vecteurs : $k.\vec{u}$ et $\vec{u}+\vec{v}$ (k réel)

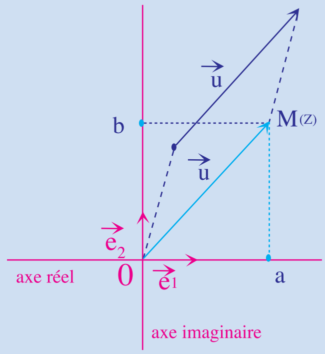
2) En déduire que : $Aff(k\vec{u}) = k\,Aff(\vec{u})$, $Aff\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = Aff\left(\vec{u}\right) + Aff\left(\vec{v}\right)$

A retenir

Théorème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.

- A tout nombre complexe $z = a + i\,b$, où a et b sont des réels, on associe un unique point $M(a, b)$ du plan.
- A tout point $M(a, b)$ du plan, on associe un unique nombre complexe $z = a + ib$.



Vocabulaire et notation

- Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé affixe du point $M(a, b)$ et est noté $Aff(M)$ ou z_M.
- Le point $M(a, b)$ est appelé l'image du nombre complexe $z = a + i\,b$ et on note $M(z)$.

Remarques

- A tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ du plan on associe un unique nombre complexe $z = a + ib$.

Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé affixe du vecteur $\vec{u}$; on le note Aff($\vec{u}$) ou $z_{\vec{u}}$.

- Lorsqu' on repère un point ou un vecteur dans un repère orthonormé par son affixe, on dit qu'on se place dans **le plan complexe**.

Conséquences : Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

Soient M et M' deux points d'affixes respectives z et z'.

- (M et M' sont confondus) signifie ($z = z'$).
- z est réel si et seulement si M appartient à la droite des abscisses, appelée **axe réel**.
- z est imaginaire pur si et seulement si M appartient à la droite des ordonnées, appelée **axe imaginaire.**
- Les points d'affixes z et ($-z$) sont symétriques par rapport à O.

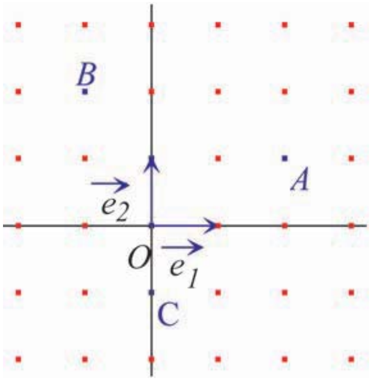
Propriétés: Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

- Si A et B sont deux points du plan, on a : $Aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = Aff\left(B\right) - Aff\left(A\right)$
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan et pour tout réel k, on a :

Si I est le milieu de $[AB]$ alors $Aff\left(I\right) = \dfrac{Aff\left(A\right) + Aff\left(B\right)}{2}$

$$Aff(k\vec{u}) = k\,Aff(\vec{u}) \qquad Aff\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = Aff\left(\vec{u}\right) + Aff\left(\vec{v}\right)$$

Applications



1 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. On a représenté ci-contre les points A, B et C.
1) Déterminer les affixes de chacun des points : A, B et C.
2) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[BC]$.
Placer le point I.
3) Déterminer l'affixe du point D symétriquede A par rapport à I. Placer le point D.
4) Justifier que $ABDC$ est un parallélogramme.
5) Déterminer l'affixe du point E tel que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OA}$.
Placer le point E.

2 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. Soient a et b deux réels.
Déterminer l'ensemble des points $M(a, b)$ du plan tels que le nombre complexe $z = (a - 2)+ i\,(2a - b)$ soit :
a) un réel b) un imaginaire pur c) nul

III. Conjugué d'un nombre complexe

Activités de découverte

Activité 1:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. Soit le point $M(z)$ où $z = 2+3i$.
On désigne par M' le symétrique de M par rapport à l'axe réel. Placer les points M et M' et en déduire l'affixe z' de M'.
➢ Le nombre complexe trouvé $z' = 2 - 3i$ s'appelle **conjugué** de z et se note par $\bar{z}$.

Activité 2 :

1) Donner le conjugué de chacun des nombres complexes suivants : $1 + i$; 3 ; $2 - 3i$
$2i$; $4i - 3$; $3 - 2\sqrt{3}$; $i\sqrt{5}$

2) Que peut-on dire du conjugué d'un réel? d'un imaginaire pur?

Activité 3 :

1) On donne deux nombres complexes : $z = 1 + 2i$ et $z' = -2 + i$.

a) Calculer : $\bar{z}$; $\overline{z'}$; $\overline{z + z'}$; $\overline{z - z'}$; $\overline{z\,z'}$; $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$; $\bar{z}\,\overline{z'}$; $\frac{1}{\overline{z'}}$ et $\frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$

b) Vérifier que : $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$; $\overline{z - z'} = \bar{z} - \overline{z'}$; $\overline{z\,z'} = \bar{z}\,\overline{z'}$; $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$.

2) Cas général : soient $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$ où a, b, a' et b' sont des réels.

a) Montrer que : $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$; $\overline{z - z'} = \bar{z} - \overline{z'}$; $\overline{z\,z'} = \bar{z}\,\overline{z'}$

b) En remarquant que pour $z' \neq 0$, $z'.\frac{1}{z'} = 1$, montrer que : $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$.

c) En utilisant : $\frac{z}{z'} = z.\frac{1}{z'}$, déduire que : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$.

Activité 4 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixe respectives z et z' tels que $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$, où a, b, a' et b' sont des réels.

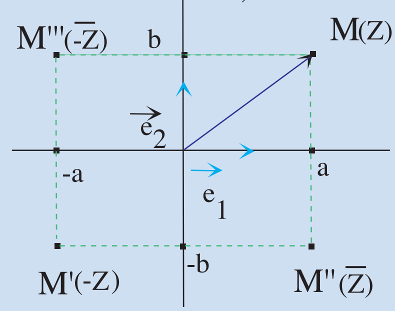
1) Montrer que $\bar{z}\ z' = (a\,a' + b\,b') + i\,(a\,b' - a'\,b) = \vec{u}\,.\vec{v} + i \det(\vec{u}, \vec{v})$

2) En déduire : $\begin{cases} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \bar{z}z' \text{ est réel.} \\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \bar{z}\,z' \text{ est imaginaire pur} \end{cases}$

A retenir

Définition

Le conjugué du nombre complexe $z = a + i\,b$, où a et b sont des réels, est le nombre complexe $\bar{z} = a - i\,b$.



Remarques:

- Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z.\bar{z}}$

Propriétés

Pour tous nombres complexes z , z' et tout entier naturel non nul n,

on a : $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$; $\overline{z\,z'} = \bar{z}\ \overline{z'}$; $\overline{z^n} = \left(\bar{z}\right)^n$

Pour tous nombres complexes z et z' ($z' \neq 0$) et tout entier naturel n, on a :

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}} \quad ; \quad \left(\frac{1}{(z')^n}\right) = \frac{1}{\left(\overline{z'}\right)^n}$$

- $z + \bar{z} = 2\ Re(z)$; $z - \bar{z} = 2i\,Im(z)$
- z est réel $\Leftrightarrow$ $z = z$
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $z = -\bar{z}$.

Théorème

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z' on a:

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\bar{z}\,z'$ est réel
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\bar{z}\,z'$ est imaginaire pur

1 1) Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants (on donne les conjugués sous forme algébrique) : $\sqrt{5}$; -3 ; $3i$; $-7i$; $1+3i$; $-5-i$;

$\dfrac{3-5i}{2}$; $2i-3$; $(1+i)^{2008}$; $\dfrac{5-2i}{i}$; $\dfrac{1}{i}$; $\dfrac{5+i}{3-i}$

2) soient a et b deux réels et n un entier naturel. Ecrire sous la forme $(a+ib)^n$ les nombres complexes suivants: $\overline{(2-3i)^{17}}$; $\overline{\left(\dfrac{\overline{(3+i)}}{(4+3i)}\right)}$ et $\overline{\left(\dfrac{(3+i)^{20}}{(4+3i)^{20}}\right)}$

2 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on donne les points A et B d'affixes respectives $z = 1 + i a$ et $z' = 1 - i a$; avec a un nombre complexe.

1) Montrer que : $\bar{z}.z' = 1 - a\bar{a} - i(a+\bar{a})$

2) En déduire que :

a) Les points O, A et B sont alignés si et seulement si $Re(a) = 0$

b) Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si $a\bar{a} = 1$

3 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. On pose $Z = z + \dfrac{1}{z}$ $(z \neq 0)$

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit réel.

IV. Module d'un nombre complexe

Activités de découverte

Activité 1 :

Dans le plan complexe rapporté à un repére orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on donne les points A et B d'affixe respectives $z_A = -2i$ et $z_B = 2-3i$

1) Placer les points A *et* B

2) Calculer les réels suivants : OB et $\sqrt{z_B.\overline{z_B}}$. Conclure.

3) Calculer les réels suivants AB et $\sqrt{(z_B - z_A).\overline{(z_B - z_A)}}$. Conclure.

4) On considère le point $M(x, y)$ d'affixe z. Comparer OM et $\sqrt{z\,\bar{z}}$

➢ Le réel positif $\sqrt{z\,\bar{z}}$ s'appelle **module** du nombre complexe z et se note par $|z|$.

5) On considére les points M et N d'affixes respectives : $z_M = a + ib$ et $z_N = a' + ib'$.
Comparer AB et $|z_N - z_M|$.

Activité 2 :

Montrer que si z et z' sont deux nombres complexes alors $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.
(Pour montrer cette inégalité dans le cas où z et z' sont non nuls, on pourra en faire une interprétation géométrique et utiliser l'inégalité triangulaire)

Activité 3 :

Soient z et z' deux nombres complexes.

1) En utilisant l'égalité : $|z| = \sqrt{z\,\bar{z}}$, montrer que : $|z\,z'| = |z|\,|z'|$

2) En remarquant : $z' \cdot \dfrac{1}{z'} = 1$, où $z' \neq 0$, montrer que : $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$

3- En déduire que pour $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

A retenir

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Définition

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + i\,b$ et M le point d'affixe z.

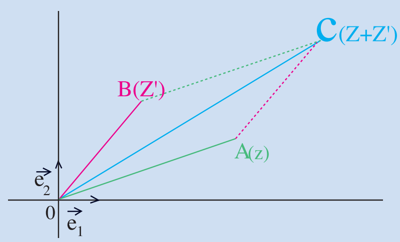
On appelle module du nombre complexe z et on note $|z|$ le réel positif $\sqrt{z\,\bar{z}}$. On a : $|z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$

Remarques

- Pour tout réel x, $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x" ou "module de x"
- Pour tout nombre complexe z imaginaire pur, si $z = i\,y$, avec y un réel, alors $|z| = |y|$

Conséquences

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$



Pour tous nombres complexes z et z' et tout réel k, on a :

- $|Re(z)| \leq |z|$; $|Im(z)| \leq |z|$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$
- Si A et B sont deux points du plan complexe alors $AB = |z_B - z_A|$

Propriétés

- Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier naturel non nul n,

  on a : $|z\,z'| = |z|\,|z'|$; $|k\,z| = |k|\,|z|$; $|z^n| = |z|^n$
- Pour tous nombres complexes z et z' $(z \neq 0)$ et tout entier naturel n, on a :

  $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$; $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$; $\left|\dfrac{1}{z^n}\right| = \dfrac{1}{|z|^n}$

Applications

1 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on donne les points A , B et C d'affixe respectives $z_A = \sqrt{3} + i$; $z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $z_C = 1 + i\sqrt{3}$

1) Calculer les modules respectifs de z_A , z_B et z_C
2) En déduire que les points A, B et C appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on donne le points A, B et C d'affixe respectives $z_A = i$; $z_B = -4 - i$; $z_C = -2 + 5i$.
1) Placer les points A, B et C
2) Calculer les affixes Z_1, Z_2 et Z_3 des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$
3) Calculer les modules respectifs de Z_1, Z_2 et Z_3
4) En déduire la nature du triangle ABC.

3 Le plan complexe est muni d'un repére orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.
1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 2i| = |z + 3|$.

2) a) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 3i| = 3$

b) En déduire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|\bar{z} + 3i| = 3$ et l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|\bar{z} - 3i| = 3$

V. Equations dans $\mathbb{C}$

Activités préliminaires

Activité 1 :

1) Factoriser dans IR, si c'est possible, en un produit de binômes du 1er degré :
$x^2 + 4$; $x^2 - 3$; $-x^2 + 9$; $2x^2 - 3x - 5$
2) Résoudre dans IR l'équation : $x^3 - 8 = 0$
3) Résoudre dans IR l'équation : $3x^4 + 4x^2 - 7 = 0$

Activité 2 :
Soit le polynôme f définie par $f(x) = 3x^3 + x^2 + 2x - 6$
1) Vérifier que 1 est une racine de f .
2) Résoudre alors dans IR l'équation $f(x) = 0$

1. Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

Activités de découverte

Activité 1 :
1) En remarquant que $-4 = (2i)^2$, résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 = -4$
2) a) Vérifier que : $z^2 + 2z + 5 = (z + 1)^2 + 4$
b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$: $z^2 + 2z + 5 = 0$

Activité 2 :
Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 = 0$; $z^2 = m$ $(m \in IR^*_+)$; $z^2 = m$ $(m \in IR^*_-)$

Activité 3 :

Soit le nombre complexe $3 + 4i$

1) En posant $z = x + iy$, montrer que : $z^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$

2) Trouver alors les solutions de l'équation $z^2 = 3 + 4i$.

Activité 4 :

1) Soient z et z' deux nombres complexes non réels de formes algébriques $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. Montrer l'équivalence suivante : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ |z| = |z'| \\ bb' > 0 \end{cases}$

2) En utilisant le résultat précédent, trouver les solutions de : $z^2 = 3 + 4i$

Activité 5 :

Soient a, b et c des nombres complexes.

On considère l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$.

Puisque les régles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que celles dans $\mathbb{R}$, on peut écrire :

$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ (forme canonique). On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

1) Résoudre (E) dans le cas où $\Delta = 0$

2) On suppose que $\Delta \neq 0$. On sait que, dans ce cas, Δ admet deux racines carrées δ et $(-\delta)$

Montrer alors que (E) admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ que l'on déterminera.

A retenir

Théorème

Soient z et z' deux nombres complexes non réels de formes algébriques $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, on a : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ |z| = |z'| \\ bb' > 0 \end{cases}$

Théorème 1 (admis)

Soit a un nombre complexe non nul.

L'équation $z^2 = a$ admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions opposées .

Les solutions de l'équation $z^2 = a$ sont appelées les racines carrées de a.

Théorème 2

Soit $T(z) = az^2 + bz + c$, où a, b et c sont des nombres complexes, tels que $a \neq 0$.

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de $T(z)$

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation $T(z) = 0$ admet une seule solution $z = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta \neq 0$ alors l'équation $T(z) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$z' = \dfrac{-b+\delta}{2\,a}$ et $z'' = \dfrac{-b-\delta}{2\,a}$ où δ est une racine carrée de Δ.

Remarque

Les solutions de l'équation $T(z) = 0$ sont aussi appelées les racines du polynôme $T(z)$.

Cas particulier : *a, b* et *c* sont des réels

- Si $\Delta > 0$, alors $z' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a}$ et $z'' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a}$

- Si $\Delta < 0$, alors $z' = \dfrac{-b+\ i\sqrt{-\Delta}}{2\,a}$ et $z'' = \dfrac{-b-\ i\sqrt{-\Delta}}{2\,a}$

Remarques

Soit $T(z) = a\,z^2 + b\,z + c$, où a, b et c sont des nombres complexes, tels que $a \neq 0$.

- Si z' et z" sont les solutions de l'équation $T(z) = 0$ alors on a:

$$z' + z'' = -\frac{b}{a} \quad ; \quad z' \,.\, z'' = \frac{c}{a} \quad ; \quad T(z) = a\,z^2 + b\,z + c = a\,(z - z')\,(z - z'')$$

- Si $a + b + c = 0$, alors l'équation $T(z) = 0$ admet deux solutions : 1 et $\dfrac{c}{a}$.
- Si $a - b + c = 0$, alors l'équation $T(z) = 0$ admet deux solutions : -1 et $-\dfrac{c}{a}$.

Applications

1 1) Déterminer les racines carrées des : 3 ; -5 ; $7 + 24\,i$.

2) a) Déterminer la forme algébrique de : $(1 + i)^2$ et $(1 - i)^2$.

b) En déduire les racines carrées de : i ; $3\,i$; $-i$; $-7\,i$.

2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $z^2 + z + 1 = 0$; $z^2 - (2 + i)\,z + 2\,i = 0$

3 Factoriser les expressions : $(2 - i\,)\,z^2 - (2 + \mathrm{i})\,z + 2\,i$; $i\,z^2 + \sqrt{2}\,z - i$.

2. Equations de degré supérieur à deux dans $\mathbb{C}$

Activités de découverte

Activité 1 :

1) a) Ecrire le nombre complexe $(3 + 4\,i\,)^2$ sous forme algébrique.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2\,z^2 + 3\,z + 2 - 3\,i = 0$

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : 2\,z^4 + 3\,z^2 + 2 - 3\,i = 0$

En posant $Z = z^2$, résoudre l'équation (E).

Activité 2 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

1) Vérifier que (- 1) est une solution de (E) .

2) Trouver les réels a, b et c tels que : $z^3 + z^2 + z + 1 = (z+1)(a\,z^2 + b\,z + c)$

3) Résoudre alors l'équation (E)

Point méthode :

Résolution d'une équation de degré 3

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ où $P(z) = a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$ $(a_1 \neq 0)$, connaissant une solution z_0 :

- On calcule les trois nombre complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z - z_0)(a\,z^2 + b\,z + c)$
- On résout l'équation : $a\,z^2 + b\,z + c = 0$

Résolution d'une équation bicarrée

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ où $P(z) = a\,z^4 + b\,z^2 + c$ $(a \neq 0)$:

- On pose $Z = z^2$ et on détermine Z' et Z'' solutions de l'équation $a\,Z^2 + b\,Z + c = 0$
- On cherche les racines carrées de Z' et Z''

Applications

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $z^3 + 8 = 0$; $z^3 + 3\,i\,z^2 - 3\,z - i = 0$; $z^4 + (1 - 2\,i)\,z^2 - 2\,i = 0$

2 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + (\sqrt{3} - i)\,z^2 + (1 - i\sqrt{3})\,z - i = 0$

1) Vésrifier que i est une solution de l'équation (E).

2) Trouver les réels b et c tel que: $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = (z - i)(z^2 + b\,z + c)$

3) Résoudre alors l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

3 On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^3\ 1$

1) Soit $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Vérifier que $1, j$ et $\bar{j}$ sont les racines de $P(z)$.

2) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives 1, j et $\bar{j}$.

a) Montrer que ABC est un triangle équilatéral.

b) Déterminer son centre de gravité.

Apprendre à chercher

Situation 1

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.On pose $Z = \dfrac{z-1}{z-i}$

1) Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ tels que Z soit réel.
2) Déterminer l'ensemble F des points $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur.

Vers une solution

On doit avoir $z - i \neq 0$ ($z \neq i$) autrement dit $M \neq A$ où A est le point d'affixe i.

Première méthode

- En posant $z = x + i\,y$ dans l'expression de Z, on obtient : $Z = \dfrac{(x-1)+i\,y}{x+i(y-1)}$
- En écrivant Z sous forme algébrique (multiplier le numérateur et le dénominateur par

$x - i\,(y - 1)$), on obtient : $Z = \dfrac{x^2-x+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} + i\dfrac{x+y-1}{x^2+(y-1)^2}$

- Les ensembles E et F sont tels que : $Im(Z) = 0$ et $Re(Z) = 0$ ...

Deuxième méthode

- En calculant $\overline{Z}$ on obtient : $\overline{Z} = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}$
- $Z = \overline{Z} \Leftrightarrow \dfrac{z-1}{z-i} = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}$ ($z \neq i$)

$\Leftrightarrow i\,(z + \overline{z}) + (z - \overline{z}) - 2\,i = 0 \quad (z \neq i)$

En posant $z = x + i\,y$ avec $(x, y) \neq (0, 1)$, on retrouve l'ensemble E .

- On adopte la même démarche pour retrouver l'ensemble F avec $Z = -\overline{Z}$.

Situation 2

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i = 0$

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure.
2) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Vers une solution

1) On pose $z = i\,y$ (où y un réel)

- z est solution de (E) si et seulement si $(2\sqrt{3}\,y^2 - 4\sqrt{3}\,y) + i\,(-y^3+2y^2+4y-8) = 0$

d'où le système (S) $\begin{cases} 2\sqrt{3}\,y^2 - 4\sqrt{3}\,y = 0 \\ -y^3+2y^2+4y-8 = 0 \end{cases}$

Pour résoudre le système (S), on résout l'équation $2\sqrt{3}\,y^2 - 4\sqrt{3}\,y = 0$ (la plus simple) et on vérifie si les solutions trouvées sont solutions de l'autre équation.

2) Déterminer b et c tels que : $z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i = (z-2i)(z^2+b\,z+c)$

- On trouve : $z_0 = 2\,i$; $z_1 = \sqrt{3}+i$ et $z_2 = \sqrt{3}-i$

Avec l'outil informatique

Produit de deux nombres complexes

Le programme suivant permet de calculer le produit de deux nombres complexes écrit en langage Turbo Pascal.

```
program produit;
uses wincrt ;
var a1, b1, a2,b2,ReP, ImP : real;
begin
writeln('donner la valeur de la partie reelle de z1');
readln(a1);
writeln('donner la valeur de la partie imaginaire de z1');
readln(b1);
writeln('donner la valeur de la partie reelle de z2');
readln(a2);
writeln('donner la valeur de la partie imaginaire de z2');
readln(b2);
ReP:=a1*a2-b1*b2;
ImP:=a1*b2+a2*b1;
writeln('le produit de z1 et z2 est: ',ReP,'+(',ImP,')i');
end.
```

Applications

Calculer $z_1 z_2$ dans chacun des cas suivants :

a) $z_1 = 3 + 4i$ et $z_2 = 1 - i$

b) $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 + i$

c) $z_1 = 2i$ et $z_2 = 3 + i$

Racine carrée d'un nombre complexe

Ce programme permet de calculer une racine carrée d'un nombre complexe écrit en langage Turbo Pascal.

```
program racine;
uses wincrt;
var a, b, ar,br, modu: real;
begin
writeln('donner la valeur de la partie reelle de z');
readln(a);
writeln('donner la valeur de la partie imaginaire de z');
readln(b);
modu:= sqrt(a*a+b*b);
ar:=sqrt((a+modu)/2);
br:=b/(2*ar);
writeln('une racine carrée de z est',ar,'+i(',br,')');
end.
```

Applications

Calculer une racine carrée de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = -3 + 4i$; b) $z = 1 + i$; ; c) $z = 2i$

VRAI-FAUX

1 Répondre par **vrai** ou **faux**

(z et z' sont deux nombres complexes et $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ un repère orthonormé du plan complexe).

1) $|z| = |z'| \Leftrightarrow z = z'$ ou $z = -z'$

2) $|z'| = |\bar{z}| \Leftrightarrow |z| = |z'|$

3) Les points d'affixes respectives z et $\bar{z}$ appartiennent à un même cercle de centre O.

4) Les nombres complexes a et b solutions de l'équation : $z^2 - 2z + 10 = 0$ sont conjugués.

2 **QCM**

Pour chaque question, une seule réponse est exacte.

1) L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 2i| = 4$ est :

a)La médiatrice de $[AB]$ avec $A(2i)$ et $B(4)$

b) un cercle de centre $A(2i)$

c) un cercle de rayon 2

2) $Im(3 + i(2+i))$ est :

a) $2 + i$ b) $2i$ c) 2

3) On considère le nombre complexe : $z = (1 - i)^2$

a) $|z| = 1$

b) z est réel strictement positif

c) z est imaginaire pur

4) Les solutions de $z^2 - 4z + 13 = 0$ sont :

a) $2 - 5i$ et $-2 + 5i$

b) $-4 + i$ et $4 + i$

c) $2 - 3i$ et $2 + 3i$

5) Les racines carrées de $\frac{2}{i}$ sont :

a) $\frac{\sqrt{2}}{i}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{i}$

b) $1 - i$ et $-1 + i$

c) $\sqrt{2}\, i$ et $-\sqrt{2}\, i$

6) On pose $z' = \frac{z + 4i}{z - 2}$; $z \neq 2$ .L'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z'| = 1$ est

a) un cercle de rayon 1

b) une droite

c) une droite privée d'un point

d) un cercle privé d'un point

On donne les nombres complexes :

$z = 4 + 3i$ et $z' = 5 - 2i$

3 Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants:

$z + z'$; $z - z'$; $3z - z'$;

$z z'$; $(z + z')^2$; $(z - z')^2$;

$z^2 - (z')^2$; $z^3 - (z')^3$; $\frac{z}{z'}$

4 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, placer les points d'affixes : $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 + i$, $z_3 = -1 + 2i$, $z_4 = 2 - i$, $z_5 = 2z_1 - 3z_2$, $z_6 = z_3(z_4 - z_2)$

5 Déterminer le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

$2 - \sqrt{3}$; $i\sqrt{2} + 5i$; i^4 ; $\frac{1 + 5i}{537 i}$; $2i - 7$

$\frac{1 + i}{1 - i}$; $\frac{3}{5 - i} + \frac{i}{5 + i}$

6 Soient les nombres complexes :

$z = 3 + 4i$ et $z' = 1 - i$.

Calculer les modules des nombres complexes suivants : z , z' , $z z'$

$\frac{1}{z}$; $\frac{z}{z'}$; z^{2007}

7 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on donne les points A et M d'affixe respectives :

$z_A = -1$ et $z = x + i y$, avec x et y des réels.

on pose $Z = \frac{i z}{z + 1}$

1) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.

2) En déduire

a) L'ensemble E des points M tels que Z soit réel.

b) L'ensemble F des points M tels que Z soit imaginaire pur.

8 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives 1, $-3i$ et i.

A tout point M d'affixe z $(z \neq -3i)$, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{z-1}{3-iz}$

1) a) Vérifier que, pour tout $z \neq -3i$,

$$z' = \frac{i(z-1)}{z+3i}$$

b) Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$

2) Déterminer l'ensemble des points M tel que z' soit réel .

3)a) Vérifier que, pour tout $z \neq -3i$,

$$|z'-i|.|z+3i| = \sqrt{10}$$

b) En déduire que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon

9 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on désigne par A le point d'affixe i.

A tout point M d'affixe z $(z \neq i)$, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{iz-2+4i}{z-i}$

1) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x, y, x' et y' désignent des réels.

a) Calculer x' et y' en fonction de x et y

b) Déterminer et représenter l'ensemble des points M tel que z' soit réel

c) Déterminer l'ensemble des points M tel que z' soit imaginaire pur

2) On pose $Z = z - i$ et $Z' = z' - i$.

a) Montrer que $ZZ' = -3 + 4i$. Calculer le module de ZZ' .

b) Soit r un réel strictement positif.
Déduire de ce qui précède que si M d'écrit le cercle (C) de centre A et de rayon r alors M' appartient à un cercle (C') de centre A

c) Déterminer r pour que (C) et (C') soient confondus.

10 Déterminer les racines carrées des chacun des nombres complexes suivants :

$1 + 2i\sqrt{2}$; $6 - 30i$; $-45 - 28i$; 5 ; $-7i$; $24 + 10i$; -7 ; $-5 + 12i$.

11 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $(2+i)z - 3 + 2i = 0$

2) $\dfrac{z+2}{z-1} = 3 + i$

3) $z + 3\bar{z} = 4 + 2i$

4) $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$

5) $(3+i)z^2 + (1+4i)z - 4 - 5i = 0$

6) $(2+i)z^2 - (3+2i)z + 1 - \dfrac{i}{2} = 0$

7) $z^2 - (10i - 7)z - (11 + 41i) = 0$

8) $z^2 - 4(6+i)z + (63 + 16i) = 0$

9) $z^3 - 8 = 0$

10) $z^3 + 1 = 0$

11 **1)** Soit $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$

a) Vérifier que $P(4) = 0$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 - 6\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + 12\left(\frac{z-i}{z+i}\right) - 16 = 0$$

(On peut poser $Z = \dfrac{z-i}{z+i}$)

13 **1) a)** Vérifier que $(2 - 3i)^2 = -5 - 12i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^2 - (4 - i) z + 5 + i = 0$

2) On considére dans $\mathbb{C}$, l'équation (E):

$z^3 - (10 - i) z^2 + (29 - 5 i) z - 30 - 6 i = 0$

a) Vérifier que :

$z^3 - (10 - i) z^2 + (29 - 5 i) z - 30 - 6 i$
$= (z - 6) (z^2 - (4 - i) z + 5 + i).$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 6$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = 3 - 2i$

a) Placer les points A, B et C

b) Calculer les distances AB, AC et BC

c) En déduire la nature du triangle ABC

d) Déterminer l'affixe de point D pour que $ACBD$ soit un carré.

14 On considère dans $\mathbb{C}$: $P(z) = z^4 - 4 z^2 + 16$

1) Déterminer le réel a tel que :

$P(z) = (z^2 + a z + 4)(z^2 - a z + 4)$

2) a) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On notera z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives.

b) Vérifier que les solutions de $P(z) = 0$ sont $z_1, -z_1, \overline{z_1}$ et $-\overline{z_1}$

3) Le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

a) Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_1, -z_1, \overline{z_1}$ et $-\overline{z_1}$

b) Vérifier que ces points sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 2.

15 **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système :

$$(S) \begin{cases} 8x + 2y + t = 0 \\ x + y + t = -5 \\ -x - y + t = -3 \end{cases}$$

2) On considère dans $\mathbb{C}$:

$f(z) = a z^3 + b z + c$; où a, b et c sont des réels.

a) Déterminer les réels a, b et c pour que l'on ait :

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(1) = -5 \\ f(-1) = -3 \end{cases}$$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$f(z) = 0$

16 **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système :

$$(S) \begin{cases} x + y - 2t = -6 \\ y + t = -1 \\ x + t = 3 \end{cases}$$

2) On considère dans $\mathbb{C}$:

$f(z) = a z^3 + bi z^2 + (c - 6) z + i c$

où a, b et c sont des réels.

a) Déterminer les réels a, b et c pour que l'on ait : $f(1) = -3 - i$ et $f(i) = 0$

b) Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = -1 + i$

a) Placer les points A, B et C

b) Déterminer la nature du triangle OBC.

17 Pour tout nombre complexe z on pose

$f(z) = z^3 - (16 - i) z^2 + (89 - 16 i) z + 89 i$

1) a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b) Démontrer qu'il existe deux réel b et c tels que : $f(z) = (z - z_0)(z^2 + b z + c)$

c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives :

$z_A = -i$, $z_B = 8 + 5i$ et $z_C = 8 - 5i$

a) Déterminer la nature du triangle ABC

b) Déterminer l'ensemble E des point M tels que $-MA^2 + MB^2 - MC^2 = 20$

18 I- On considère dans $\mathbb{C}$:

$f(z) = z^3 + a z^2 + b z + c$ où a, b et c sont des réels.

1) a) Montrer que si $f(2) = 0$ et $f(1 - i) = 0$ alors a, b et c vérifient le système :

$$(S)\quad \begin{cases} 4a + 2b + c + 8 = 0 \\ b + c - 2 = 0 \\ 2a + b + 2 = 0 \end{cases}$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S).

2) Dans la suite on prend

$f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$.

a) Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $f(z) = (z - 2)(z^2 - 2z + 2)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

II- Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 2 et $1-i$.

1) Montrer que le triangle OAB est rectangle en B.

2) Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

Montrer que $OABC$ est un carré.

(Bac Tunisien)

19 **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système :

$$(S)\quad \begin{cases} x + y + z = -1 \\ x - y + z = -5 \\ 4x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

2) On considère dans $\mathbb{C}$:

$f(z) = z^3 + a z^2 + b z + c$ où a, b et c sont des réels.

a) Déterminer les réels a, b et c pour que l'on ait :

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = -6 \\ f(2) = 12 \end{cases}$$

b) Vérifier que l'on a alors :

$f(z) = (z - 1)(z^2 + 2z + 4)$.

3) Résoudre, dans C, l'équation :

$(z - 1)(z^2 + 2z + 4) = 0$.

4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. On donne les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = 1$; $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$

a) Placer les points A, B et C.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallèlogramme.

(Bac Tunisien)

Au début du XVI$^{\text{ème}}$ siécle, le mathématicien **Scipione dal Ferro**, propose une formule donnant une solution de l'équation du 3$^{\text{ème}}$ degré : $x^3 + p\,x = q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

A la fin du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, le mathématicien Bombelli applique cette formule à l'équation

$x^3 - 15\,x = 4$. Il obtient littéralement : $x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$.

Cette écriture n'a, à priori, pas de sens puisqu'on ne sait pas ce que représente le symbole noté $\sqrt{-1}$

Mais **Bombelli** va plus loin. Il remarque que, en utilisant les régles usuelles de calcul que

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Si bien qu'il obtient finalement : $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$.

Or, 4 est bien une solution de l'équation $x^3 - 15\,x = 4$.

Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-desous $\left(\sqrt{-1}\right)$?

C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes.

➢Le symbole $\sqrt{-1}$ a été donc utilisé au XVI$^{\text{ème}}$ siècle par Bombelli. Or

- Les solutions de l'équation $z^2 = -1$ sont i et -i d'où $\sqrt{-1} = i$.

- On a : $\boldsymbol{1 = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i\,.\,i = i^2 = -1}$ c'est absurde.

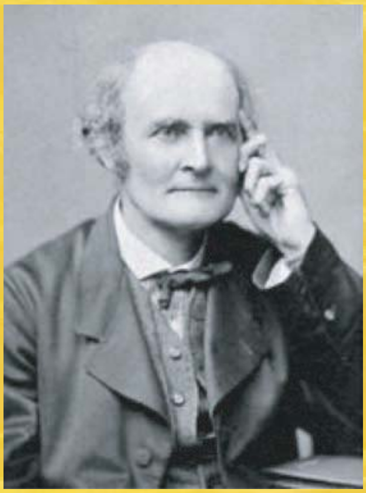
•Pour cette raison le symbole $\sqrt{-1}$ que nous avons utilisé en toute impunité est absolument interdit à partir de maintenant.

• Dans la réalité, il a fallu 150 ans pour l'abandonner et utiliser la notation i proposée par **Euler**.

Chapitre

11

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES



Arthur Cayley (1821 - 1895) mathématicien anglais, connu, surtout, pour avoir été l'inventeur de la théorie des matrices

I.Matrices et opérations sur les matrices

Activités de découverte

Activité 1 :

Ce tableau donne les quantités (en litres) de carburants vendues au cours d'une semaine,

	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
sans plomb	2000	1500	1000	1800	1500	2500	2400
super	1800	1500	1100	1500	1400	1500	2100
gazole	3000	2500	3200	2700	3500	3300	3500

1) Représenter les ventes de chaque jour par une colonne de 3 nombres.
2) Représenter les quantités de gazole vendues pendant la semaine.
3) Traduire, les quantités de carburants vendues au cours de cette semaine, par un tableau.

➢ Le tableau obtenu est une matrice de dimension 3×7 .

Une matrice A de dimension $n \times p$ est un tableau rectangulaire dont les éléments sont rangés en n **lignes** et p **colonnes** et on écrit : $A = (a_{ij})$ $1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq p$.
Les réels a_{ij} sont **les coefficients** de A. a_{ij} est le **coefficient** d'indice (i , j).
Une matrice comportant une ligne et p colonnes s'appelle un vecteur-ligne de dimension p.
Une matrice comportant une colonne et n lignes s'appelle un vecteur-colonne de dimension n.

Activité 2 :

Une entreprise de matériel audiovisuel possède quatre magasins A, B, C, D. La matrice S représente l'état des stocks de chacun d'eux en téléviseurs (t), magnétoscopes (m) et chaînes hi-fi (c). Elle décide de réapprovisionner leurs stocks selon la matrice R.
Quelle est la matrice M représentant le nouvel état des stocks ?
La matrice M est la **somme** de S et R.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ S = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} t \\ m \\ c \end{array} \end{array}$$

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} t \\ m \\ c \end{array}$$

➢ De façon générale la somme de deux matrices de même dimension $n \times p$ s'effectue en additionnant les coefficients de même indice et la matrice obtenue est aussi de dimension $n \times p$.

Activité 3 :

La matrice M ci-contre

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} 1000 & 1500 & 800 \\ 200 & 100 & 250 \\ 130 & 110 & 130 \end{pmatrix} \begin{array}{c} t \\ e \\ p \end{array} \end{array}$$

donne la quantité de travail (t), d'énergie (e), de matière première (p) pour fabriquer une unité de chacun des produits semis-finis A, B, C qu'un atelier fabrique.
Un autre atelier utilise les produits semis-finis A, B, C pour fabriquer les produits finis X et Y

selon la matrice N ci-contre. $N=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}$

Quelles quantités de travail, d'énergie et de matière première faut-il pour fabriquer une unité de X ? Une unité de Y ?.

➢ La quantité de travail est le produit d'un vecteur ligne par un vecteur -colonne.

Plus généralement le produit de $(a_1, a_2, ..., a_n)$ par $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ .b_n \end{pmatrix}$ est le réel $a_1b_1 + a_2b_2 + ..,+ a_nb_n$

➢ On appelle produit d'une matrice A de dimension $n \times p$ par une matrice B de dimension $p \times q$ la matrice notée $A \times B$ de dimension $n \times q$ obtenue de la façon suivante :
le cœfficient de la ligne l et de la colonne c de $A \times B$ est le produit du vecteur-ligne l de A par le vecteur-colonne c de B. par exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times(-1)+3\times1 & 2\times7+3\times(-2) & 2\times0+3\times6 \\ 4\times(-1)+5\times1 & 4\times7+5\times(-2) & 4\times0+5\times6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 18 \\ 1 & 18 & 30 \end{pmatrix}$$

Activité 4 :

1) Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

2) Soient A et B deux matrices de dimension 3×3 , vérifier que $A + B = B + A$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, calculer $A + A$, $A + A + A$.

➢ Plus généralement le produit d'une matrice M de dimension $n \times p$ par un réel k est la matrice de dimension $n \times p$, notée $k\,A$, obtenue en multipliant par k chaque coefficient de A.

4) Soient A, B et C trois matrices de dimension 3×3 .
a) vérifier que $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$.
b) vérifier que $k\,(A + B) = kA + kB$.

Activité 5 :

1) Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ que peut-on remarquer ?

2) Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ que peut-on remarquer ?

3) Calculer $\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Calculer $\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,8 & 1,1 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$

A retenir

Définitions

n et p désignent des entiers naturels non nuls,

une matrice de dimension $n \times p$ est un tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes.

Notation : Toute matrice M est notée (a_{ij}) et représentée comme ci-dessous.

a_{ij} désigne le cœfficient de la i $^{\text{éme}}$ ligne et de j $^{\text{éme}}$ colonne, avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a introduit la notation matricielle.

Colonnes $\longrightarrow$

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccccc} 1 & \quad & j & \quad & p \end{array} & \\ M = & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ . & & . & & . \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ . & & . & & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ . \\ i \\ . \\ n \end{array} \end{array}$$

Lignes

Une matrice comportant une ligne et p colonnes s'appelle **un vecteur-ligne** de dimension p.

Une matrice comportant une colonne et n lignes s'appelle **un vecteur-colonne** de dimension n

Lorsque n = m, on dit que la matrice est **carrée** d'ordre n.

A retenir

Une matrice carrée dont tous les cœfficients sont nuls sauf les a_{ij} formant la diagonale s'appelle **matrice diagonale**.
Une matrice diagonale dont tous les coefficients de la diagonale sont égaux à 1 est appelée **matrice unité**, notée I_n .
Une matrice dont tous les cœfficients sont nuls est appelée **matrice nulle**, notée θ .
Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont égales si et seulement si, elles sont de même dimension et si $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et j.

Opérations sur les matrices

Définitions

A et B sont deux matrices qui ont n lignes et p colonnes.

- La somme de A et B est la matrice $n \times p$, notée $A+B$, obtenue en additionnant deux à deux les termes qui ont la même position (ou ayant le même indce)
- Le produit de la matrice A par un réel k est la matrice $n \times p$, notée $k\,A$, obtenue en multipliant par k chaque coefficient de A.

Propriétés

Soient A, B et C trois matrices de dimensions n x p et k un réel alors :
1) $A + B = B + A$
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
3) $k(A + B) = kA + kB$

Définition

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice à n lignes et p colonnes et $B = (b_{jk})$ une matrice à $\boldsymbol{p}$ lignes et q colonnes. Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice, notée $A \times B = (c_{ik})$ à n lignes et q colonnes, définies par :

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{ip}b_{pk}$$

Remarques

- La multiplication de deux matrices n'est possible que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la deuxiéme.
- La disposition ci-dessous est très pratique : elle permet de calculer facilement le « produit d'une ligne de A par une colonne de B »

$$\times \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2\times 0 + 1\times(-1) + 5\times 4 & 2\times 1 + 1\times 2 + 5\times(-2) \\ 3\times 0 + 4\times(-1) + 1\times 4 & 3\times 1 + 4\times 2 + 1\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = A \times B$$

Le produit d'une matrice 2 x 3 par une matrice 3 x 2 est une matrice 2 x 2.

Propriétés

Soient A, B et C trois matrices, alors on a :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

Applications

1 A est une matrice 3x 3 dont voici certains termes : $a_{21} = 4$, $a_{32} = 5$, $a_{23} = 1$, $a_{13} = -5$, $a_{12} = 7$, $a_{31} = 3$

Recopier et compléter $A = \begin{pmatrix} 6 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 0 \end{pmatrix}$

2 Calculer les produits de matrices suivants :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ f. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

3 Calculer : $A = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ $B = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

$C = -2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

4 Calculer $A^2 = A \times A$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

5 Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Chercher la matrice $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $M \times N = I_2$.

II. Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3

Activités de découverte

Activité 1 :

Soit A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice donnée où a, b, c et d sont des réels non tous nuls. On se propose de chercher une matrice A' = $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que le problème revient à résoudre les deux systèmes suivants :

$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$ d'inconnues x, y, z et t.

2) Dans quelle condition ces systèmes admettent - ils une unique solution ?

3) Vérifier que la solution est $x = \dfrac{d}{ad - bc}$; $y = \dfrac{-b}{ad - bc}$; $z = \dfrac{-c}{ad - bc}$ et $t = \dfrac{a}{ad - bc}$.

➢ Le réel ad - bc est appelé **déterminant** de la matrice A, on le note :

dét (A) = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, et A' ainsi définie est la matrice inverse de A, notée A^{-1}.

Activité 2 :

Pour tout nombre réel a, on considère le système (S) $\begin{cases} ax + y + z = 3 \\ ax + a2 + az = -1 \\ x + y + az = 7 \end{cases}$

1) Résoudre ce système pour $a = 0$, $a = 1$ et $a = 2$.
2) Écrire le système (S) sous la forme A X = B où A est la matrice de ce système.

3) Calculer que Δ défini par $a\begin{vmatrix} a^2 & a \\ 1 & a \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix}$

4) Vérifier que $\Delta = a(a + 2)(a - 1)^2$ puis conclure s'il y a un lien entre valeurs de a pour lesquels $\Delta = 0$ et les ensembles de solutions de (S).

➢ Δ est appelé déterminant du système (S) ou de la matrice A du système. Plus généralement si M = $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ son déterminant est $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ que l'on calcule ainsi : $\Delta = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Activité 3 :

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

1) Vérifier que dét (M) = $a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$.

➢ On dit qu'on a développé le déterminant de M suivant la 1ére ligne. En général, on peut développer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 suivant n'importe quelle ligne ou colonne,en multipliant chaque déterminant d'ordre 2 par $(-1)^{i+j}$ où i est le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne, mais on préfère développer un déterminant suivant la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros.

2) a) Vérifier que $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 7 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

b) Montrer que $r\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ra & rb \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & rb \\ c & rd \end{vmatrix}$

c) En déduire que si deux colonnes ou deux lignes d'un déterminant d'ordre 2 ou 3 sont proportionnelles, alors ce déterminant est nul.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Par quelle transformation élémentaire a-t-on passé de A à B ?

b) Vérifier que dét (A) = dét (B).

➢ La valeur d'un déterminant ne change pas si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes ou à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes .

A retenir

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition

Soit M = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le déterminant de M est le réel, noté dét (M), définit par :

$$\text{dét (M)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Définition

Le déterminant d'une matrice carrée M d'ordre 3 est le réel défini par :

$$\text{dét (M)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}a_1det(A_{11}) + (-1)^{2+1}a_2det(A_{21}) + (-1)^{3+1}a_3det(A_{31})$$ où A_{ij} obtenue en supprimant la i^e ligne et la j^e colonne de A.

Remarque

On peut développer le déterminant suivant une autre ligne ou une autre colonne.

Propriétés

- La valeur d'un déterminant change de signe si on permute deux lignes ou deux colonnes entre elles.
- Un déterminant qui posséde deux lignes ou deux colonnes identiques est nul.
- Dans un déterminant, on peut mettre en évidence un facteur commun à tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne.
- La valeur d'un déterminant ne change pas si on lui applique la transformation élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + a_2L_2 + a_3L_3$.

Applications

1 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

2 Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ v & x & 0 \\ w & y & z \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

Quelles conclusions peut-on déduire ?

3 Soit A une matrice carrée d'ordre 3. Posons $det(A) = \delta$ et soit k un réel.
Que vaut le déterminant de la matrice

a) $B = k\,A$?

b) C obtenue en multipliant les termes de la 1ére colonne de A par $3k$, ceux de la 2éme colonne par $-5k^2$ et en divisant ceux de la 3éme colonne par 4 ?

4 Vérifier, sur un exemple, que si M et N sont deux matrices carrées d'ordres 2 ou 3, alors

$$det(M \times N) = det(M).det(N)$$

III. Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3

Activités de découverte

Activité 1 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice donnée où a, b, c et d sont des réels non tous nuls. On se propose de chercher une matrice $A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que le problème revient à résoudre les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$$ d'inconnues x, y, z et t.

2) Dans quelle condition ces systèmes admettent une unique solution ?

3) Vérifier que la solution est : $x = \dfrac{d}{ad - bc}$; $y = \dfrac{-b}{ad - bc}$; $z = \dfrac{-c}{ad - bc}$; $t = \dfrac{a}{ad - bc}$

➢ La A' ainsi définie est la matrice **inverse** de A, notée A^{-1} .

Activité 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

1) Ecrire la matrice B obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de même indice de A.

➢ La matrice B est appelée **transposée** de A et se note A^t.

2) Vérifier que $det(A) = det(A^t)$.

Activité 3 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} -10 & 5 & -4 \\ \frac{13}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculer dét (A) et dét (A').

b) Calculer $A \times A'$ puis $A' \times A$. Que peut-on conclure ?

➢ La matrice A' est la matrice **inverse** de A, on la note A^{-1} . La matrice A est dite **inversible**

2) a) Soit B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer dét ($B$).

b) Vérifier que $B^3 + I_3 = \theta$ où $B^3 = B \times B \times B$

En déduire que B est inversible et déterminer B^{-1} .

➢ Plus généralement, on montre qu'une matrice carrée M d'ordre 3, est inversible si et seulement si, son déterminant est non nul et dans ce cas il existe une matrice carrée d'ordre 3, notée M^{-1}, telle que $M \times M^{-1} = M^{-1} \times M = I_3$

➢ Pour calculer l'inverse d'une matrice carrée $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 3$, d'ordre 3, dont le déterminant est non nul, on considère la matrice (A_{ij}) où chaque coefficient est otenu en supprimant la i^e ligne et la j^e colonne de A.

On appelle **mineur** de a_{ij} dans A le déterminant de la matrice (A_{ij}).

Le réel $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$ est appelé **cofacteur** du coefficient a_{ij} .

On appelle aussi comatrice de A et on note $Com\,A$ la matrice carrée d'ordre 3 de terme général (α_{ij}) , $1 \leq i, j \leq 3$. La matrice inverse de A est alors donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(ComA)^t$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que dét(A) = -1.

A est alors inversible. Calculons la matrice des cofacteurs de A. vérifier que l'on obtient :

$$ComA = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En transposons la matrice obtenue, on obtient : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Il reste à diviser chaque terme de cette matrice par le déterminant de A.

on obtient la matrice inverse de A qui est : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

A retenir

Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition

Soit $M = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 2 ou 3. l'inverse de M, si elle existe, est la matrice, notée M^{-1} telle que $M \times M^{-1} = M^{-1} \times M = I_n$ où I_n est la matrice unité(n = 2 ou 3)

Remarques

1) Une matrice n'admet pas forcément d'inverse, dans ce cas on dit qu'elle n'est pas inversible.
2) Si une matrice est inversible, alors l'inverse est unique.

Théorème

Une matrice carrée M d'ordre 2 est inversible si et seulement si, dét $(M) \neq 0$, dans ce cas

$$\text{si } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } M^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Théorème

Une matrice carrée M d'ordre 3 est inversible si et seulement si, dét $(M) \neq 0$

Applications

1 1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ Vérifier que $ComA = \begin{pmatrix} -8 & -24 & 16 \\ -16 & 8 & -8 \\ 8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

2) Calculer dét(A), en déduire A^{-1} .

2 Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leurs inverses.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que $(I_3 - M)^3 = \theta$ où θ est la matrice nulle.

En déduire que M est inversible et préciser son inverse.

4 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 19 & -18 & 7 \\ -14 & 12 & -2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer *dét(A), dét(B), A* x *B* puis *dét(A* x *B)*

5 Montrer que si M est une matrice carrée inversible alors $det(M^{-1}) = \dfrac{1}{det(M)}$

IV. Applications

Activités préliminaires

1. Résolution de systèmes linéaires

Activité 1 :

1) Vérifier que les deux systèmes suivants sont équivalents.

$$(S)\ \begin{cases} x-3y+2z=1 \\ 2x-y+3z=9 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases} \qquad (S')\ \begin{cases} x-3y+2z=1 \\ 5y-z=7 \\ z=3 \end{cases}$$

Activité 2 :

On considére le système suivant $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1 & (L_1) \\ x_1 \quad -x_2+x_3=2 & (L_2) \\ 4x_1+3x_2+x_3=1 & (L_3) \end{cases}$

1) Ecrire la matrice de ce système et calculer son déterminant.

2) Ecrire la matrice complète de ce système puis par les opérations élémentaires suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ écrire la nouvelle matrice compléte

du systéme.

3) Supprimer x_2 dans la troisième ligne puis déterminer la solution du système.

La méthode utilisée précédemment pour résoudre le système est appelée méthode du **pivot**

➢ **de Gauss**

Activités de découverte

Activité 1 :

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer son déterminant. En déduire que A est inversible.
2) Etant donné un triplet (X,Y,Z), on se propose de chercher un triplet (x,y,z) tel que :

$$\begin{cases} x \quad -z=X \\ 2x+y+3z=Y \\ \quad -y+z=Z \end{cases}$$

a) Vérifier que ce système s'écrit sous la forme $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$.

➢ On dit qu'on a exprimé le système d'équations sous forme matricielle.

b) On doit donc résoudre le système de matrice $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & X \\ 2 & 1 & 3 & Y \\ 0 & -1 & 1 & Z \end{array}\right)$

Par la méthode du pivot de Gauss, vérifier les calculs successifs suivants :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & X \\ 0 & 1 & 5 & -2X+Y \\ 0 & -1 & 1 & Z \end{array}\right) \; ; \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & X \\ 0 & 1 & 5 & -2X+Y \\ 0 & 0 & 6 & -2X+Y+Z \end{array}\right) \; ; \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & X \\ 0 & 1 & 5 & -2X+Y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3}X+\frac{1}{6}Y+\frac{1}{6}Z \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3}X+\frac{1}{6}Y+\frac{1}{6}Z \\ 0 & 1 & 5 & -2X+Y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3}X+\frac{1}{6}Y+\frac{1}{6}Z \end{array}\right) \; ; \text{ puis } \; \overset{I_3}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3}X+\frac{1}{6}Y+\frac{1}{6}Z \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3}X+\frac{1}{6}Y+\frac{-5}{6}Z \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3}X+\frac{1}{6}Y+\frac{1}{6}Z \end{array}\right)}$$

c) Vérifier que $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-5}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

➢ De façon générale, si une matrice M est inversible, il est possible, par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, de passer de M à I_3.

Activité 2 :

On peut constater, à partir de l'activité précédente, qu'appliquer une transformation élémentaire de lignes à une matrice M revient à multiplier à gauche cette matrice par la matrice identité I_3 dans laquelle on a effectué la même transformation. Pour la recherche de

l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ on peut alors procéder ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Compléter ce procédé en appliquant les transformations indiquées.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \qquad \begin{pmatrix} .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} -10 & 5 & -4 \\ -13 & 6 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow \frac{L_2}{(-2)} \qquad \begin{pmatrix} .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

2) Déduire l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

3) On veut maintenant résoudre le système suivant $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

a) Vérifier que $\begin{pmatrix} -10 & 5 & -4 \\ \frac{13}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) En déduire que la solution du système est $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

A retenir

Théorème

Soit une matrice carrée A d'ordre 2 ou 3 telle que dét(A) $\neq 0$.

Un système, qui s'écrit matriciellement $A \times X = B$, a une solution et une seule, définie par $X = A^{-1} \times B$, où A^{-1} est l'inverse de A.

Remarque

Lorsqu'un système $A \times X = B$ n'a pas de solution ou une infinité de solutions, la matrice A n'admet pas de matrice inverse.

1 Soit $P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le déterminant de P, en déduire qu'elle est inversible.

2) Utiliser le procédé utilisé dans les activités de découvertes précédentes pour vérifier que

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

3) Résoudre alors le système $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2 Déterminer, si elle existe, l'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3 Résoudre le système $\begin{cases} -x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y = 3 \\ 3x + y - 2z = -2 \end{cases}$

4 Considérons la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

1) Calculer $A^2 = A \times A$.
2) Montrer que $A^2 - 3A + 2I = \theta$ (θ étant la matrice nulle d'ordre 3).
3) Déduire que A est inversible et calculer A^{-1}

2. systèmede Cramer

Considérons le système carré suivant (S) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$

1) Ecrire la matrice M de (S) et calculer dét (M). En déduire que le système (S) admet une unique solution.

➢ On appelle **système de cramer** tout système carré dont la matrice est inversible.

2) Vérifier que l'on peut écrire le système (S) sous la forme : $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) En revenant au paragraphe III. 1. vérifier qu'on peut exprimer la solution du système de la manière suivante :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 9 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}} \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}}$$

➢ Plus généralement considérons le système d'équations (S) $\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = k_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = k_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = k_3 \end{cases}$

C'est important d'exprimer ce système d'équations sous forme matricielle, puisque les calculatrices qui résolvent ce genre de problème demandent souvent qu'on leur donne les coefficients sous forme matricielle. On va donner une méthode de résolution qui fait appel à cette notation : c'est la méthode de *Cramer*.

Gabriel Cramer (1704-1752)
Mathématicien suisse ; nous lui sommes redevables de la résolution complète des systèmes carrés par les déterminants

Nous supposons que (S) est de *Cramer*, il s'écrit :

$A \times X = K$ où $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

la matrice des inconnues et $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$ la matrice des constantes.

Nous noterons A_i ($i = 1, 2, 3$) la matrice A des coefficients dans laquelle on a remplacé la i^e colonne par la matrice des constantes. La solution du système, par la méthode de *Cramer*, est donnée par :

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

➢ Remarquer qu'il s'agit de la même méthode, déjà vue, pour les systèmes carrés d'ordre 2 :

A retenir

Définition

On appelle **système de Cramer** tout système linéaire de n équations à n inconnues ($n = 2$ ou 3) : $M \times X = K$ tel que dét $(M) \neq 0$.

Théorème

Tout système de Cramer d'ordre 3 a une unique solution (x_1, x_2, x_3) donnée

par $x_i = \dfrac{det(\mathrm{M}_i)}{det(\mathrm{M})}$ où M_i est la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\text{éme}}$

colonne de la matrice M par celle des constantes.

Applications

1 Soit le système $\begin{cases} x + y - z = 10 \\ x + \quad 10z = 10 \\ x + y + 9z = 20 \end{cases}$

1) Vérifier que ce système est de *Cramer*.

2) Vérifier que la solution de ce système est $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 Résoudre le système $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = -7 \\ 5x + 7y - 3z = 16 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$ par la méthode de *Cramer*.

3 Résoudre les systèmes suivants, d'abord en employant une méthode algébrique (substitution ou réduction), puis par la méthode de Cramer.

$$\begin{cases} u + v + w = 1 \\ 2u - v - w = 5 \\ -u + 2v - 3w = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 11 \\ 3x - 4z = -1 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

Apprendre à chercher

Situation 1 : Un problème d'Euler

« Trois personnes jouent ensemble trois parties. A chaque partie, le perdant double l'avoir de chacun des deux autres joueurs. Ils se retirent du jeu avec 24 louis chacun. On demande combien chaque joueur avait d'argent au début de jeu, sachant que chacun d'eux a perdu une partie.»

Vers une solution : mise en équation

	Avoir des joueurs		
Parties	1^{er} joueur	2^{e} joueur	3^{e} joueur
Au début	x	y	z
Aprés la $1^{ére}$ partie	$x- y -z$	$2y$	$2z$
Aprés la $2^{éme}$ partie	$2(x-y -z)$	$3 y- x -z$	$4z$
Aprés la $3^{éme}$ partie	$4(x -y-z)$	$2(3y-x -z)$	$7z-x -y$

Nous sommes donc ramenés à résoudre le système: $\begin{cases} 4(x-y-z)=24 \\ 2(3y-x-z)=24 \\ 7z-x-y \quad =24 \end{cases}$

La solution est $x = 39$, $y = 21$, $z = 12$.

Situation 2

A partir du système(S) $\begin{cases} x-y=0 & (1) \\ y-z=1 & (2) \\ z-x=0 & (3) \end{cases}$ on forme le système(S') $\begin{cases} x-z \quad =1 & (1)+(2) \\ z-y \quad =0 & (1)+(3) \\ x+y-2z=1 & (2)-(3) \end{cases}$

obtenu par les combinaisons indiquées.

Il est clair que le système(S) est sans solution alors que (1, 0 , 0) est une solution de (S').

D'où vient l'erreur ?

Situation 3

Soit à résoudre le système $\begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+az=0 \end{cases}$ où a est un réel arbitraire.

La matrice de ce système est $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ qu'on peut écrire, après permutations de lignes,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ qu'on transforme (quelles sont les transformations ?) en $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}$

Si $a = 1$, déterminer les solutions du système.

Si $a \neq 1$, la matrice devient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1+a \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1+a \\ 0 & 0 & 2+a \end{pmatrix}$, comment ?

Si $a = - 2$, le système est équivalent à $\begin{cases} x+y=2z \\ \quad y=z \end{cases}$; quelles sont alors les solutions du système ?

Si $a \neq -2$, montrer que l'unique solution du système est $(0,0,0)$.

Avec EXCEL

• Une matrice A à n lignes et p colonnes est identifiée de la façon suivante : nom de la cellule contenant le terme a_{11} : nom de la cellule contenant le terme a_{np} (par exemple A1 : C3).

• Pour définir le nom A à cette matrice, sélectionner les cellules A1 : C3 puis, dans la barre d'outils cliquer **Insertion** / **Nom** / **Définir** et, dans la boite de dialogue nommer A.

• Pour toute opération sur des matrices A et B préalablement nommées, on prévoit la forme du résultat et on sélectionne la plage de cellules vides qui va recevoir ce résultat. Dans la barre de formule on écrit : = suivi du calcul et on valide par les touches **Ctrl Maj Entrée**

• Pour obtenir la somme A+B, on écrit : = A+B

• Pour obtenir 3A-B, on écrit : = 3*A-B

• Pour obtenir le produit A x B, on écrit : = PRODUITMAT (A ; B)

• Pour obtenir A^n (n = 2,3,…), on écrit : = A^n

• Pour obtenir la matrice inverse de A, on écrit : = INVERSEMAT(A)

Résolution d'un système avec un tableur

1) (S) est le système $\begin{cases} 3x + 2y + 6z = 24 \\ 2x + 4y + 3z = 23 \\ 5x + 3y + 4z = 33 \end{cases}$

a) Ecrire ce système sous la forme $AX = B$ en précisant la matrice A et les vecteurs X et B.

b) Comme sur la feuille de calcul ci-contre, entrer la matrice A dans la plage A1 : C3 et la matrice B dans la plage E1 : E3.

	A	B	C	D	E
1	3	2	6		24
2	2	4	3		23
3	5	3	4		33

c) Dans la cellule A5, taper la formule :

= INDEX(INVERSEMAT($A$1 :$C$3) ;1 ;1)

Dans la cellule A5 s'affiche le terme a_{11} de la matrice inverse de A.

d) Sélectionner la plage A5 : C5 et recopier à droite la formule précédente de façon à obtenir les termes a_{12} et a_{13} de la matrice inverse de A (on sélectionne les termes des cellules a_{12} et a_{13} et on remplace les indices (1 ; 1) de la formule par (1 ; 2) et (1 ; 3)).

e) Sélectionner la plage A5 : C7 et recopier vers le bas de façon à obtenir comme précédemment les autres termes de la matrice inverse de A.

f) Dans la cellule E5, taper la formule :

= INDEX(PRODUITMAT($A$5 :$C$7 ;$E$1 ;$E$3) ;1 ;1)

g) Sélectionner la plage E5:E7 et recopier en bas la formule précédente afin d'obtenir comme dans le c) les termes a_{21} , a_{22} et a_{23} de A^{-1} B.

Conclure sur la solution de (S).

2) Résoudre avec Excel le système: $\begin{cases} 3a - 2b + 6c = 0 \\ 24a - 12b + 41c = 2 \\ -17a + 9b - 5c = 5 \end{cases}$

1 Indiquer la réponse exacte

1) le vecteur $u = (-4;2;-1)$ est de dimension

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

2) une matrice de dimension 3 x 2 a

☐ 3 lignes et 2 colonnes

☐ 2 lignes et 3 colonnes

☐ 6 lignes et 6 colonnes

3) $u = (1;2;3)$ et $v = (-2;3;2)$

Alors $2u + v$ est le vecteur-ligne

☐ (0 ; 7 ; 8) ☐ (-2 ; 10 ; 10) ☐ (-3 ; 8 ; 7)

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

☐ $A + X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $A + X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

☐ On ne peut pas additionner A et X

5) $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

☐ $X \times Y = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ ☐ $X \times Y = (-3 \quad -3)$

☐ On peut pas multiplier X et Y.

6) l'égalité $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est l'écriture matricielle du systéme

☐ $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 2x = 1 \\ -2y = 2 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x = 2 \end{cases}$

2 Dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier la réponse

1) un vecteur-colonne de dimension 4 est une matrice de dimension 2 x 2.

2) si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

alors $A + B = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

3) si $A = (1 \quad 2 \quad 3)$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

alors $A \times B = \theta$

4) le système $\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

5)

$$\begin{cases} 7x + 3y - 3z = a \\ -8x + 5y - 4z = b \\ 5x - 7y + 5z = c \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -20 & -50 & -52 \\ -31 & -64 & -59 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3 Lire ci-dessous l'énoncé et la solution d'un éléve. Corriger les erreurs et rédiger la bonne solution.

Enoncé

a) Résoudre le système $\begin{cases} 5x + 2y = a \\ 4x + y = b \end{cases}$

où a et b sont des réels donnés.

b) En déduire l'inverse de la matrice.

Solution $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

a) Avec a = 1 et b = 3 le système s'écrit

$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 4x + y = 3 \end{cases}$ On trouve $x = \frac{5}{3}$ et $y = \frac{-11}{3}$

b) On trouve $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}33 & 0{,}66 \\ 1{,}33 & -1{,}66 \end{pmatrix}$

4 Posons $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $M^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $M^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

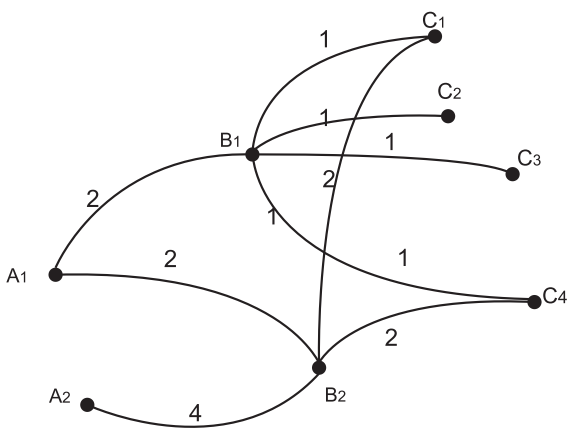
où $M^n = M \times M \times \ldots \times M$(n fois) pour $n \geq 2$

2) Refaire la même question avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ au lieu de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5 Le schéma ci-dessous représente le nombre de liaisons aériennes quotidiennes entre les aéroports de trois pays A, B, C.
Par exemple : il y a 4 vols entre les aéroports A_2 et B_2.

a) Ecrire les matrices M, N et P représentant les liaisons de A vers B, de B vers C et de A vers C.

b) Vérifier que $P = M \times N$. Interpréter ce résultat.



6 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer A^2, A^3 et A^4 ($A \times A = A^2$ ...)
b) En déduire une expression générale, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, de A^n.

7 Calculer $A \times B$ *et* $B \times A$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le produit des matrices carrées est-il commutatif ?

8 Calculer les produits de matrices suivants :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **d).** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

9 Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $A + B$; $4A - 3B$;

b) Peut-on faire le produit A x B ?

10 Soient $a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$

et B = $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) Donner la condition sur a pour que A soit inversible.
2) Trouver les réels a pour lesquels la matrice $B - a\,I_3$ n'est pas inversible.

11 Une entreprise de confection de vêtements fabrique des jupes, des robes et pantalons. Pour fabriquer une jupe, il faut 0,75 m de tissu, 4 boutons et une fermeture ; la confection d'une robe nécessite 1,50 m de tissu, 6 boutons et une fermeture ; pour confectionner un pantalon, on utilise 1,25 m de tissu, 2 boutons et une fermeture. On appelle x, y et z les quantités respectives de jupes, de robes et de pantalons confectionnés et a, b et c les quantités de tissus (en métres), de boutons et de fermetures utilisés pour leur fabrication.

On appelle $M = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 1{,}50 & 1{,}25 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

1) a) Vérifier que $B = M \times A$.
b) Déterminer a, b et c pour la fabrication de 200 jupes, 120 robes et 320 pantalons.
2) On considére la

matrice $M' = \begin{pmatrix} -1{,}6 & 0{,}1 & 1{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & -1{,}4 \\ 0{,}8 & -0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $M' \times M$.
b) Ecrire la matrice A en fonction de B et de M'.
c) En déduire x, y et z quand on a utilisé 735 mêtres de tissu, 2400 boutons et 620 fermetures.

12 L'inventaire des calculatrices de type A et de type B, en stock dans trois points de ventes d'une grande surface, est donné

par la matrice : $M = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 17 & 5 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$ où les

lignes indiquent les stocks de calculatrices disponibles dans chacun des trois points de ventes. Le prix de vente en dinars des calculatrices de type A et de type B est donné par la matrice à une seule colonne

$N = \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \end{pmatrix}$

1) Calculer $M \times N$.
2) Que représentent les nombres obtenus dans la matrice $M \times N$?

13 Déterminer dans chaque cas la matrice A qui vérifie :

$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = I_3$

14

Soient $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que
$A = T + I_3$ et $A \times I_3 = I_3 \times A = A$
2) Calculer T^2 puis T^3 en déduire T^n puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

15 Soit

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^3 en déduire A^{-1}

2) Résoudre le système $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

16 On considére la matrice : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^2 puis $B = 4A - A^2$ et le produit $A \times B$ En déduire A^{-1}.
2) Résoudre par un calcul matriciel, le système d'équations suivant :

17 Résoudre, par la méthode des déterminants, les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ -3x + y - z = 5 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

18 Déterminer toutes les matrices carrées d'ordre 2 vérifiant : $A^2 = A$.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -2 \\ 4x + 5y + 6z = 1 \\ 7x + 8y + 9z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x + 3y - 3z = 2 \\ -8x + 5y - 4z = -1 \\ 5x - 7y + 5z = 6 \end{cases}$$

19 Dans une entreprise, le secrétariat, la comptabilité et l'atelier ont estimé leurs besoins pour le premier trimestre en crayons, stylos et surligneurs :

	crayons	stylos	Surligneurs
Secrétariat	100	200	100
Comptabilité	200	300	180
Atelier	500	300	120

1) Ecrire la matrice A associée à ce tableau. Que représentent les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \text{ et } A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

2) Les prix unitaires, en dinars, proposés par trois fournisseurs A, B et C sont les suivants

	A	B	B
Crayons	0,250	0,280	0,300
Stylos	0,120	0,110	0,110
Surligneurs	0500	0,450	0,420

A l'aide de produit de deux matrices, présenter les dépenses estimées de chacun des services suivants le fournisseur qu'il aura choisi. En déduire

a) Quel sera le choix le plus économique pour le secrétariat ?

b) Les trois services ont-ils intérêt à faire une commande commune ?

20 Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On définit par récurrence: $A^0 = I_3$, $A^1 = A$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^{n+1} = A^n \times A$. Montrer que pour tout entier n, $A^{n+1} = 3^n.A$.

21 Dans une île, les mouvements de population peuvent être modélisés ainsi : chaque année, 40% des habitants de la capitale quittent celle-ci tandis que 20% des habitants du reste de l'île viennent y habiter. On néglige les autres échanges. Partant d'une population $E_0 = (c_0, b_0)$

1) Quelle est la population un, deux, trois ans aprés ?

2) Notons $E_1 = (c_1, b_1)$ $E_2 = (c_2, b_2)$ $\ldots E_n = (c_n, b_n)$ la population un, deux,..., n ans après.

a) Vérifier que $\begin{pmatrix} c_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$

soit $E_1 = A \times E_0$.

b) Montrer que $E_n = A^n \times E_0$.

c) Etudier l'évolution sur n années ($n < 30$), suivant certains états initiaux, et chercher si le nombre d'habitants respectifs de la capitale et du reste de l'île est stable au cours du temps.

22 Considérons les 3 systèmes

$$(1) \begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x - 6y = -3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2,999y = -1 \\ 2x - 6y = -3 \end{cases}$$

$$\text{et } (3) \begin{cases} x - 2,9995y = -1 \\ 2x - 6y = -3 \end{cases}$$

1) Le système(1) admet-il des solutions ?

2) Vérifier que (1498,5 ; 500) (respectivement (2998,5 ; 1000)) est la solution de (2) (respectivement (3)).

3) Quelle remarque peut-on déduire?

23 Une usine fabrique chaque jour trois types de cartes d'ordinateur : le modéle I, le modèle B et le modèle M. pour chaque modèle, on utilise des puces électroniques de types P_1,P_2 et P_3 avec la répartition suivante :

puce \ modéle	I	B	M
$P1$	5	2	7
$P2$	3	8	6
$P3$	3	4	5

a) Ecrire la matrice A déduite de ce tableau.
b) A l'aide d'un vecteur colonne X à définir et la matrice A, calculer le nombre de puces de chaque modèle nécessaire fabriquer 20 cartes I, 12 cartes B et 18 cartes M.
c) Un certain jour, on utilise 588 puces P_1, 630 puces P_2 et 470 puces P_3. On note x, y et z les nombres respectifs de cartes I, B et M fabriquées.

Compléter l'égalité $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... \\ ... \\ ... \end{pmatrix}$

Déterminer x, y et z en utilisant la matrice A^{-1}.

25 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $M \times M$, notée M^2.
2) Vérifier que $M^2 - M - 2I_3 = \theta$
En déduire que la matrice M est inversible et donner l'expression de M^{-1}.

3) Résoudre le système $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

25 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 10 & 8 \\ -8 & 6 & 4 \\ -24 & 15 & 13 \end{pmatrix}$$

1)Calculer $A \times A$, notée A^2.
2)Vérifier que $A^2 - 3A + 2I_3 = \theta$; en déduire que A est inversible et donner l'expression de sa matrice inverse.
3) Résoudre le système suivant :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Pour chacune des matrices suivantes calculer son déterminant, puis déterminer sa matrice inverse si elle existe.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

26 Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier qu'on a : $A = B + 4I_3$.
2) Trouver une relation entre A et A^2.
3) Trouver une relation entre B, B^2 et I_3.
4) Montrer que B est inversible et déterminer B^{-1}.
5) Résoudre le système $B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

LES CARRÉS MAGIQUES

Un carré magique est un tableau de nombres entiers qui posséde les propriétés suivantes :
1. la somme des entiers de chaque ligne vaut n.
2. la somme des entiers de chaque colonne vaut n.
3. la somme des entiers de chaque diagonale vaut n.

De tout temps les carrés magiques ont exercé une fascination sur l'homme. Par exemple un carré magique 4 x 4 figure sur la gravure au burin (ci-contre) la Mélancolie d'Albrecht Dérer (1514).De nos jours les carrés magiques sont utilisés dans divers domaines, comme la réalisation d'emploi du temps,

On peut montrer que tout carré magique 3 x 3 peut s'écrire de manière unique sous la forme suivante où m, n, p sont des entiers.

$$m\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

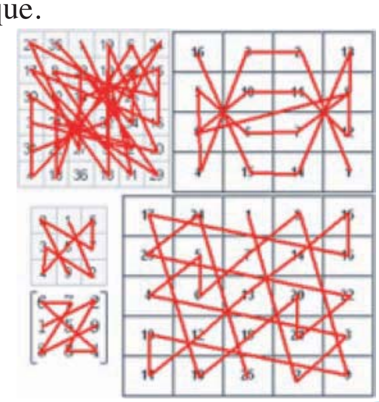
Pour les carrés magiques normaux d'ordre n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, … la constante magique vaut ainsi : 15, 34, 65, 111, 175, 260, ….

Ordre3		
8	1	6
3	5	7
4	9	2

Ordre4			
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

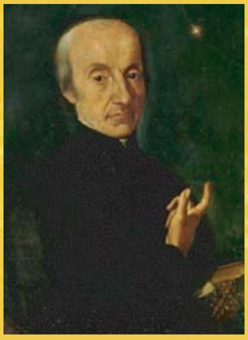
Ordre5				
17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Si l'on relie les nombres du carré magique dans l'ordre croissant, on obtient une figue symétrique.



Chapitre 12

SÉRIES STATISTIQUES A DEUX CARACTÈRES



Giuseppe Piazzi

Le 1er janvier 1801, l’astronome G. Piazzi a décelé dans le ciel un objet inconnu. Après l’avoir étudié pendant quelques temps, il fit part de sa découverte. Mais lorsque ses collègues voulurent observer cet objet, ils ne le trouvèrent plus.

Le mathématicien Carl Friedrich Gauss appliqua alors la méthode des moindres carrés qu’il avait mise au point quelques années plus tôt et réussit à prédire, à partir des observations de Piazzi, où serait précisément cet objet céleste le dernier jour de l’année.

I. Activités de rappel

Activité 1 :

Voici les notes du dernier devoir de contrôle de mathématiques de la classe de 4ème sciences de l'informatique :

14 16 12 10 12 14 15 15 16 16 15 12 12 16 10 18 16 14 9 12 10 18 .

Calculer la moyenne $\overline{X}$, la variance V et l'écart type σ de cette série.

➢ La moyenne arithmétique d'une série statistique (x_i,n_i) est donnée par : $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$

➢ La variance d'une série statistique (x_i,n_i) est le réel V défini par :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i} - \left(\overline{X}\right)^2 \ ;$$

➢ L'écart type d'une série statistique (x_i,n_i) est le réel σ défini par : $\sigma = \sqrt{V}$

Activité 2 :

Le digramme en boîte ci-contre résume une série statistique. Identifier les paramètres indiqués sur le diagramme.

Activité 3 :

Un directeur a noté ses fonctionnaires sur 40 ; la moyenne est $\overline{X}$ =16.

1) Sur les dossiers, ce directeur a écrit les notes sur 20 ; quelle est la moyenne $\overline{x}$ de ces notes ?

2) Trouvant la moyenne faible par rapport à la production, le directeur décide de rajouter 1 point sur 20 à tous les fonctionnaires ; quelle est la moyenne m ?

3) Exprimer m en fonction de $\overline{x}$.

Activité 4 :

La série suivante donne les espérances de vie (en année) en 1995 de 21 pays d'Afrique de plus de 10 millions d'habitants

55	69	47	47	55	47	46	58	49	52	39
53	69	40	41	52	42	51	53	49	40	

1) Calculer une valeur médiane et les deux quartiles (Q_1 et Q_2) de cette série

2) Construire le diagramme en boîte de cette série.

3) L'espérance de vie la plus basse des pays d'Amérique (Haïti) était, la même année de 49 ans

et celle de l'Inde de 61 ans. Placer ces valeurs sur le diagramme précédent.

➢ La médiane partage la série ordonnée (dans l'ordre croissant) en deux groupes de même effectif.

➢ Les quartiles partagent la série ordonnée en quatre groupes de même effectif.

➢ L'intervalle interquartile $[Q_1;Q_3]$ contient 50% des observations

➢ L'écart interquartile $I = Q_3 - Q_1$ mesure la dispersion de la série par rapport à la médiane.

Activité 5 :

Pour une année donnée, cette série donne le nombre d'interventions chirurgicales quotidiennes dans une clinique.

Interventions quotidiennes	0	1	2	3	4	5	6
Effectif (en jours)	84	105	72	59	28	15	2

1) Dresser le tableau des fréquences.
2) Utiliser les fréquences pour calculer la moyenne et l'écart-type. On arrondit les valeurs au dixième.
3) Calculer l'arrondi au dixième du pourcentage des valeurs appartenant à l'intervalle $\left[\overline{X}-\sigma\ ;\ \overline{X}+\sigma\right]$

Activité 6 :

La série suivante donne le chiffre d'affaire en milliers de dinars des 500 magasins d'une chaîne de distribution

Chiffre d'affaires	effectif	Effectif cumulé croissant
[100 ; 150[	40	
[150 ; 200[	50	
[200 ; 250[	60	
[250 ; 300[	70	
[300 ; 350[	100	
[350 ; 400[	80	
[400 ; 450[	60	
[450 ; 500[	40	

1) a) Reproduire et compléter le tableau ci-contre.
   b) Vérifier que le premier quartile Q_1 se trouve dans la classe [200 ; 250[.
   c) dans quel intervalle se trouve la médiane *Me* ? le troisième quartile Q_3 ?

2) Pour calculer une valeur approchée du premier quartile Q_1, on fait l'hypothèse que les valeurs de la série sont répartie uniformément dans la classe [200 ; 250[.

a) Expliquer la relation : $\dfrac{Q_1-200}{125-90}=\dfrac{250-200}{150-90}$

Chiffre d'affaires	200	Q_1	250
Effectif cumulé croissant	90	125	150

b) Calculer une valeur approchée arrondie au dixième du premier quartile Q_1.
c) Calculer de la même façon *Me* et Q_3.

Activité 7 :

La touche « Random » d'une calculatrice a donné 100 nombres au hasard (entre 0 et 9). Ils peuvent être considérés comme un échantillon issu de la population des nombres aléatoires que cette calculatrice peut fournir.

1	7	5	5	9	4	2	8	3	2	0	0	7	2	8	0	0	5	7	5	1	7	8	4	9
8	8	1	4	8	8	5	4	0	9	5	8	6	7	8	6	5	0	4	7	7	2	5	6	5
6	1	6	2	4	0	7	5	8	8	1	0	6	4	6	1	1	2	8	0	8	2	8	9	6
0	5	8	9	0	4	0	7	6	3	4	8	0	5	2	6	7	5	8	7	3	6	4	3	9

1) a) A quelle moyenne approximative peut-on s'attendre ?

b) Vérifier cette prévision avec cette série S_1.

c) Calculer l'arrondi au dixième de l'écart-type de cette série.

2) On regroupe ces 100 nombres par 4 (les 4 premiers, les 4 suivants,…).

a) Calculer la moyenne des 4 nombres dans chacun des 25 groupes obtenus.

b) On obtient ainsi une série S_2 de 25 moyennes. Calculer la moyenne de cette série. Quel résultat obtient-on ? Est-ce prévisible ?

c) Calculer l'écart-type de la série S_2.

d) Comparer avec l'écart-type de la série S_1. Est-ce prévisible ?

3) On regroupe ces 100 nombres de départ par 10. On obtient ainsi une série S_3 de 10 moyennes.

a) Calculer la moyenne et l'ecart-type de la série S_3.

b) Représenter les séries S_2 et S_3 par leur diagramme en boîte.

c) Quelle conclusion peut-on faire?

II. Nuage de point– cœfficient de corrélation linéaire

Activités de découverte

Activité 1:

Ce tableau donne pour les personnes de plus de 15 ans la consommation de tabac en g par jour et l'évolution du prix du tabac (base 100 en 1970).

Année	Rang de l'année	Consommation x_i	Indice y_i du prix
1995	1	5 ,1	121
1996	2	5	126
1997	3	4,8	136
1998	4	4,7	138
1999	5	4,7	143
2000	6	4,6	147
2001	7	4,6	152
2002	8	4,4	162
2003	9	3,9	180
2004	10	3,3	220

Dans ce tableau, la population est un ensemble d'années qu'on peut noter $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$. A chaque individu a_i de A on associe un couple de réels (x_i, y_i) représentant respectivement la consommation et l'indice du prix de cet individu.

1) a) Ecrire les 10 couples (x_i, y_i) où $1 \leq i \leq 10$.

L'ensemble des 10 couples (x_i, y_i) où $1 \leq i \leq 10$, est **une série statistique à deux caractères**.

b) Calculer la moyenne arithmétique $\overline{X}$ de la série statistique des consommations $(x_i)_{1 \leq i \leq j}$.

c) Calculer la moyenne arithmétique $\overline{Y}$ de la série statistique des indices du prix $(y_i)_{1 \leq i \leq 10}$.

2) a) Dans un repère orthogonal du plan, placer les dix points $M_i(x_i; y_i)$ (unités : 1cm pour un gramme en abscisse et 1cm pour 10 points d'indice du prix en ordonnée en commençant la graduation à l'indice du prix 120). Placer en rouge sur ce graphique le point G de coordonnées $(\overline{Y} ; \overline{X})$.

➢ L'ensemble des 10 points $M_i(x_i;y_i)$ où $1 \leq i \leq 10$ est **le nuage de points** de la série statistique à deux caractères et le point G $(\overline{X};\overline{Y})$ est **le point moyen** de ce nuage.

b) Tracer une droite qui est la plus proche possible de tous les points M_i .

Comparer avec les droites tracées par d'autres élèves.

c) Afin que tous les élèves aient la même droite, on décide de choisir la droite (GM_{10}) .

Tracer (GM_{10}) et en donner une équation en arrondissant les coefficients au centième.

3) On suppose que dans les années à venir, la consommation de tabac va continuer à évoluer de la même façon. On peut alors utiliser la droite (GM_{10}) pour estimer la consommation de tabac lorsque l'indice sera 250. Estimer cette consommation par lecture graphique, puis par le calcul en utilisant l'équation de la droite (GM_{10}) .

Activité 2:

On considère la série double (X,Y) ci-dessous :

1) Calculer les moyennes arithmétiques $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ ainsi que $\sigma(x)$ et $\sigma(y)$.

x_i	10	11	13	15	17	18
y_i	105	107	110	111	112	115

2) Etant donnée une série statistique double $(x_i; y_i)_{1 \leq i \leq n}$, définie en données individuelles,

➢ On appelle **covariance** du couple $(X;Y)$ le réel noté cov $(X;Y)$ et défini par :

$$\operatorname{cov}(X;Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)\left(y_i - \overline{Y}\right)$$

Calculer la covariance de cette série.
3) Montrer que, dans le cas général, on a :

- $\operatorname{cov}(X;Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)\left(y_i - \overline{Y}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \overline{X}\,\overline{Y}$
- $\operatorname{cov}(aX+b;Y) = a\operatorname{cov}(X;Y)$
- $\operatorname{cov}(X;X) = V(X)$

➢ Ainsi un changement d'unité ou d'origine du repère affecte la covariance .

4) On démontre et nous admettons que : $\operatorname{cov}^2(X;Y) \leq V(X)V(Y)$.
Déduire alors que : $\left|\operatorname{cov}(X;Y)\right| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$.
5) Quand est ce que $V(X)$ et $V(Y)$ sont nuls ?

➢ Dans le cas contraire, on considère le réel $\dfrac{\operatorname{cov}(X;Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ appelé **le cœfficient de corrélation linéaire** du couple $(X\,;Y)$. Ce réel garde la même valeur quelque soit l'unité choisie .
Calculer ce cœfficient pour la série double définie au début

Activité 3:

a) Pour chacune des séries doubles suivantes, construire son nuage de points, dans un repère orthogonal et calculer son cœfficient de corrélation

z_i	10	11	13	15	17	18
t_i	105	107	110	111	112	115

x_i	30	60	114	122
y_i	9	14	14	51

b) Quelle conjecture peut-on faire sur la relation entre la forme du nuage de points de la série et son cœfficient de corrélation ?

A retenir

Nuage de points

Définitions

X et Y désignent deux variables statistiques numériques observées sur n individus d'une même population. Pour $1 \leq i \leq n$, x_i et y_i désignent les mesures relevées respectives de X et Y .

- Les n couples $(x_i \,;\, y_i)$ forment **une série statistique à deux caractères.**
- Dans un repère orthogonal, l'ensemble des n points $M_i(x_i ; y_i)$ constitue **le nuage de points** associé à cette série statistique double.

- Le **point moyen** G du nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$, $1 \leq i \leq n$, dans un repère, est le point $G(\overline{X} \,;\, \overline{Y})$

Covariance

Définition

Soit une série statistique double $(x_i ; y_i)_{1 \leq i \leq n}$ définie en données individuelles. On désigne par $x_1, x_2, ..., x_n$ les valeurs du 1er caractère quantitatif X et par

$y_1, y_2, ..., y_n$ celles du 2ème caractère quantitatif Y. On appelle covariance du couple $(X ;Y)$ le réel noté cov$(X ;Y)$ et défini par :

$$\text{cov}(X;Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)\left(y_i - \overline{Y}\right) \quad \text{où} \quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Propriétés

Avec les notations de la définition, on a :

- $\text{cov}(X ;Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y}$
- $\text{cov}(X ;Y) = \text{cov}(Y ;X)$
- $\text{cov}(a X + b ;Y) = a\,\text{cov}(X ;Y)$ pour tous réels a et b .
- $\text{cov}(X;X) = V(X)$.
- $\text{cov}^2(X;Y) \leq V(X)V(Y)$

Cœfficient de corrélation linéaire

Définition

Soient X et Y deux variables quantitatives, non constantes et observées dans une même population.

On appelle cœfficient de corrélation linéaire du couple $(X ;Y)$ le réel r défini par

$r = \dfrac{\text{cov}(X;Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$, $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ étant les écart-types respectifs de X et Y.

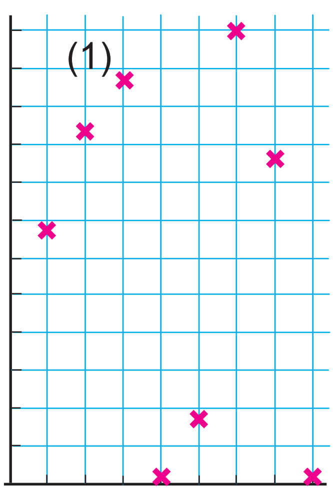
Propriétés

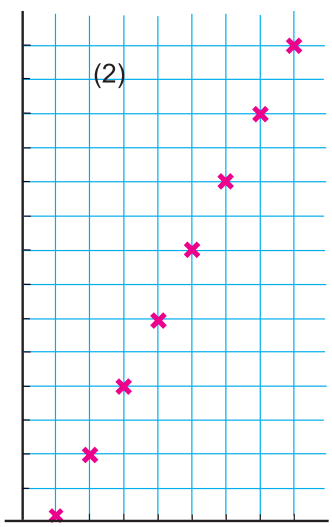
- $-1 \leq r \leq 1$.
- r est invariant par changement d'unité ou d'origine.
- Si $|r| \geq 0,75$ alors la corrélation linéaire entre X et Y est forte .
- Si $|r| < 0,75$ alors la corrélation linéaire entre X et Y est faible.

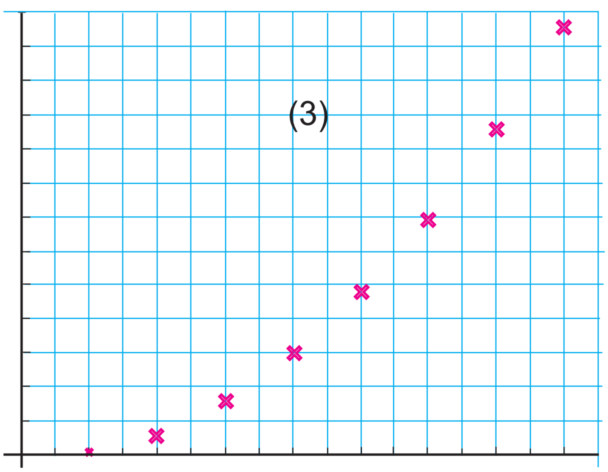
Applications

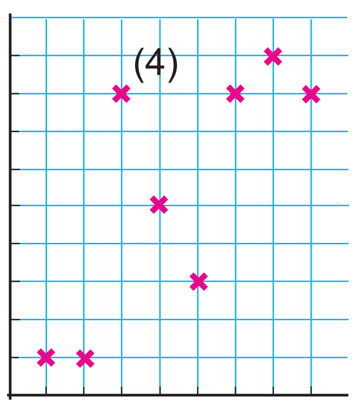
1 **Vrai ou faux**. Corriger les réponses fausses.
On considère les cinq séries du tableau et quatre nuages de points ci-dessous

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	1	1	8	5	3	8	9	8
z_i	0	3	8	15	24	35	48	63
t_i	0	10	20	30	40	50	60	70
w_i	6,71	9,29	10,71	0,23	1,68	11,96	8,64	0,23









a) Le nuage de points $M_i\,(x_i;w_i)$ est le nuage (4).

b) Le nuage de points $N_i\,(x_i;z_i)$) est le nuage (2).

c) Le point moyen du nuage (1) est un des points de ce nuage.
d) Les points du nuage (2) sont alignés.
e) le point moyen du nuage (2) est aligné avec les autres points de nuage.
f) Le point du nuage (3) sont ceux d'une parabole.
g) Le point moyen de la série $(x_i;y_i)$ est $G_1\ (4{,}5\ ;\ 4)$.

h) Le point moyen de la série $(x_i;t_i)$ est $G_2\ (4{,}5\ ;\ 35)$

2 Le tableau suivant donne la part des salariés parmi les actifs

Année : x_i	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2001
Part en % y_i:	82,3	84	85,3	87	89,5	91,1	91,3

1) a) Représenter le nuage de points associé à cette série dans un repère orthogonal d'origine O(1975 ; 80).
b) Vérifier que le point moyen du nuage *a* pour coordonnées (1989,4 ; 87,2).
c) Calculer la covariance de cette série et vérifier que le cœfficient de corrélation linéaire du couple (X,Y) est 0,99.

2) Pour cette série on pose $z_i = x_i - 1975$ et $t_i = y_i - 80$. On définit ainsi deux séries Z et T.
a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

$z_i = x_i - 1975$	0						
Part en % yi :	2.3						

b) Déterminer les coordonnées du point moyen de cette série.
c) Calculer la covariance de cette série et vérifier que le cœfficient de corrélation linéaire du couple $(Z\ ,T)$ est 0,99.

3) a) On pose $u_i = \dfrac{y_i}{100}$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous

$z_i = x_i - 1975$	0	5					
$u_i = \dfrac{y_i}{100}$	0.823	0.84					

b) Déterminer les coordonnées du point moyen de cette série.

c) Calculer la covariance de cette série et vérifier que le cœfficient de corrélation linéaire du couple (Z , U) est 0,99.

4) Qu'est ce qu'on peut en déduire ? Expliquer la réponse.

Activité 1:

Le tableau suivant donne la consommation tunisienne en tonnes d'une matière première M pour la période de 1996 à 2003.

Année	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Consommation en Tonne	7740	7800	7880	7900	7920	8000	8020	8060

III. Ajustements affines

Activités de découverte

On appelle x_i le rang de l'année exprimé à partir de 1996 et y_i la consommation tunisienne en tonnes de la matière M.

1) Représenter le nuage de points de coordonnées $M_i(x_i;y_i)$ (on choisira un repère orthogonal avec 2cm pour 1 unité en abscisses et 1cm pour 20 unités en ordonnées en graduant cet axe à partir de 7720).

2) On constate que le nuage de points a une forme allongée. On se propose de déterminer une droite qui indique la tendance de l'évolution de la consommation.

On partage le nuage en deux parties : le premier sous-nuage formé des points M_1, M_2, M_3, M_4 et le deuxième sous-nuage formé par les autres points.

a) Calculer les cordonnées des points moyens G_1 et G_2 de chacun de ces sous-nuages.

b) Déterminer une équation de la droite $(G_1 G_2)$. Tracer cette droite sur le graphique.

c) On suppose que la fonction affine associée à cette droite modélise la croissance de consommation entre 1996 et 2007. Utiliser cette équation pour estimer la consommation de la matière M en 2007.

3) a) On aurait pu partager le nuage de points en deux parties autre que les précédentes. Choisir deux autres sous-nuages de 4 points. Déterminer leurs points moyens G'_1 et G'_2, puis une équation de la droite $(G'_1G'_2)$. En déduire une estimation de la consommation en 2007.

b) Peut-on savoir si une estimation est meilleure que l'autre ?

➢ La droite $(G_1\ G_2)$ est appelée **la droite de MAYER** (1814-1878)

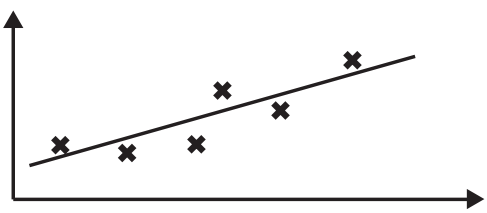
Commentaire

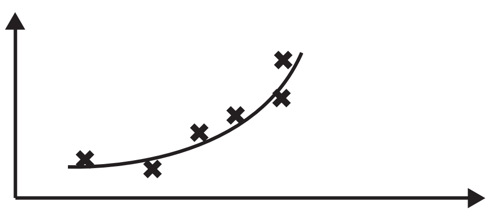
Lorsque deux caractères X et Y sont liés l'un à l'autre, l'étude de la forme du nuage de points permet de **modéliser** cette liaison. La forme d'un nuage de points associé à une série à deux variables X et Y invite à retenir, pour l'ajuster, des modèles de fonctions familières : soit le modèle affine $y = ax + b$, soit le modèle exponentiel $y = a.b^x$ ou autres.

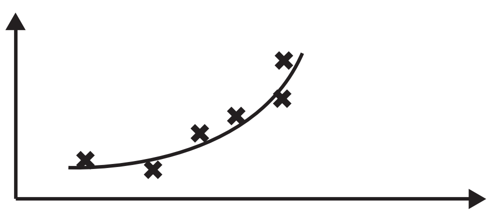
Effectuer un **ajustement de Y en X** d'un nuage de points consiste à trouver une fonction f telle que la courbe d'équation $y = f(x)$ passe « le

➢ plus près possible » des points du nuage.

Pour les statisticiens, une formule telle que $y = f(x)$ est appelé un **modèle** ; x est la variable **explicative** et y la variable **expliquée**.







Activité 2 :

Ci-contre une série statistique à deux variables (X, Y).

x_i	1	2	3
y_i	3	4	6

D est une droite variable qui passe par le point moyen G du nuage ; on note a son cœfficient directeur.

1) a) Calculer les coordonnées de G.

b) Écrire une équation de D.

c) Calculer le cœfficient de corrélation du couple (X, Y).

d) Construire dans un repère orthogonal le nuage de points de cette série.

2) Soient les points P_1, P_2 et P_3 de D d'abscisses respectives 1, 2 et 3.

a) Exprimer, en fonction de a, la somme $\sum_{i=1}^{3}(M_iP_i)^2$.

b) Déterminer a pour que cette somme soit minimale.

➢ La droite ainsi obtenue est appelée **droite de régression** de Y en X.

3) Construire, dans le même repère, la droite D.

Activités 3 :

Le tableau ci-dessous donne pour une grande entreprise industrielle la relation entre sa charge mensuelle en milliers d'heures de travail et sa production mensuelle en milliers de produits.

Production x_i	20	50	80	90	100	120	160	180
Charge y_i	60	85	90	105	115	125	140	160

1) Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)_{1 \le i \le 8}$ dans un repère orthogonal.

2) Calculer les coordonnées $(\overline{X}; \overline{Y})$ du point moyen G du nuage, puis vérifier que le cœfficient de corrélation du couple (X, Y) est 0,98.

3) Soit D une droite d'équation $y = ax + b$ et passant par G $(\overline{X}; \overline{Y})$ .Montrer que $b = \overline{y} - a\overline{x}$

4) On considère les points $M_i(x_i, y_i)$ et $P_i(x_i, ax_i + b)$ et on se propose de déterminer D pour que la somme des écarts $f(a) = \sum_{i=1}^{8}(M_iP_i)^2$ soit minimale:

a) Montrer que $8f(a) = a^2V(X) - 2aCov(X,Y) + V(Y)$

b) Montrer que $a = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)}$.

5) Calculer a puis tracer la droite D dans le même repère.

➢ $\sum_{i=1}^{8}(M_iP_i)^2$ est minimale pour la valeur de a déterminée au b). La droite D tracée passe donc «le plus proche possible» des points du nuage. C'est-à-dire que la somme des carrés des écarts entre les points M_i du nuage et les points P_i de la droite D de même abscisse, est la plus petite possible .

On dit qu'on a effectué un ajustement linéaire par la méthode **des moindres carrés**.

6) a) Vérifier que l'on trouve que D a pour équation $y = 0{,}6\,x + 50{,}4$.

b) Pour une production de 300 unités estimer la charge nécessaire à l'aide de la droite D.

➢ Pour une valeur donnée x_i de la variable X, la fonction $f(x) = ax + b$ permet de prévoir approximativement la valeur correspondante de Y ; pour cela on calcule $f(x_i)$.

- Si x_i appartient à l'intervalle d'observation des valeurs de X, on dit qu'on fait une **interpolation.**
- Si x_i n'appartient pas à cet intervalle, on parle d'**extrapolation**, mais dans ce cas il faut faire l'hypothèse que le modèle reste plausible à l'extérieur de cet intervalle.

A retenir

Soient X et Y deux variables statistiques quantitatives, non constantes et observées dans une population donnée.Lorsque le cœfficient de corrélation r vérifie $|r| \geq 0,75$ ou lorsque le nuage de points a une forme allongée, alors il est possible d'effectuer un ajustement affine du nuage de points $M(x_i, y_i)$.

Théorème et définition

Lors d'un ajustement affine de Y en X par la méthode des moindres carrés, la droite obtenue passe par le point moyen du nuage et a pour équation :

$$y = a(x - \overline{X}) + \overline{Y} \quad \text{où} \quad a = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)} .$$

Cette droite s'appelle la **droite de régression de Y en X**.

La droite de régression de X en Y obtenue par la méthode des moindres carrés, lors d'un ajustement affine, passe par le point moyen du nuage et a pour équation :

$$x = a'(y - \overline{Y}) + \overline{X} \quad \text{où} \quad a' = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(Y)} .$$

Remarques

On suppose ici que les points du nuage ne sont pas tous alignés sur une même droite verticale, ni sur une même droite horizontale. On a donc

$\sigma(X) \neq 0$ et $\sigma(Y) \neq 0$

• Les deux droites de régression : $\begin{cases} D : y = ax + b \\ D' : x = a'y + b' \end{cases}$ passent par le point moyen G $(\overline{X} ; \overline{Y})$.

• Les deux coefficients a et a' sont de même signe et le cœfficient corrélation r vérifie $r^2 = aa'$

Méthode de Mayer

Cette méthode d'ajustement consiste à partager les données en deux groupes de mêmes effectifs (à un près) après un tri en fonction des valeurs de la première variable. On calcule ensuite les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 de chaque groupe. On construit alors la droite (G_1G_2).

Applications

1 Dans le tableau ci-dessous, on donne la taille moyenne (en cm) des nouveaux nés en fonction du nombre de l'âge gestationnel (en semaines).

Age gestationnel (semaines)	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
Taille (cm)	47.5	48,5	49	49,7	50	50, 5	50, 8	51, 2	51, 5	51, 8	52, 2	52, 5	52, 8	53	53, 5	53, 7

1) Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal en prenant comme unités :
- En abscisse : 1 cm pour 1 semaine (commencer la graduation à 20 semaines)
- En ordonnée : 2 cm par unité (commencer la graduation à 45 cm)

2) on propose d'ajuster ce nuage de points par application de la méthode de Mayer.
- Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2.
- Tracer la droite d'ajustement passant par les points G_1 et G_2.

3) Déterminer l'équation de cette droite d'ajustement.

2 Une équation de la droite de régression par la méthodes des moindres carrés, de X en Y est : $x = -0,43y + 12,3$. Les valeurs du caractéres X sont 1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13.

3 Calculer les coordonnées du point moyen.

Ce tableau donne, l'espérance de vie (en années) des hommes à la naissance pour certaines années.

Année x_i	1980	1985	1990	1995	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Espérance y_i	70,02	71,3	72,8	73,9	74,6	74,9	75,3	75,5	75,8	75,9	76,7

1) Dans un repére, représenter le nuage de points associé à cette série.
Un ajustement affine est-t-il justifié ?

2) On donne les calculs suivants : $\overline{X} = \dfrac{21957}{11} \approx 1996,09$; $\overline{Y} = \dfrac{816,9}{11} \approx 74,26$;

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 = 616,91 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)\left(y_i - \overline{Y}\right) = 159,84$$

Déterminer alors une équation de la droite d'ajustement D de y en x par la méthode des moindres carrés et tracer cette droite sur le graphique précédent.

3) Estimer l'espérance de vie à la naissance des hommes en 2007 en supposant que ce modèle reste plausible.

4) Peut-on, à l'aide de cet ajustement, estimer l'espérance de vie à la naissance des hommes en 2500 ? En l'an 3000 ?

4 1) **Q.C.M**. Donner toutes les bonnes réponses.
On considère la série statistique double (x_i ; y_i) suivante :

x_i	1	2	3	5	6
y_i	4	7	10	14	16

a) La droite D_1 d'équation $y = 2x + 4$ passe par trois points du nuage, donc est un bon ajustement.
b) La droite D_2 d'équation $y = 3x + 1$ passe par trois points du nuage, donc D_2 est le meilleur ajustement.
c) La droite de régression Δ de y en x a pour équation $y = 2{,}36x + 2{,}17$, les coefficients étant arrondis à 10^{-2}
2) **VRAI OU FAUX**. Corriger les réponses fausses.
a) Pour déterminer le meilleur ajustement du nuage selon la méthode des moindres carrés, pour chacune des droites Δ ,D_1 et D_2 , on calcule la somme : $S = \sum\left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$
b) Pour la droite D_1 , les trois derniers termes de la somme S sont nuls.
c) Pour la droite Δ , tous les termes de la somme S sont nuls.
d) La somme S prend la même valeur pour les droites D_1 et D_2 .
e) La somme S est minimale pour la droite Δ .
f) La somme S vaut 5 pour la droite D_1.

5 Une équation de la droite de régression de y en x est : $y = -0{,}43x + 12{,}3$. La moyenne de X est $\overline{X} = 5{,}7$ et le cœfficient de corrélation est $r = 0{,}85$. Donner une équation de la droite de régression de x en y.

IV. Exemples d'ajustements non affines Ajustement par une fonction puissance

L'offre et la demande d'un produit ont fait l'objet d'une étude statistique. x désigne le prix unitaire en dinars, y désigne la demande en milliers d'unités et z désigne l'offre en milliers.

x	1,5	2,5	3,5	4,5	5	7	8,5
y	8,4	5,3	5,3	3,1	2,8	2,1	1,7
z	0,75	1,23	1,75	2,25	2,5	3,5	4,25

1) Vérifier que la quantité offerte est proportionnelle au prix unitaire. En déduire la fonction g, telle que $z = g(x)$ pour $x \in [0;10]$.
2) Donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. A l'aide de cet ajustement, déterminer le prix d'équilibre (prix pour lequel la quantité offerte est égale à la quantité demandée).
3) On se propose de rechercher un autre ajustement de la fonction de demande par une fonction puissance.
a) Etablir le tableau des valeurs $X_i = \ln(x_i)$ et $Y_i = \ln(y_i)$, arrondies à 10^{-3} .
b) Calculer le cœfficient de corrélation linéaire de (X,Y). Interpréter ce résultat.
c) Déterminer un ajustement affine par moindres carrés de Y en X.
d) En déduire la nouvelle relation de la demande sous la forme $y = k\,x^{\alpha}$.

Ajustement exponentiel

On a mesuré entre 1995 et 2000, l'effet de la pollution sur la population piscicole d'une rivière. Les résultats présentés dans le tableau suivant donnent une estimation du nombre y_i de poissons, exprimé en milliers, correspondant à l'année dont le rang est x_i .

année	1995	1996	1997	1998	1999	2000
x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	951,3	106,7	96,5	63,2	21	9,4

1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i;\ln(y_i))$ dans un repère orthogonal. Expliquer pourquoi un ajustement exponentiel semble justifié.
2) On pose $z = \ln(y)$.
a) calculer le cœfficient de corrélation linéaire de (x, z) . Interpréter ce résultat.
b) Ecrire une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés sous la forme $z = ax + b$ en arrondissant a et b au centième.
c) En déduire un ajustement exponentiel de y en x sous la forme $y = Ae^{Bx}$.
3) On suppose que l'évolution de cette population se poursuit sur le même modéle.
a) A partir de quelle année cette population sera-t-elle inférieure à 1000 ?
b) Donner une estimation de la population de cette rivière en l'an 2008 ?

Ajustement parabolique

Les 11 élèves d'une classe travaillant sur la proportionnalité doivent chacun tracer un disque sur une feuille de papier quadrillé, puis évaluer l'aire de ce disque. Ce tableau donne les résultats de cette expérience : x_i est le rayon d'un disque en cm et A_i l'aire en cm² du disque correspondant.

x_i	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
A_i	12	20	28	38	50	50	78	95	113	113	154

1) Les deux séries sont-elles proportionnelles ? Justifier la réponse.
2) On pose $y = \sqrt{A}$.
a) Présenter dans un tableau la série statistique $(x_i;y_i)$,chaque y_i sera arrondi au dixiéme.
b) Représenter dans un repère orthogonal, le nuage de points associé à cette série (unité graphique : 2cm sur chaque axe).
c) Déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x en arrondissant les cœfficients au centième.
d) Tracer cette droite dans le repére précédent en faisant apparaître le point moyen G de cette série statistique.
3) L'aire A d'un disque de rayon X étant $A = \pi X^2$, $Y = \sqrt{A}$ est alors proportionnel à X. Quel est le cœfficient de proportionnalité ? En déduire une valeur approchée du nombre π en utilisant le résultat trouvé à la question 2.c).

Situation 1

Un chef d'entreprise reçoit de la part de ses collaborateurs la demande d'obtenir des véhicules de fonction plus confortables et plus puissants. Il sollicite alors son comptable afin que celui-ci examine la demande et sa faisabilité.
Le comptable utilise le tableau ci-dessous, donnant le prix de revient kilométrique (PRK) des véhicules d'une puissance fiscale de 4 à 8 CV et en fait une projection sur les véhicules plus puissants.

Puissance fiscale des véhicules (*CV*)	4	5	6	7	8
Prix de revient kilométrique (*D*)	0,424	0,471	0,492	0,513	0,555

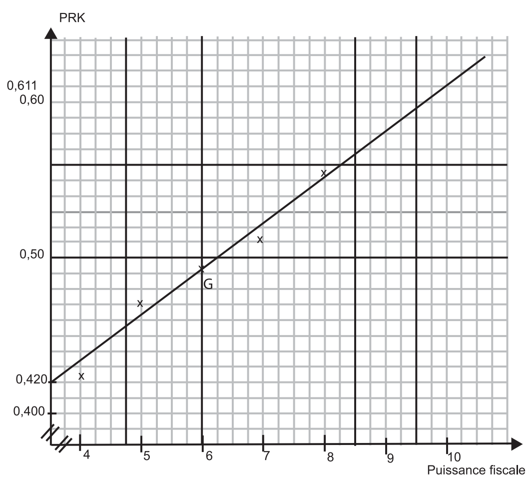
1)Représenter cette série statistique par un nuage de points dans un repère orthogonal.
2) Calculer les coordonnées du point moyen G.
3) On admet que la droite d'ajustement de cette série a pour équation : $y = 0{,}03x + 0{,}311$
a) Montrer que le point G appartient à cette droite.
b) Tracer cette droite dans le repère précédent.
4) En utilisant la droite d'ajustement, quel est le prix de revient d'une voiture de 10 *CV* ?
Laisser apparents les traits nécessaires à la lecture.
5) Le comptable fixe le prix de revient kilométrique maximum à 0,650 *D*.
Calculer la puissance maximale du véhicule qui correspond à cette exigence.

Vers une solution :

G(6 ; 0,491)
5) Résolution de l'inéquation :

$$0{,}03x + 0{,}311 < 0{,}65$$

donc $x < 11{,}3$
La puissance fiscale maximale autorisée par le comptable est de 11 *CV*



Situation 2 :

Sur un parcours donné, la consommation y d'une voiture est donnée en fonction de sa vitesse moyenne x par le tableau suivant :

X (en km/h)	80	90	100	110	120
Y (en litres/100km)	4	4,8	6,3	8	10

1) La consommation est-elle proportionnelle à la vitesse moyenne ? Justifier la réponse.

2) a) Représenter le nuage de points correspondant à la série statistique $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal du plan (on prendra 2cm pour 10km/h sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 litre sur l'axe des ordonnées).

b) Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.

c) Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés et tracer cette droite.

d) En utilisant cet ajustement, estimer la consommation aux 100km (arrondie au dixiéme) de la voiture pour une vitesse de 130km/h.

3) La forme du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose : $z = \ln(y)$ et on admet que la droite d'ajustement obtenue pour les cinq points $(x ; z)$ du nuage par la méthode des moindres carrés a pour équation : $z = 0{,}0234\,x - 0{,}508$.

a) Ecrire y sous la forme $y = Ae^{Bx}$ (donner A et B arrondis à 10^{-4}).

b) Tracer, sur le même graphique, la courbe d'équation $y = A\,e^{Bx}$ pour $x \in [80 ; 120]$.

c) En utilisant cet ajustement, estimer la consommation aux 100km (arrondie au dixiéme) de la voiture, pour une vitesse de 130km/h.

4) Des valeurs obtenues dans les questions 2.d) et 3.c), laquelle vous semble la plus proche de la consommation réelle ? Expliquer votre choix.

Vers une solution :

1) $\dfrac{4}{80} \neq \dfrac{10}{120}$; conclure.

2) c) $y = 0{,}152\,x - 8{,}58.$ Pour $x = 130,$ on trouve $y = 11{,}18$, soit une consommation d'environ 11,2 litres aux 100km.

3) a) $y = e^{0{,}0234x - 0{,}508}$; $A = e^{-0{,}508} \approx 0{,}6017$

c) Pour $x = 130$, on obtient $y = 0{,}6017e^{0{,}0234 \times 130}$, soit une consommation d'environ 12,6 litres aux 100km .

4) La seconde valeur (12,6) est la plus vraisemblable.

Les augmentations de consommation, par tranche de 10km/h, sont de plus en plus grandes. Entre 110 et 120, la consommation augmente de 2 litres aux 100km. On peut penser qu'elle augmentera encore plus entre 120 et 130, ce qui donnera plutôt 12,6 que 11,2.

Situation 3

Monsieur Math est un papa heureux. Son fils bénéficie d'une excellente santé. Il a noté son poids (en kg) à chacun de ses anniversaires. Soucieux de l'avenir, Monsieur Math souhaiterait avoir une idée de l'évolution du poids de son héritier.

1) Représenter cette série par un nuage de points (1 cm pour un an en abscisse et 1 cm pour 4 kg en ordonnée).

2) Posons $z_i = \sqrt{y_i}$ et compléter le tableau précédent avec les z_i arrondis à 10^{-2} près.

Age (en années) x_i	7	8	9	10	11	12
Poids y_i	22	24	28	34	42	51

3) a) Sur un autre graphique, représenter les points de coordonnées $(x_i\ ,\ z_i)$. Calculer le cœfficient de corrélation linéaire entre x et z . Calculer les coordonnées du point moyen G.

b) Donner une équation réduite de la droite de régression de z en x par moindres carrés.

4) En utilisant cette droite, calculer quel pourrait être le poids de l'héritier à 20 ans et à 25 ans. Que faut-il penser de tels calculs ? Monsieur Math doit-il réellement se faire du souci ?

MEILLEUR AJUSTEMENT ET TABLEUR

On compare les taux de chômage, exprimés en %, au Japon et en France entre 1985 et 2003

année	1985	1990	1995	2000	2001	2002	2003
rang x_i	0	5	10	15	16	17	18
Japon y_i	2,6	2,1	3,1	4,7	5	5,4	5,3
France z_i	10,1	8,6	11,3	9,3	8,5	8,8	9,4

Travail sur papier

1) Calculer le pourcentage d'évolution du taux de chômage au Japon et en France entre 1985 et 2003.

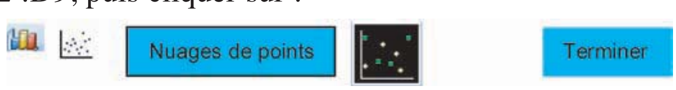
2) On admet que le pourcentage d'évolution annuel moyen est de 12,6% pour le Japon et de -1,19% pour la France. En supposant que l'évolution reste la même pour les deux pays, estimer le taux de chômage en France et au Japon en 2004.

Détermination de la tendance à l'aide d'un tableur

Pour déterminer les droites de régressions des nuages de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ et $(x_i ; z_i)$, construire le tableau ci-dessous.

	A	B	C	D
1	Taux de chomage			
2	année	rang xi		France zi
3	1985	0	2,6	10,1
4	1990	5	2,1	8,6
5	1995	10	3,1	11,3
6	2000	15	4,7	9,3
7	2001	16	5	8,5
8	2002	17	5,4	8,8
9	2003	18	5,3	9,4

Représenter, dans un même repére, les nuages de points de coordonnées : $(x_i ; y_i)$ et $(x_i ; z_i)$.
Sélectionner la plage B2 :D9, puis cliquer sur :



Clic-droit sur un point de la série $(x_i ; y_i)$ pour entrer dans le format **série de données**, puis cliquer sur :

Ajouter la droite de régression pour le nuage de points $(x_i ; z_i)$.

Remarque :

pour faire apparaître l'équation de la courbe de tendance, clic-droit sur la droite, puis sur :

Format de la courbe de tendance | Option | Afficher l'équation sur le graphique | Ok

Question : Donner les équations des droites de régressions ainsi obtenues. Les ajustements affines semblent-ils appropriés ?

Pour aller plus loin

On cherche un autre ajustement pour la série $(x_i;y_i)$.

a) Clic-droit sur un point de la série $(x_i;y_i)$ et cliquer sur

Ajouter une courbe de tendance... | et | 

Choisir un ordre 2, 3, 4, ..., correspondant au degré du polynôme.

b) Déterminer, de même, la courbe de tendance la mieux adaptée au nuage de points $(x_i;z_i)$.

c) Visualiser la prévision sur le graphique : pour cela, clic-droit sur la courbe de tendance, puis sur :

Format de la courbe de tendance... | puis | Option | et | 

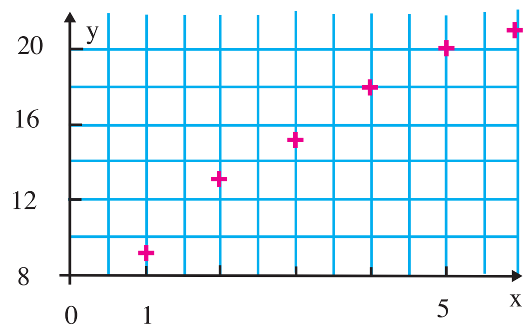
En déduire une estimation du taux de chômage, en 2004 puis 2007, au Japon.

d) Reproduire la prévision pour le taux de chômage, en 2004, en France.

e) Comparer ces résultats à ceux trouvés au début, et au taux de chômage réel de 9% en France.

VRAI-FAUX

1 Une série statistique est représentée par le nuage de points $M_i(x_i;y_i)$ ci-dessous.



On note G le point moyen de la série.

1) Le nuage de points est celui de la série :

a) $\{9;\ 13;\ 15;\ 18;\ 20;\ 21\}$

b) $\{(1;9),\ (2;13),\ (3;15),\ (4;18),\ (5;20),\ (6;21)\}$

c) $\{(1991;19),(1992;13),(1993;15),$

$(1994;18),(1995;20),(1996;21)\}$

2) Pour déterminer l'ordonnée de G, on calcule :

a) la médiane des y_i **b)** la moyenne des y_i **c)** la demi somme y_1 et y_6 .

3) Le point moyen est :

a) G (3,5 ; 16) **b)** G(3,5 ; 16,5) **c)** G (3,5 ; 15).

4) D'aprés la forme du nuage, on peut envisager un ajustement par une fonction :

a) de la forme ax^2+bx+c , où a est positif.

b) de la forme ax^2+bx+c , où a est négatif.

c) affine de la forme $ax+b$, où a est positif.

d) affine de la forme $ax+b$, où a est négatif.

5) La meilleure droite d'ajustement du nuage est :

a) la droite passant par le premier et le dernier point du nuage.

b) la droite de MAYER.

c) la droite de régression de y en x.

6) La droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est la droite obtenue en :

a) minimisant $S=\sum(y_i-(ax_i+b))$

b) minimisant $S=\sum(y_i-(ax_i+b))^2$

c) minimisant $S = \sum \left| y_i - (ax_i + b) \right|$

7) L'équation de la droite de régression de y en x du nuage est :
a) $y = 2{,}4x + 7{,}6$ b) $y = 7{,}6x + 2{,}4$ c) $y = -2{,}4x + 7{,}6$.

8) Un ajustement affine d'une série statistique à deux variables est :
a) toujours possible **b)** toujours pertinent **c)** le meilleur ajustement du nuage

2 Le tableau ci-dessous donne les effectifs d'une série statistique double

x_i	14	20	28	30	36	45	50
y_i	8	10	17	23	29	32	40

1) Appliquer la méthode de Mayer pour déterminer un ajustement affine de cette série statistique double.
2) Tracer cette droite de Mayer.
3) Calculer les coordonnées de G point moyen du nuage.
4) Vérifier que G appartient à la droite (G_1G_2) .

3 Pour chacune des séries doubles suivantes, calculer le cœfficient de corrélation linéaire et dire si un ajustement affine est justifié.

a)

x_i	1	2	3	4
y_i	3	5	4	5

b)

x_i	1	2	3	4
y_i	6,5	4	2,5	1

c)

x_i	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8
y_i	8,1	8,3	8,6	8,9	9,2

d)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	54	48	70	60	130

4 On donne les moyennes trimestrielles des 22 éléves de 4$^{\text{éme}}$ sciences de l'informatique.

Math	6	10	10	12	2	11	7	8	9	11	11
Info.	10	7	10	11	9	13	10	10	6	7	12
Philo	11	11	13	12	11	14	11	9	12	11	13

Math	8	10	1	10	6	11	8	9	15	11	7
Info.	10	11	9	7	12	10	11	13	10	10	6
Philo	12	15	15	13	13	10	11	11	11	13	11

a) Calculer le cœfficient de corrélation linéaire entre les notes de mathématiques et celles de l'informatique.
b) Même question pour les notes de l'informatique et celles de philosophie. Conclusion.

5 Le tableau suivant donne la consommation mondiale de sucre (en millions de tonnes) entre 1900 et 2004 pour certaines années.

1900	8,1
1910	12,3
1920	13
1930	24,7
1940	26,7
1950	29,4
1960	49,3
1970	70,5

1980	88,6
1995	116,6
2000	129
2001	130,7
2002	135,7
2003	139,2
2004	143,3

a) Représenter cette série chronologique par un nuage de points.
b) Déterminer le point moyen du nuage en arrondissant au dixiéme.
c) La croissance de la consommation de sucre de 1900 à 2004 peut-elle être modélisée par une fonction affine ?

6 Un professeur de terminale a constaté une certaine relation entre la note en mathématiques et le temps de travail hebdomadaire dans cette matière. Voici selon lui la note sur 20 que peut espérer un «éléve en fonction de son temps de travail » en minutes.

Temps	5	60	180	300
Note	3	8	14	18

Trouver une courbe qui ajuste au mieux ces données et qui soit compatible avec la réalité.

VRAI - FAUX

7 Préciser s'il est possible que les droites D et D', dont une équation est donnée ci-dessous, soient les deux droites de régression d'une série statistique double. Sinon dire pourquoi.

a) $y = 12{,}5x + 7{,}2$ et $x = -10^{-2}y + 3$ d) $y = 0{,}5x$ et $y = 3x$

b) $y = 3x + 5$ et $x = \frac{1}{3}y - 5$ e) $y = -7$ et $x = 5$

c) $y = 7x - 14$ et $x = \frac{13}{8}y$

8 On se propose d'étudier l'influence de la température sur la durée d'incubation des oeufs de grenouilles. On choisit 6 échantillons de 200 oeufs chacun. Le nombre x d'éclosion au 22éme jour est le suivant :

Température t_i d'incubation en d°C	6	6,4	6,8	7,2	7,6	8
Nombre x_i d'éclosions à la température t_i	131	144	157	170	190	189

1) Dessiner le nuage des données et tracer « à l'oeil » une droite D qui a l'air de bien approcher ce nuage.
2) Calculer le cœfficient de corrélation et écrire l'équation de la droite de régression de x en t . Etudier la qualité de l'ajustement.
3) Calculer le nombre d'éclosions prédit pour un échantillon de 200 oeufs au 22éme jour pour une température de 7,5 °C.

9 On étudie un échantillon de taille n = 100 sur lequel ont été mesurés deux caractéres x et y, on a observé les résultats suivants :

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 800 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{100} y_i = 1200 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 7200 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{100} y_i^2 = 16000 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{100} x_i y_i = 10200$$

1) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.
2) Déterminer l'équation de la droite de régression de x en y par la méthode des moindres carrés.

10 Pour vérifier les relations d'allométrie entre insectes, on a retenu les deux variables :

x = logarithme de la longueur de l'élytre

y = logarithme de la largeur de la tête

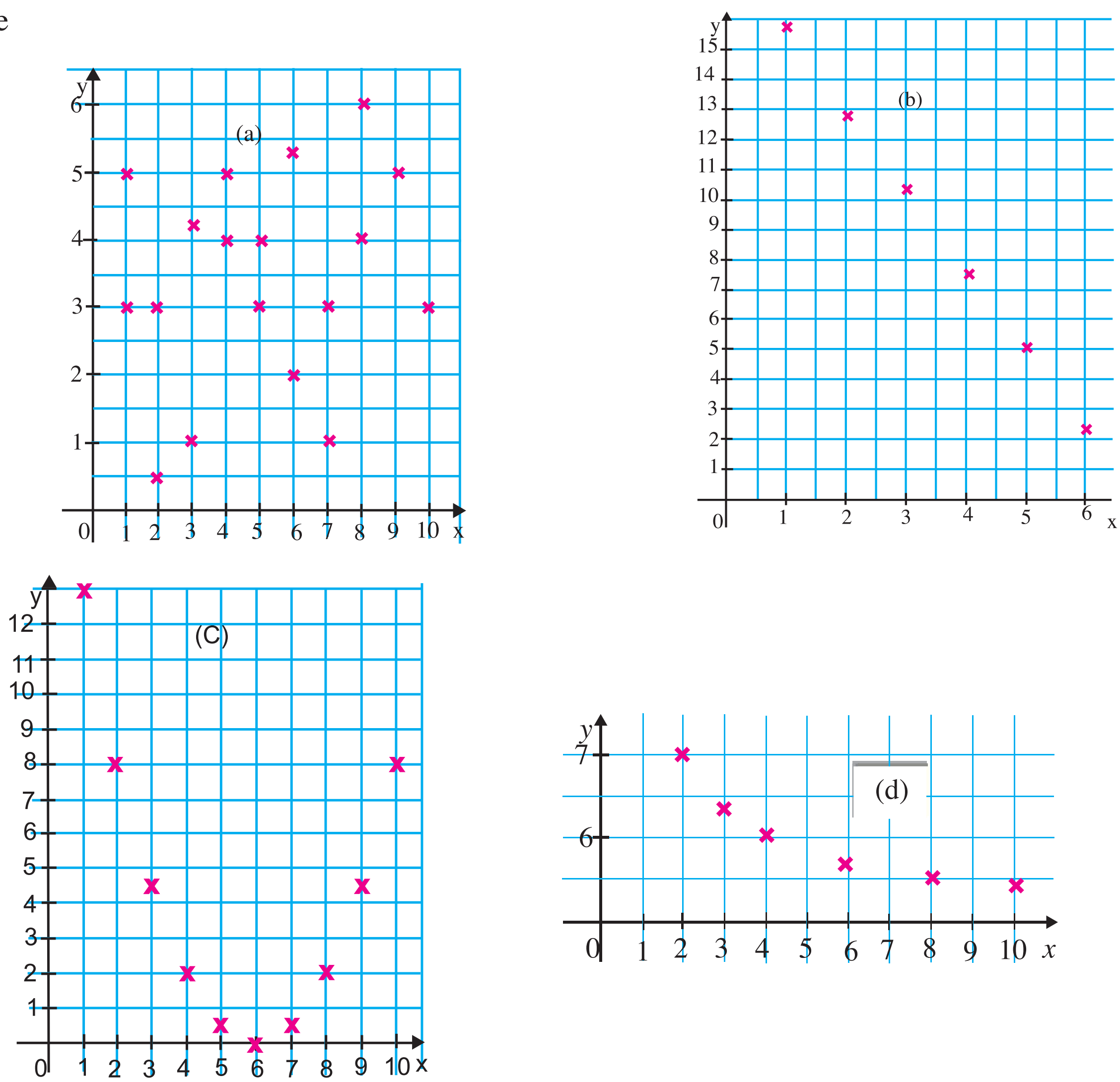
les mesures sur 50 insectes, notées $(x_i ; y_i)$ ont fourni les résultats suivants :

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 155 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{50} y_i = 125 \; ; \quad \sum_{i=1}^{50} x_i y_i = 391{,}1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 482{,}5 \; ; \quad \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 320{,}5 \quad ;$$

$$\sum_{i=1}^{50} x_i^2 y_i^2 = 3468{,}7$$

1) Calculer
a) La moyenne et l'écart-type du caractère x sur l'échantillon observé.
b) La moyenne et l'écart-type du caractère y sur l'échantillon observé.
c) La covariance et le cœfficient de corrélation des variables x et y.
d) L'équation de la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
2) En déduire la loi d'allométrie exprimant la largeur de la tête en fonction de la longueur de l'élytre

11



1) Pour chacun des nuages , un ajustement affine serait-il un bon ajustement ?
2) Donner le cœfficient directeur d'une droite ajustant le nuage (b).
3) Quel nuage pourrait être ajusté par une fonction associée à la fonction inverse ?
4) Quel nuage peut être ajusté par une parabole? Donner l'équation de cette parabole .

12 Le tableau suivant donne représente l'évolution du chiffre d'affaire en milliers de dinars d'une entreprise pendant dix années.

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre d'affaires y_i	110	130	154	180	190	210	240	245	270	295

1) Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i;y_i\right)$
On choisira un repère orthogonal ayant pour unités 2cm en abscisse et 1cm pour 20 milliers de dinars en ordonnée.
2) Quel est, en pourcentage, l'augmentation du chiffre d'affaires entre les années 1995 et 2004 ?
3) Soit G le point moyen du nuage. Calculer les coordonnées de G et placer G sur le dessin.
4) Justifier qu'il est judicieux de procéder pour cette série à un ajustement affine.
Donner l'équation de la droite d'ajustement D obtenue par la méthode des moindres carrés.
Vérifier que G appartient à la droite D et tracer D sur le dessin.
5) En admettant que l'évolution continue au même rythme et en utilisant l'ajustement affine, quel chiffre d'affaires peut-on atteindre pour l'année 2010 ?
6) On suppose qu'à partir de l'année 2004, le chiffre d'affaires progresse de 8% par an.
Quel est alors le chiffre d'affaires prévisible en 2010 ?

13 On a mesuré les variables x et y sur 10 individus et obtenu les résultats suivants :

Individu n°i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	18	20	19	16	19	16	19	21	15	17
y_i	43	110	70	17	91	29	80	134	15	34

On cherche une relation logarithmique entre x et y du type : $y = a\ln x + b$
Pour cela on pose : $z = \ln x$
1) Représenter graphiquement le nuage de points $(z_i;y_i)$ et déterminer la droite de régression linéaire de y en z .
2) Quelle valeur de y peut-on prédire pour un individu présentant la valeur $x = 22$?

14 Une étude de marché sur un produit de grande nécessité a conduit à la série statistique $(x_i ; y_i)$ où x_i est le prix en dinars au kg de ce produit et y_i la quantité demandée en centaines de tonnes.

Prix x_i	10	11,5	12	13	13,7	15	16,5	18,8	20
Quantité y_i	4,7	4,1	4	3,7	3,5	3,2	2,9	2,6	2,4

1) a) Représenter le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal : unités 1cm pour 1D en abscisse et 2cm pour 100 tonnes en ordonnée. Un ajustement affine est-il justifié ?
b) Donner l'équation réduite de la droite de régression Δ de y en x. On arrondira les coefficients à 10^{-2} .
Tracer cette droite sur le graphique.
Calculer la quantité demandée pour un prix de 24, 5D par kg.

2) On pose $z = \dfrac{100}{y}$ et on se propose d'établir un autre ajustement.

a) Calculer les valeurs z_i , arrondies à 0,1 près.
b) Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de z en x , sous la forme $z = ax + b$ où a et b sont arrondis à l'unité.
c) En déduire la fonction f qui au prix associe la quantité demandée y suivant cet ajustement et vérifier que $f(24{,}5) = 2$.
3) Pour un prix de 24,5 D par kg, on sait que la demande est de 210 tonnes.

Quel est l'ajustement le plus judicieux ?

15 Une maison d'édition *a* ouvert le 1er janvier 2002, sur Internet, un site de vente par correspondance.
Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de livres vendus par mois en milliers.

Mois	Janvier 2002	Janvier 2003	Juillet 2003	janvier 2004	Juillet 2004
Rang du mois x_i	1	13	19	25	28
Nombre de livres y_i	1,2	2,5	3,5	5,1	6

1) Représenter le nuage de points (x_i, y_i) dans un repère (unités graphiques : 1cm représente deux mois en abscisse et 1cm représente 500 livres en ordonnée).
2) L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel plutôt qu'un ajustement affine. Pour cela, on pose $z_i = \ln(y_i)$.
Aprés l'avoir recopié, compléter le tableau suivant où z_i est arrondi 10^{-3}

Rang du mois x_i	1	13	19	25	28
$z_i = \ln(y_i)$.			1,253		

3) Ecrire une équation de la droite d'ajustement affine D de z en x par la méthode des moindres carrés.
4) Déduire une relation entre y et x de la forme : $y = \alpha\, e^{kx}$.
5) En supposant que l'évolution se poursuive de cette façon :
a) Donner une estimation à l'unité prés du nombre de livres qui seront vendus en janvier 2205.
b) A partir de quel mois peut-on prévoir que le nombre de livres vendus dépasse 13 000 ?
6) On admet que le nombre moyen m de livres vendus chaque mois entre janvier 2002 et avril 2004 est donné par la formule : $\frac{1}{28}\int_0^{28} 1{,}14e^{0{,}06}dx$
Calculer m. On donnera la valeur exacte de m, puis une valeur approchée à l'unité près

16 Le tableau suivant donne les indices des prix à la consommation pour les années 1990 à 1997.

Année	90	91	92	93	94	95	96	97
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Indice y_i	100	103,2	105,7	107,9	109,7	111,6	113,6	115,2

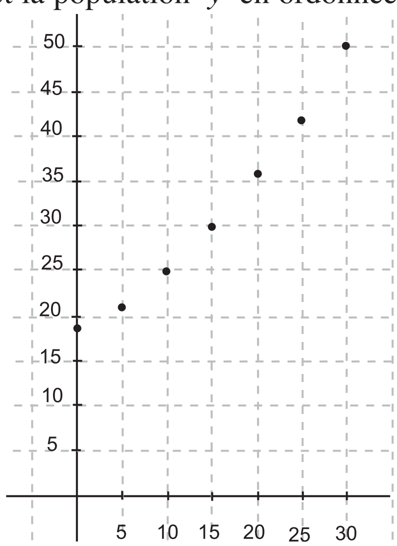
1) Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i) dans un repère orthogonal. Calculer les coordonnées du point moyen et placer ce point.
2) Donner une équation de la droite d'ajustement affine D par la méthode des moindres carrés. Représenter la droite D dans le repére précédent.

3) On envisage l'ajustement du nuage par une branche de parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ et l'on cherche les trois nombres a, b, c . Pour cela on pose $z_i = \sqrt{1198 - 10y_i}$ une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés est alors :
$z = -x + 14$.
a) Vérifier que $y = -0{,}1x^2 + 2{,}8x + 100{,}2$.
b) Dans le repére précédent, et sans étudier la fonction correspondante, tracer la branche de la parabole d'équation $y = -0{,}1x^2 + 2{,}8x + 100{,}2$ pour x appartenant à l'intervalle $[0;7.]$
c) En choisissant ce dernier ajustement, quelle prévision de l'indice des prix à la consommation pouvait-on faire fin 1997 pour 1998 ?
d) On sait aujourd'hui que l'indice des prix à la consommation en 1998 était de 116. Calculer le pourcentage de l'erreur commise en utilisant la prévision trouvée en 3. c).

17 Le tableau suivant donne la population d'une nouvelle ville entre les années 1970 et 2000.

Année	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Rang de l'année x	0	5	10	15	20	25	30
Population en milliers d'habitants y	18	21	25	30	36	42	50

Le nuage de points associé à ce tableau est représenté graphiquement ci-dessous ; le rang x de l'année est en abscisse et la population y en ordonnée.



1) a) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième). Tracer cette droite sur le graphique ci-contre.
b) Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2003, à un millier près.
2) a) L'allure du nuage incite à chercher un ajustement par une fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = ae^{bx}$ où a et b sont des réels. Déterminer a et b tels que $f(0) = 18$ et

On donnera une valeur arrondie de b au millième.

b) Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2003, à un millier près.

c) Tracer la courbe représentative de f sur le graphique .

d) La population en 2003 était de 55 milliers. Lequel des deux ajustements vous semble le plus pertinent ? Justifier votre choix.

3) On considère maintenant que, pour une année, la population est donnée en fonction du rang x par $f(x) = 18e^{0,034x}$.

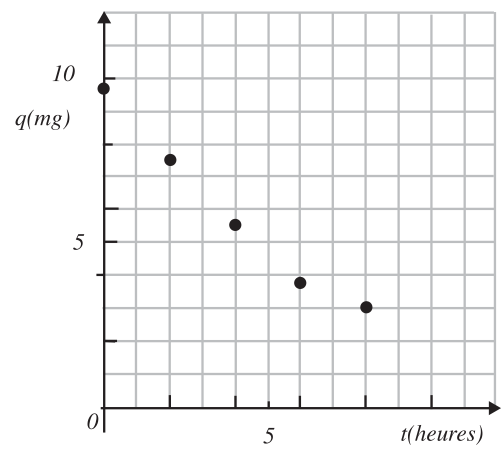
a) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur $\left[0;30\right]$; on donnera le résultat arrondi au dixiéme.

b) A l'aide d'une lecture graphique, déterminer l'année au cours de laquelle la population atteint cette valeur moyenne.

18 Un médicament est injecté par voie intraveineuse. Dans les heures qui suivent, la substance est éliminée par les reins. La quantité q_i présente dans le sang (q_i en milligrammes) à l'instant t_i (t_i en heures) a été mesurée par des prises de sang toutes les deux heures :

Le nuage de points associé à la série statistique $(t_i;q_i)$ est représenté dans un repère orthogonal ci-contre.

t_i (heures)	0	2	4	6	8
q_i (mg)	9,9	7,5	5,5	3,9	3



1) a) Déterminer une équation de la droite D d'ajustement affine de q en t par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-1}).

b) En supposant que ce modèle reste valable pendant 12 heures, quelle estimation obtient-on de la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures ? Qu'en pensez-vous ?.

2) a) On pose $y_i = \ln q_i$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous (valeurs arrondies au centième).

t_i					
y_i					

b) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en t par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis au centième).

c) Montrer que l'expression de q en fonction de t obtenue à partir de cet ajustement est de la forme $q = ae^{-bt}$.

d) Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\left[0;15\right]$ par : $f(t) = 10e^{-0,15t}$.

Tracer sa courbe représentative C .
e) On suppose que ce nouveau modèle reste valable pendant 12 heures. Calculer à 10^{-1} près la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures.

19 Un hypermarché dispose de 20 caisses. Le tableau suivant donne le temps moyen d'attente à une caisse en fonction du nombre de caisses ouvertes :

Nombre de caisses ouvertes X	3	4	5	6	8	10	12
Temps moyen d'attente (en minutes) Y	16	12	9,6	7,9	6	4,7	4

1) Construire le nuage de points $M_i(x_i;y_i)$ correspondant à cette série statistique (unités graphiques : 1cm pour une caisse ouverte, 1cm pour une minute d'attente).
2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
3) Un ajustement affine.
a) Calculer le cœfficient de corrélation linéaire r .
b) Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire D de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer la droite D sur le graphique.
c) Estimer à l'aide d'un calcul utilisant l'équation de la droite D :

- Le nombre de caisses à ouvrir pour que le temps moyen d'attente à une caisse soit 5 minutes.
- Le temps moyen d'attente à la caisse lorsque 15 caisses sont ouvertes.
- Pensez-vous que, dans le cas du dernier résultat, l'ajustement affine soit fiable ?

4) Un ajustement non affine.
On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\lambda}{x}$.
a) Déterminer λ de façon à avoir : $f(3)=16$.
b) Tracer alors la représentation graphique C de f dans le repère utilisé pour le nuage.
c) Estimer à l'aide d'un calcul utilisant la fonction f :

- Le nombre de caisses à ouvrir pour que le temps moyen d'attente à une caisse soit de 5 minutes.
- Le temps moyen d'attente à la caisse lorsque 15 caisses sont ouvertes.

Une brève histoire des outils statistiques

Comment interpréter «l'avalanche de chiffres» de la réalité statistique sans outils théoriques? L'humanité a mis fort longtemps avant de découvrir des procédés de calcul efficaces et des représentations pertinentes. Depuis, ces outils ont envahi tous les domaines de la connaissance.

L'astronomie semble bien être mêre de toutes les sciences ; les statistiques ne font pas exception.

Si on cherche l'origine du besoin d'ordonner des observations, de les représenter par des tableaux et des graphiques, de rechercher des valeurs typiques, de construire des outils spécifiques, on constate que c'est en astronomie que sont apparus ces concepts.

Il y a près de 2500ans, les Babyloniens ont établi des procédés destinés à mesurer les mouvements des planètes et du soleil sur des bases de relevés à intervalles réguliers.

La loi statistique ne s'impose pas à l'esprit humain avec le même caractère de nécessité que les lois naturelles.
Emile Borel

Ptolémée, astronome grec du IIe siécle, a développé son système en se basant surlesdécouvertes d'Aristarque de Samos et d'Hipparque, nés avant lui et qui avaient obtenu des résultats importants sur la position des étoiles et la périodicité de leur retour. Le fait de posséder plusieurs valeurs observées a conduit ces astronomes à proposer des valeurs uniques accompagnées de mesure de variation.

Les valeurs typiques d'une série univariée

Le choix de « valeur typique d'une série » est donc un problème très ancien. Il semble que les premiers paramètres de position qui aient été utilisés soient le mode valeur apparaissant le plus fréquemment, et le « milieu de l'intervalle défini par les valeurs extrêmes».

La «moyenne arithmétique» apparaît clairement dans l'oeuvre de Tycho Brahé (1546-1601) qui, en constituant un ensemble de données sur le mouvement des planètes, permit à Képler de formuler ses lois.

En 1722, Roger Cotes, qui dispose d'observations qui ne sont pas toutes aussi fiables, propose d'utiliser une moyenne pondérée dont les coefficients sont inversement proportionnels à la dispersion des erreurs d'observations.

On peut noter que la médiane voit naître son intérêt à la même époque, en 1757 et que la moyenne géométrique et la moyenne harmonique ont été introduites en Angleterre en 1874.

Si l'idée de la variabilité n'est pas récente puisque des astronomes grecs l'ont utilisée, c'est Galileo Galilée qui, en 1632, s'intéressant à la détermination de la distance entre la terre et une étoile nouvelle, dit clairement pour la première fois : «que ces observateurs ont tous fait des erreurs…que ces erreurs doivent être corrigées… nous nous consacrerons à appliquer les modifications minimales et les corrections les plus petites possibles, juste pour sortir les observations de l'impossible et les remettre dans le possible…».

La variance naît au XIXe siècle avec les moindres carrés ; Gauss lui préfère l'écart-type.

Ajustement, corrélation et régression

Le problème de l'ajustement d'un ensemble de points représentés dans un système d'axes par une droite, ou plus généralement par une courbe, est essentiel dans le développement de la statistique.

Au XVIIIe siècle, Leonhard Euler et Johan Tobias Maver, développant, indépendamment l'un de l'autre, la méthode des moyennes permettant d'ajuster des points par une droite.
Le premier texte paru faisant mention de la méthode des moindres carrés est dû à Adrien Marie Legendre dans un article sur ses « nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des Comètes » publié en 1805. Un an plus tard Gauss fait aussi allusion à cette méthode.
C'est avec l'apparition de la «loi normale» que cette mëthode va trouver sa justification et va devenir pour longtemps La Méthode d'ajustement.
La paternité de la corrélation a donné lieu a une abondante littérature. Signalons simplement que Galton exprime le désir de construire un cœfficient de réversion qui se mutera en régression et qu'en 1888 il utilise les termes de Partial co-relation annonçant déjà à la corrélation multiple.
En 1896, Karl Pearson reprend les concepts de Galton pour leur donner leur forme actuelle.
Au XXé siècle d'autres mesures d'association allaient naître comme, en 1904 le cœfficient de corrélation de rang avec Spearman et la même année la statistique «classique» du chi-deux par Karl Pearson (encore lui !).

Tangente J073-n° 77-Octobre -Novembre 2000.

Chapitre 13

PROBABILITÉS

I . Espaces probabilisés finis - Probabilité.

II . Probabilités conditionnelles

III . Variables aléatoires

IV . Schéma de Bernoulli

V . Exemples de variables aléatoires continues

Bernoulli Jean

I.Espaces probabilisés finis - Probabilités :

Activités préliminaires

Activité 1 :

Sur une étagère sont rangés 5 livres de mathématiques, 4 livres de physique et 6 romans. Deux livres de mathématiques, deux livres de physique et deux romans sont édités en Tunisie, et les autres sont édités à l'étranger.
On tire au hasard un livre de l'étagère.
a) Combien y'a-t-il d'issues possibles ?
b) On donne l'évènement E : «Le livre tiré est un livre de mathématiques».
Donner le nombre d'éléments de E et calculer sa probabilité.

• L'ensemble de toutes les issues possibles est appelé **univers**.

c) Déterminer la probabilité de l'évènement F : «Le livre est édité en Tunisie».
d) Soit G l'évènement : «Le livre tiré est un livre de mathématiques édité en Tunisie». Exprimer G à l'aide de E et F puis déterminer sa probabilité.
e) Soit H l'évènement : «Le livre tiré est un roman». Déterminer $E \cap H$.

• On dit que E et H sont **incompatibles.**

f) Soit K l'évènement : «Le livre tiré est édité à l'étranger». Exprimer K à l'aide F puis calculer p(K).
g) Soit L l'évènement : «Le livre tiré est un roman édité en Tunisie». Exprimer L à l'aide F et H puis déterminer sa probabilité.

Activité 2 :

Une bonbonnière contient 8 bonbons au caramel et 12 bonbons à la menthe. L'expérience consiste à en tirer un bonbon.
1) On suppose que tous les bonbons ont la même probabilité d'être tirés. Calculer la probabilité de tirer un bonbon à la menthe.
2) On suppose que la probabilité de tirer un bonbon au caramel est égale à deux fois celle d'un bonbon à la menthe. Calculer la probabilité de tirer un bonbon à la menthe.

Activité 3 :

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules rouges indiscernables au toucher.
1) On tire au hasard une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche?
2) On fait deux tirages successifs d'une boule en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne.
a) Faire un arbre de choix correspondant à la situation.
b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
E : «On obtient deux boules blanches».
F : «La deuxième boule tirée est blanche».
G : «On obtient au plus une boule blanche».
3) On fait deux tirages successifs, mais sans remettre la boule tirée dans l'urne.

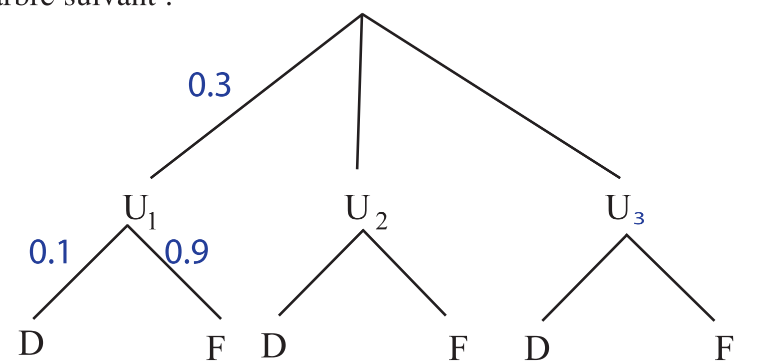
a) Faire un arbre de choix correspondant à la situation.
b) Calculer la probabilité de chacun des événements E, F et G.

Activité 4 :

Une entreprise fabrique des appareils électroménagers ; la production est répartie sur trois usines U_1, U_2 et U_3, pour respectivement 30%, 25% et 45% de la production totale. Tous les appareils sont testés. Les pourcentages d'appareils défectueux sont 10% pour U_1, 15% pour U_2 et 4% pour U_3. Soit les événements suivants :

D : «L'appareil est défectueux»
F : «L'appareil fonctionne», U_1 : «L'appareil provient de U_1»
U_2 : « L'appareil provient de U_2 » et U_3 : «L'appareil provient de U_3 »

1) Compléter l'arbre suivant :



2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
$U_1 \cap D$, $U_2 \cap D$ et $U_3 \cap D$. En déduire $p(D)$.

3) Calculer $p(F)$ de deux manières.

A retenir

Définition

Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire et $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. On appelle probabilité sur Ω toute application p de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans [0,1] telle que :

. $p(\Omega) = 1$
. Pour tous A et B de $\mathscr{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$ on a :
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$
Le triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ s'appelle espace probabilisé fini.

Vocabulaire

. L'ensemble Ω est appelé univers.
. Toute partie de Ω est appelée événement. Un singleton est appelé évènement élémentaire.
. La partie Ω est appelée évènement certain.
. L'ensemble vide est appelé évènement impossible.
. A et B étant deux évènements.
- $A \cap B$ est appelé évènement A et B.
$A \cup B$ est appelé évènement A ou B.

- Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont incompatibles.

A et B sont deux évènements contraires si: $A \cup B = \Omega$ et $A \cap B = \varnothing$.

On note : $B = \overline{A}$ ou $A = \overline{B}$.

• Deux évènements A et B sont dits équiprobables si $p(A) = p(B)$.

Propriétés

Soit $(\Omega , \mathscr{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini :

•Lorsque les évènements élémentaires sont tous équiprobables, la probabilité d'un évènement A est $p(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

•A et B étant deux évènements

$-p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

$- p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ si A et B sont incompatibles.

$- p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Applications

1 Une boite contient trois jetons blancs, quatre jetons rouges et cinq jetons verts. Les jetons blancs sont numérotés 1, 2,3, les rouges 1, 2, 3,4 et les verts 1, 2, 3, 4,5.
On tire au hasard et simultanément trois jetons de la boite. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
E : «Les jetons tirés sont blancs».
F : «Les jetons tirés sont de même couleur».
G : «Parmi les jetons tirés un seul jeton porte le numéro 1».
H : «Parmi les jetons tirés un et un seul est vert».
I : «Les jetons tirés portent des numéros impairs».
J : «La somme des trois numéros est égale à 5».
K : «Deux jetons sont rouges et un jeton seulement porte le numéro 4».

2 Un code d'ouverture d'une serrure est donné par un nombre de trois chiffres choisis parmi les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
1) On choisit un nombre au hasard. Quelle est la probabilité pour que :
   a) On obtienne le code de la serrure ?
   b) Le nombre choisi ait le même chiffre d'unité que le code ?
2) On sait que le code est constitué par les chiffres 1,3 et 6. Quelle est la probabilité :
   a) D'obtenir le code de la serrure ?
   b) D'avoir le même chiffre d'unités, des dizaines ou des centaines que le code ?

3 Une urne contient cinq jetons blancs et trois jetons rouges. On fait deux tirages successifs d'un jeton sans remise. Soit E l'évènement : « On tire un jeton blanc au premier tirage » et F l'évènement : « On tire un jeton rouge au deuxième tirage ».
1) Faire un arbre de choix.
2) Déterminer $p(E)$, $p(\overline{E})$, $p(E \cap F)$ et $p(\overline{E} \cap F)$. En déduire $p(F)$.

II.Probabilités conditionnelles.

Activités de découverte

Activité 1 :

Le tableau suivant donne des statistiques sur l'adhésion des élèves d'une classe à un club sportif ou culturel selon le sexe.

	Adhérents	Non adhérents	
Garçons	14	10	24
Filles	8	4	12
	22	14	36

1) a) Donner le nombre de garçons adhérents à un club.

b) Donner le nombre de filles non adhérentes à un club.

2) Dans la liste des élèves on choisit un élève au hasard.

Soit G l'évènement : «l'élève choisi est un garçon» et A l'évènement : « l'élève choisi est adhérent à un club»

Déterminer $p(A)$, $p(\overline{A})$, $P(G)$ et $p(\overline{G})$.

3) On choisit un garçon. Quelle est la probabilité pour qu'il soit adhérent à un club ? Non adhérent à un club ?

4) On choisit un élève parmi ceux qui ne sont pas adhérents à un club.

a) Quelle est la probabilité pour qu'il soit un garçon? Une fille ?

• La probabilité pour que parmi les garçons on obtienne un élève adhérent à un club s'appelle **probabilité conditionnelle** de l'événement **A sachant G.**

Elle est notée $\mathbf{p(A/G)}$ ou bien $\mathbf{p_G(A)}$

b) Donner $p(A/G)$

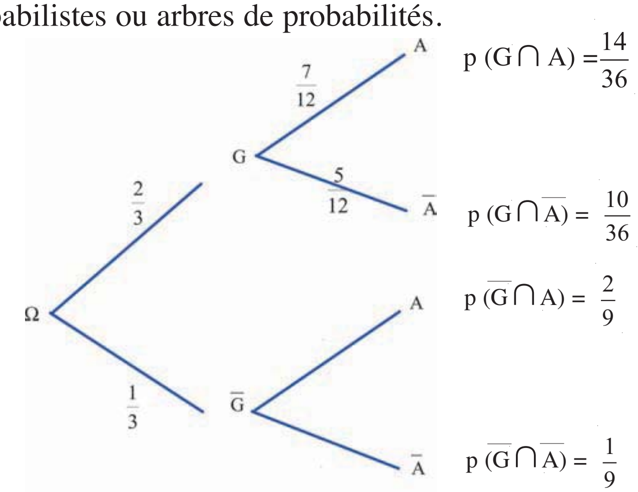
5) a) En considérant l'exemple précédent, déterminer de la même manière :

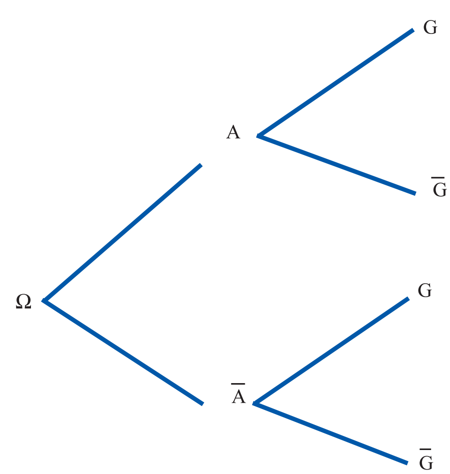
$p(\overline{A}/G)$, $p(G/\overline{A})$ et $p(\overline{G}/A)$.

b) Déterminer $p(\overline{A}\cap G)$, $p(G\cap A)$ et $p(\overline{G}\cap A)$ puis comparer $p(\overline{A}/G)$ et $\dfrac{p(\overline{A}\cap G)}{p(G)}$, $p(G/A)$ et $\dfrac{p(G\cap A)}{p(A)}$, $p(\overline{G}/A)$ et $\dfrac{p(\overline{G}\cap A)}{p(A)}$ Que remarque-t-on ?

Activité 2 :

La situation précédente peut être représentée par l'un des schémas suivants appelés arbres probabilistes ou arbres de probabilités.





Remarquer que le nombre $\frac{7}{12}$ inscrit sur la branche entre G et A est égal à $p\left(A/G\right)$, il en est de même pour les nombres inscrits sur les branches entre G et $\overline{A}$, $\overline{G}$ et A , $\overline{G}$ et A

a) Compléter le schéma 1

b) Remplir le schéma 2 par les probabilités correspondantes.

c) Vérifier que, dans les première et troisième colonnes, la somme des probabilités est égale à 1 et que chaque probabilité inscrite à la première colonne est la somme des probabilités inscrites au bout des branches qui en sont issues. Expliquer.

Activité 3 :

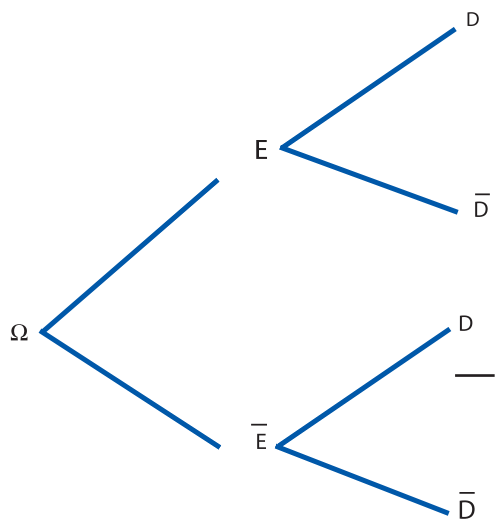
Dans une usine, des pièces mécaniques sont produites par deux machines A et B avec des pourcentages de 40% pour la machine A et 60% pour la machine B. On estime que 15% des pièces produites par la machine A et 8% des pièces produites par la machine B sont défectueuses.

On choisit une pièce au hasard et on considère les évènements :

E : « La pièce est produite par la machine A »

et D: « La pièce est défectueuse ».

a) Compléter l'arbre probabiliste ci-contre en inscrivant les probabilités correspondantes

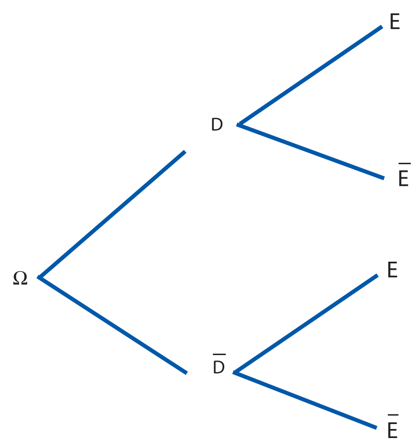


b) Déterminer $p(D)$ puis $p(\overline{D})$.

c) Compléter le deuxième arbre probabiliste ci-contre en inscrivant les probabilités correspondantes.

d) En déduire les probabilités conditionnelles suivantes :

$p(E/D)$, $p(\overline{E}/\overline{D})$ et $p(E/\overline{D})$

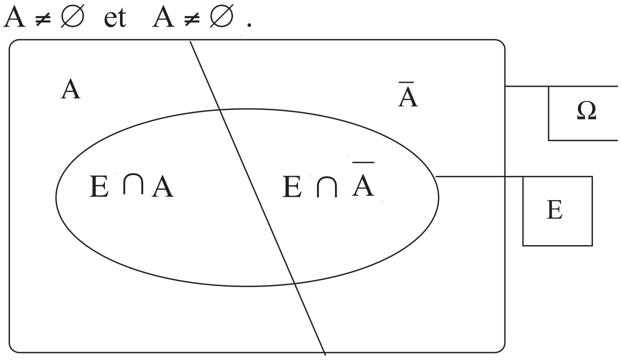


Activité 4 :

1) On donne deux évènements A et E tels que $A \neq \varnothing$ et $\overline{A} \neq \varnothing$.

a) En considérant le diagramme ci-contre, montrer que $p(E) = p(E \cap A) + p(E \cap \overline{A})$.

b) En déduire que $p(E) = p(E/A).p(A) + p(E/\overline{A}).p(\overline{A})$.



2) On donne n évènements $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ formant une partition de Ω c'est-à-dire :

$A_k \neq \varnothing$ pour tout $k \in \{1, 2, 3, \ldots\ldots n\}$;
$A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$
et $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.
a) Montrer, en procédant de la même manière que précédemment que

$$p(E) = p(E/A_1).p(A_1) + p(E/A_2).p(A_2) + \ldots + p(E/A_n).p(A_n)$$

L'égalité précédente s'appelle formule **des probabilités totales.**

b) Montrer que l'on a pour tout $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$: $p(E/A_k)p(A_k) = p(A_k/E)p(E)$

En déduire que $p(A_k/E) = \dfrac{p(E/A_k).p(A_k)}{p(E/A_1).p(A_1)+\ldots+p(E/A_n).p(A_n)}$

La dernière formule est appelée **formule de Bayes**. Elle sert à calculer une probabilité conditionnelle connaissant des probabilités conditionnelles «inverses».

Activité 5 :

A) Voici un autre tableau donnant des statistiques sur l'adhésion des élèves d'une classe à un club sportif ou culturel selon le sexe. On choisit un élève au hasard.

	Adhérents	Non adhérents	
Garçons	15	5	20
Filles	12	4	16
Total	27	9	36

Soit G l'évènement : « l'élève choisi est un garçon » et
A l'évènement : « l'élève choisi est adhérent à un club »
a) Comparer la proportion de garçons adhérents par rapport au nombre total des garçons et la proportion des filles adhérentes par rapport au nombre total des filles.

b) Déterminer puis comparer $p(A)$, $p(A/G)$ et $p(A/\overline{G})$.

Faire de même pour $p(G)$, $p(G/A)$ et $p(G/\overline{A})$. Conclure.

c) Comparer $p(A \cap G)$ et $p(A) . p(G)$.
On voit que la réalisation de l'évènement G ne dépend pas de la réalisation de A.
➢ On dit que les évènements G et A sont **indépendants.**
B) On considère l'exemple de l'activité 1 . Les évènements A et G sont-ils indépendants ?

A retenir

Définition

Dans un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$, on donne deux évènements A et B tels que $p(B) \neq 0$. On appelle « probabilité conditionnelle de A sachant B» le réel noté $p(A/B)$ ou bien $p_B(A)$ et défini par :

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Conséquence si $p(A) \neq 0$ alors $p(A \cap B) = p(A).p(B/A)$
si $p(B) \neq 0$ alors $p(A \cap B) = p(B).p(A/B)$

Formule des probabilités totales

$A_1, A_2 \ldots. A_n$ étant des évènements formant une partition de l'univers Ω et E étant un évènement de probabilité non nulle, on a :

$$p(E) = p(E/A_1).p(A_1)+p(E/A_2).p(A_2)+\ldots..+p(E/A_n).p(A_n)$$

En particulier si A est un évènement tel que $p(A) \neq 0$ et $p(\overline{A}) \neq 0$ alors

$$p(E) = p(E/A).p(A) + p(E/\overline{A}).p(\overline{A}).$$

Formule de Bayes

$A_1, A_2 \ldots. A_n$ étant des évènements formant une partition de l'univers et E étant un évènement de probabilité non nulle, pour tout
$k \in \{1, 2, 3, \ldots.., n\}$

on a $$p(A_k/E) = \frac{p(E/A_k).p(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} p(E/A_i).p(A_i)}$$

Evènements indépendants

Deux évènements A et B sont dits indépendants si la réalisation de l'évènement A ne dépend pas de la réalisation de l'évènement B c'est à dire:

$$p(A/B) = p(A) , \quad p(B/A) = p(B) \quad \text{ou encore } p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

Exemple

Dans les classes terminales d'un lycée, 50% des élèves sont en section scientifique, 30% en section économique et 20% en section lettres. Les statistiques du lycée montrent que $\frac{3}{4}$ des élèves scientifiques, la moitié des élèves de la section économiquee et $\frac{1}{4}$ des élèves de la section lettres choisissent l'informatique comme matière optionnelle.
On choisit un élève au hasard et on constate qu'il a choisi l'informatique.
Quelle est la probabilité qu'il soit dans une section scientifique ?

Solution

On considère les évènements suivants :
E : «L'élève a choisi l'informatique».
A_1 : «L'élève est en section scientifique».
A_2 : «L'élève est en section économique».
A_3 : «L'élève est en section lettres».

On a : $p(A_1) = \frac{50}{100}$, $p(A_2) = \frac{30}{100}$ et $p(A_3) = \frac{20}{100}$

$p(E/A_1) = \frac{3}{4}$ $p(E/A_2) = \frac{1}{2}$ et $p(E/A_3) = \frac{1}{4}$

La probabilité cherchée est $p(A_1/E)$. D'après la formule de Bayes on a :

$$p(A_1/E) = \frac{p(E/A_1).p(A_1)}{p(E/A_1).p(A_1) + p(E/A_2).p(A_2) + p(E/A_3).p(A_3)} = \frac{\frac{3}{4}.\frac{50}{100}}{\frac{3}{4}.\frac{50}{100} + \frac{1}{2}.\frac{30}{100} + \frac{1}{4}.\frac{20}{100}}$$

$$p(A_1/E) = \frac{15}{23} \approx 0,65$$

Applications

1 Une urne contient 5 jetons blancs et 3 jetons rouges indiscernables au toucher.
On tire un jeton de l'urne et on regarde sa couleur. S'il est blanc, on le remet dans l'urne et on tire un deuxième jeton. S'il est rouge, on ne le remet pas dans l'urne et on tire un deuxième jeton. On considère les évènements :
A : «On tire un jeton blanc au premier tirage ».
B : «On tire un jeton blanc et un jeton noir».
C : «On tire un jeton blanc au deuxième tirage».
1) Déterminer $p(B/A)$ et $p(B/C)$.
2) Déterminer $p(C/A)$ et $p(C/\overline{A})$. En déduire $p(C)$.
Faire un arbre de probabilité correspondant à la situation.

2 A la sortie d'usine, on a constaté qu'une pièce présente deux sortes de défauts.
8% des pièces présentent le défaut D_1. 15% des pièces présentent le défaut D_2.
5% des pièces présentent à la fois le défaut D_1 et D_2.
On prend une pièce au hasard.
a) Calculer la probabilité que la pièce présente un défaut seulement.
b) Sachant que la pièce présente le défaut D_1, quelle est la probabilité pour qu'elle présente le défaut D_2 ?

3 Un joueur de tennis effectue une mise en jeu. Pour cela il a droit à deux tentatives : un premier service suivi, s'il n'est pas réussi, d'un deuxième service. La probabilité pour que le premier service réussisse est 2/3 ; s'il a échoué, la probabilité pour que le deuxième réussisse est 4/5. Lorsque les deux services échouent, on dit qu'il y'a double faute. Sinon la mise en jeu est réussie.
1) Déterminer la probabilité pour que, sur une mise en jeu, ce joueur fasse une double faute.
2) Déterminer la probabilité pour que la mise en jeu soit réussie.

III. Variables aléatoires.

Activités de découverte

Activité 1 :

a) Un joueur lance un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées 1,2,3,4,5 et 6.
Il gagne 2 dinars s'il obtient la face 6, gagne 1 dinar s'il obtient 2 ou 4 et perd 1 dinar s'il obtient un nombre impair.
Compléter le tableau suivant :

Issue	1	2	3	4	5	6
Gain	-1					

Le tableau précédent permet de définir une application X de l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ vers $\mathbb{R}$ qui à chaque issue associe le gain correspondant

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

• L'application X est appelée **variable aléatoire.**

b) On considère les évènements :
E_1 : « Le joueur gagne 2 dinars ».
E_2 : « Le joueur gagne 1 dinar ».
E_3 : « Le joueur perd 1 dinar ». (il gagne (-1) dinar).
Déterminer $p(E_1)$, $p(E_2)$ et $p(E_3)$

• $p(E_1)$ est la probabilité pour que X prenne la valeur 2, on la note **$p(X = 2)$.**

Compléter le tableau suivant

Gain x_i	-1	1	2
Probabilité $p(X = x_i)$			

Le tableau précédent permet de définir une application de l'ensemble des gains algébriques $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$ vers $[0,1]$. On l'appelle **loi de probabilité** de X et on la note P_X.

$$P_X(x_i) = p(X = x_i)$$

c) Déterminer $P_X(-1)$, $P_X(1)$ et $P_X(2)$ puis $P_X(-1) + P_X(1) + P_X(2)$. Que remarque-t-on ?

Activité 2 :

Le tableau suivant donne des statistiques sur le nombre de voitures par ménage, données en pourcentages de l'ensemble de ménages dans une ville :

Nombre de voitures	0	1	2	3
pourcentages	40%	35%	20%	5%

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque ménage associe le nombre de voitures qu'il possède.

1) a) Déterminer $X(\Omega)$ puis donner, par un tableau, la loi de probabilité de X.

b) Quelle est la probabilité pour qu'un ménage choisi possède au plus 2 voitures ?
Au moins 2 voitures ?

. La probabilité pour que la variable X prenne une valeur inférieure ou égale à 2 est notée **$p(X \leq 2)$** et la probabilité pour que la variable X prenne une valeur au moins égale à 2 est notée **$p(X \geq 2)$.**

c) Déterminer $p(X > 1)$ puis $p(X \leq 1)$ et vérifier que $p(X > 1) + p(X \leq 1) = 1$.
Peut-on prévoir le résultat ?

d) Sachant que le ménage possède au moins une voiture, calculer la probabilité qu'il possède 2 voitures.

Activité 3 :

On reprend l'exemple de l'activité 1.

a) Déterminer $p(X \leq -1)$, $p(X \leq 1)$ et $p(X \leq 2)$.

b) Soit x un réel. Déterminer $p(X \leq x)$ dans chacun des cas suivants :
$x \leq -1$; $-1 < x \leq 1$; $1 < x \leq 2$ et $x > 2$.

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \leq x)$.

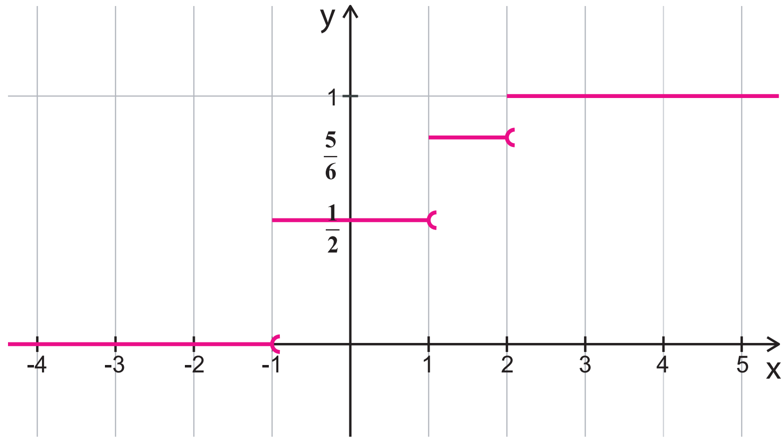
D'après ce qui précède, on voit bien que F est telle que :

$F(x) = 0$ si $x \in]-\infty, -1[$

$F(x) = \frac{1}{2}$ si $x \in [-1, 1[$

$F(x) = \frac{5}{6}$ si $x \in [1, 2[$

$F(x) = 1$ si $x \in [2, +\infty[$



La figure ci-contre est la représentation graphique de F.

F est appelée **fonction de répartition** de la variable aléatoire X.

c) Vérifier que $p(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1)$ et que $p(-0,6 < X \leq 1,3) = F(1,3) - F(-0,6)$

d) Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. En partant de l'égalité $]-\infty, b] =]-\infty, a] \cup]a, b]$ Montrer que $p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

A retenir

Définition - Vocabulaire - Notation.

- $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$, étant espace probabilisé fini , on appelle variable aléatoire définie sur Ω toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.
- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ étant l'ensemble des valeurs que prend la variable X, on note $p(X = x_i)$ la probabilité pour que X prenne la valeur x_i.
- L'application de $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vers [0,1] notée P_X ,qui à tout x_i associe $p(X = x_i)$ est appelée loi de probabilité de X. $P_X(x_i) = p(X = x_i)$
- La probabilité pour que X prenne une valeur strictement inférieure à un réel a est notée $p(X < a)$ et la probabilité pour que X prenne une valeur supérieure ou égale à un réel a est notée $p(X \geq a)$.
- On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = p(X \leq x)$.

Propriétés

X étant une variable aléatoire et a étant un réel,

- Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ alors $\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$
- $p(X \leq a) + p(X > a) = 1$
- La fonction de répartition de X est constante sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[, \ldots [x_i, x_{i+1}[, \ldots, [x_n, +\infty[$
- Pour tous réels a et b tels que $a \leq b$ on a : $p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

1 On jette deux dés cubiques parfaits dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Soit X la variable aléatoire qui à toute issue associe la somme des numéros apparus.
a) Définir Ω . Déterminer $X(\Omega)$.
b) Donner, par un tableau, la loi de probabilité de X.
c) Déterminer chacune des probabilités suivantes :
$p(X< 4)$, $p(X \leq 4)$, $p(X > 4)$, $p(X \leq 5)$, $p(3< X \leq 7)$ et $p(2{,}5 < X \leq 9{,}12)$

2 Reprendre l'exemple de l'activité 2.
Définir la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative.

IV.Paramètres d'une variable aléatoire.

Activités préliminaires

Activité 1 :

On considère l'exemple de l'activité 1 du paragraphe précédent, et on se demande si le jeu est favorable pour le joueur, c'est-à-dire s'il a plus de chances de gagner que de perdre.
Pour cela on considère le tableau des issues et gains correspondants.

Issue	1	2	3	4	5	6
Gain	-1	1	-1	1	-1	2

a) Calculer la moyenne E des gains du joueur. Le jeu lui est-il favorable ?
b) Vérifier que E peut s'écrire :

$$E = (-1)\, p(X = -1) + 1\, p(X = 1) + 2\, p(X = 2).$$

.Le réel E est appelé **espérance mathématique** de la variable aléatoire X ; on la note **E(X)**.
Plus généralement l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X définie sur Ω prenant des valeurs $x_1, x_2, \ldots.\, x_n$ est le réel

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p(\{\omega\}) \quad \text{ou encore}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X=x_i) = x_1 p(X=x_1)+x_2 p(X=x_2)+\ldots+x_n p(X=x_n)$$

c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X vue dans l'activité 2 précédente (nombre de voitures par ménage). Interpréter le résultat.

Activité 2 :

1) X étant la variable aléatoire vue précédemment, on considère les variables aléatoires

$$Y = X-1 \quad \text{et} \quad Z = 3X.$$

a) Donner la loi de probabilité de Y et calculer son espérance mathématique.

Vérifier que $E(Y) = E(X) -1$

b) Donner la loi de probabilité de Z et calculer son espérance mathématique.

Vérifier que E(Z) = 3E(X).

2) X étant la variable aléatoire vue précédemment, on considère la variable aléatoire Y définie sur Ω par le tableau suivant qui représente les gains algébriques d'un joueur qui lance un dé:

ω_i	1	2	3	4	5	6
Y(ω_i)	-3	1	2	1	-2	2

Soit Z = X + Y.

a) Donner, par un tableau, la loi de probabilité de Z.

b) Calculer l'espérance mathématique de Z et vérifier que E(Z) = E(X) + E(Y).

Activité 3 :

Les tableaux suivants donnent les lois de probabilité du nombre de réclamations quotidiennes qui parviennent à la direction de deux supermarchés.

Supermarché **A**	
x_i	$p(X = x_i)$
0	0,10
1	0,20
2	0,30
3	0,20
4	0,10
5	0,10

Supermarché **B**	
y_i	$p(Y = y_i)$
0	0,01
1	0,25
2	0,35
3	0,25
4	0,10
5	0,04

a) Calculer E(X) et E(Y) et vérifier que l'on a E(X) = E(Y) = 2,3.

• Les variables aléatoires X et Y ont même espérance. Pour faire la distinction entre X et Y on compare les deux réels:

$V(X) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - E(X))^2 \, p(X = x_i)$ et $V(Y) = \sum_{i=1}^{5} (y_i - E(Y))^2 \, p(Y = y_i)$ ou bien on compare les réels : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ et $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}$

• Le réel **V(X)** s'appelle **variance** de la variable aléatoire X et σ**(X)** son **écart-type.**

b) Calculer V(X) et V(Y). Comparer V(X) et V(Y). Interpréter le résultat.

2) On considère les variables aléatoires X et Y vues précédemment.
   a) Donner la loi de probabilité de chacune des variables X^2 et Y^2.
   b) Calculer $E(X^2)$ puis $E(Y^2)$.
   c) Vérifier que l'on a : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ et $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$

Activité 4 :

Soit X la variable aléatoire définie sur Ω et prenant des valeurs $x_1, x_2, \dots x_n$ et a un réel.

1) On pose $Y = X + a$
   a) Donner l'ensemble des valeurs que prend la variable aléatoire Y.
   b) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots\dots, n\}$ on a : $p(Y = x_i + a) = p(X = x_i)$.
   c) En déduire que $V(X + a) = V(X)$ et $\sigma(X+a)=\sigma(X)$.
2) On suppose a non nul et on pose $Z = aX$.
   a) Donner l'ensemble des valeurs que prend la variable aléatoire Z.
   b) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots\dots, n\}$ on a : $p(Z = ax_i) = p(X = x_i)$.
   c) En déduire que $V(aX) = a^2V(X)$ et $\sigma(aX)=|a|\sigma X)$

A retenir

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire définie sur Ω .

L'espérance mathématique de X est le réel noté E(X) tel que

$$E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)p(\{\omega\})$$

Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\dots, x_n\}$ alors $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X=x_i)$.

Propriétés

X et Y étant des variables aléatoires définies sur Ω et a un réel.

$$E(X+a) = E(X) + a$$
$$E(aX) = aE(X)$$
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire définie sur Ω et telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\dots, x_n\}$.

• La variance de X notée V(X) est le réel

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p(X = x_i)$$

• L'écart type de X noté $\sigma(X)$ est le réel

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

Propriétés

X étant une variable aléatoire définie sur Ω et a un réel

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$V(X + a) = V(X) \qquad \sigma(X+a)=\sigma(X)$$

$$V(aX) = a^2 V(X) \qquad \sigma(aX)=|a|\sigma(X)$$

Applications

1 Dans une loterie, on dispose de 100 billets parmi lesquels dix donnent un gain de 10 dinars et deux donnent un gain de 100 dinars. Les autres ne font rien gagner.
Une personne achète un billet. Quelle somme espère-t-elle gagner ?

2 Les tableaux suivants donnent les probabilités pour qu'un adhérent à une société d'assurance fasse un accident pendant une année et cinq années plus tard.

Nombre d'accidents	0	1	2	3	4
Probabilité	0,60	0,25	0,12	0,02	0,01

Nombre d'accidents	0	1	2	3	4
Probabilité	0,65	0,15	0,12	0,05	0,03

Soit X et Y les variables aléatoires représentées respectivement par le premier et le deuxième tableau.

a) Calculer E(X) et E(Y). Interpréter les résultats.

b) Calculer V(X) et V(Y).

c) Calculer $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$. Interpréter les résultats.

V.Schéma de Bernoulli - Loi binomiale.

Activités de découverte

Activité :

Une personne achète des plants de roses. L'expérience consiste à les planter dans son jardin. La probabilité pour qu'un plant germe, une fois planté, est égale à $\frac{4}{5}$.

1) On suppose qu'il a acheté 2 plants et on note X variable aléatoire qui donne le nombre de plants qui ont germé.

Calculer p(X= 0), p(X= 1) et p(X = 2). On pourra pour cela appeler les plants p_1 et p_2 et faire un arbre de choix.

2) On suppose qu'il a acheté 5 plants p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5 et on considère l'expérience élémentaire qui consiste à planter un seul plant.

Soit S l'évènement élèmentaire « le plant germe » .

L'expérience a deux issues contraires qu'on peut appeler succès S lorsque le plant germe et échec E ou $\overline{S}$ sinon.

. Cette expérience élèmentaire s'appelle **épreuve de Bernoulli.**

Planter les 5 plants revient à répéter 5 fois l'expérience élémentaire précédente.

Voici une issue.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
	S	S	E	S	S
Probabilité	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$

On voit bien que la probabilité de cette issue est égale à $\left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(\frac{1}{5}\right)$ car le succès de la plantation d'un plant n'influe pas sur le résultat des autres.

a) On remarque que dans ce cas il y a 4 plants qui ont germé ou 4 succès.

Combien y'a-t-il d'issues qui donnent 4 succès ?

b) Voici une issue donnant 2 succès :

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
	E	S	S	E	E
Probabilité	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Calculer la probabilité de cette issue.
Montrer que le nombre d'issues donnant 2 succès est égal à C_5^2 .
c) Donner un exemple d'issue donnant 3 succès et montrer qu'il y'a C_5^3 issues donnant 3 succès.
d) Soit X la variable aléatoire qui à toute plantation de 5 plants associe le nombre de plants ayant germé. Donner la loi de probabilité de X.
e) Calculer E(X) et V(X). Vérifier que $E(X) = 5p(S)$ et $V(X) = 5p(S)\, p\left(\overline{S}\right)$

•La loi de probabilité de X est appelée **loi binominale de paramètres** 5 et $\frac{4}{5}$.

A retenir

Définition et vocabulaire

• On appelle schéma de Bernoulli, une suite d'expériences identiques telles que :

- Chaque expérience ne donne lieu qu'à deux issues : l'une, notée S, appelée succès, l'autre $E = \overline{S}$ appelée échec.

- Les expériences sont indépendantes les unes des autres .

• Les paramètres d'un schéma de Bernoulli sont le nombre d'expériences *n* et la probabilité p de succès d'une expérience élémentaire.

• La loi de probabilité de X qui a chaque issue de n expériences associe le nombre de succès s'appelle loi binomiale de paramètres n et p.

Théorème (admis)

Etant donné une loi binominale X de paramètres n et p on a :

• $p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ avec $k \in \{0,1,2......n\}$

• L'espérance et la variance de X sont $E(X)=np$ et $V(X)=np(1-p)$

Exemple

Dans un stand de tir, un tireur touche la cible avec une probabilité de $\frac{7}{10}$.
Sachant qu'il a tiré quatre fois .

a) Déterminer la probabilité qu'il touche 3 fois la cible.

b) Déterminer la probabilité qu'il touche au plus 2 fois la cible.

c) Sachant que pour chacun de 4 tirs le tireur paie un dinar, et qu'il gagne 2 dinars chaque fois qu'il touche la cible, dire si le jeu lui est ou non favorable.

Solution

Il s'agit dans ce cas d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{7}{10}$.
a) La probabilité qu'il touche trois fois la cible est :

$$p_3 = C_4^3\left(\frac{7}{10}\right)^3.\frac{3}{10} = 4\frac{1029}{10^4} = \frac{4116}{10000} = 0{,}4116$$

b) L'évènement E : « il touche au moins 2 fois la cible » et l'évènement
F : « il touche la cible moins de 2 fois» sont contraires donc p(E) = 1 - p(F).
F est la réunion des évènements F_0 : « il ne touche la cible aucune fois » et
F_1 : « il touche la cible une fois ».

$$p(F_0) = C_4^0\left(\frac{7}{10}\right)^0.\left(\frac{3}{10}\right)^4 = \frac{3^4}{10^4} = 0{,}0081$$

$$p(F_1) = C_4^1\left(\frac{7}{10}\right)^1.\left(\frac{3}{10}\right)^3 = 4.\frac{7}{10}.\frac{3^3}{10^3} = 0{,}0756$$

Donc p(F) = 0,0081 + 0,0756 = 0,0837.
Donc la probabilité qu'il touche au moins 2 fois la cible est p(E) = 1 - 0,0837 = 0,9163.
c) Soit X la variable aléatoire qui à chaque épreuve de 4 tirs associe le gain correspondant et X_1 la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où il touche la cible.
On a : $X(\Omega) = \{0,2,4,6,8\}$ et $X_1(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$.
Il est évident que les gains de 0, 2 ,4 , 6 et 8 dinars correspondant respectivement à un nombre de fois où il touche la cible égal à 0, 1, 2, 3 et 4 donc $X = 2X_1$.
Voici le tableau représentant la loi de probabilité de X :

x_i	0	2	4	6	8
$P(X=x_i)$	$\left(\frac{3}{10}\right)^4$	$4.\frac{7}{10}.\left(\frac{3}{10}\right)^3$	$6.\left(\frac{7}{10}\right)^2.\left(\frac{3}{10}\right)^2$	$4.\left(\frac{7}{10}\right)^3.\frac{3}{10}$	$\left(\frac{7}{10}\right)^4$

Pour voir si le jeu est favorable, on calcule l'espérance mathématique de X.

$$E(X) = E(2X_1) = 2.E(X_1) = 2.4.\frac{7}{10} = 5{,}6.$$

L'espérance de gain pour le tireur est 5,6 dinars. Puisqu'il a payé 4 dinars pour 4 tirs, le jeu lui est favorable.

Application

a) Une compagnie a vendu 15 machines à laver avec une garantie d'une année. La probabilité pour qu'au cours de l'année la machine tombe en panne est 0,1. La direction de la compagnie estime qu'elle sera gagnante si au plus 5 machines tombent en panne au cours de l'année. Quelle est la probabilité pour la compagnie d'être gagnante ?
b) X étant la variable aléatoire donnant le nombre de machines tombant en panne au cours de l'année,

- Déterminer $p(X=0)$; $p(X=10)$
- Calculer $E(X)$.

VI.Exemples de variables aléatoires continues.

Activités préliminaires

• Les variables aléatoires qu'on a étudiées précédemment sont définies sur un ensemble fini et prennent un nombre fini de valeurs. Ce sont des variables aléatoires discrètes.

•Cependant certaines variables aléatoires peuvent prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné. On les appelle **variables aléatoires continues.**

Parmi les variables aléatoires suivantes, indiquer celles qui sont continues :
a) Le temps que met un coureur pour parcourir 800 mètres.
b) La température d'une personne en bonne santé.
c) Le nombre d'absents dans une classe.
d) Le poids d'un nouveau né.
e) Le montant de la facture d'électricité.
f) Le nombre de repas servis dans un restaurant.

Activités de découverte

Activité 1 :

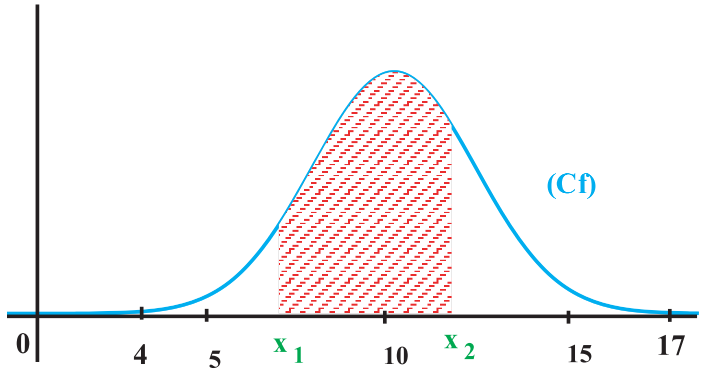
Le tableau suivant représente la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	0,03	0,07	0,30	0,40	0,15	0,05

a) Déterminer $p(X \leq 2)$ et $p(X \geq 3)$
b) Déterminer $p(1<X \leq 4)$ et $p(1 \leq X \leq 4)$
Pour une variable aléatoire continue il n'est pas possible de représenter sa loi de probabilité par un tableau analogue à celui d'une loi discrète.

Activité 2 :

La courbe C_f suivante représente les moyennes générales des élèves d'un grand lycée à la fin d'une année scolaire. Il s'agit de l'histogramme des fréquences de moyennes de tous les élèves, rangés dans des classes d'amplitude 0,1.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque élève associe sa moyenne générale et P sa loi de probabilité.



X peut prendre n'importe quelle valeur de l'intervalle [4,17] et on s'intéresse à la probabilité pour que X soit comprise entre deux valeurs données de [4,17]

• La courbe C_f représente une fonction continue et positive f. La fonction f est appelée la **densité de probabilité** de la variable X.

• On admet que l'aire de la partie hachurée est égale à la probabilité pour qu'un élève pris au hasard ait une moyenne comprise entre x_1 et x_2 c'est-à-dire $p(x_1 \leq X \leq x_2)$.

• La loi de probabilité P de X est une application qui, à tout sous-intervalle $[x_1, x_2]$ de [4,17] associe la quantité $P([x_1, x_2]) = p(x_1 \leq X \leq x_2)$

a) Montrer que $p(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$

b) Les notes étant comprises entre 4,00 et 17,00 ; déterminer, en expliquant, l'intégrale

$$\int_4^{17} f(t)dt$$

c) Soit F la fonction définie sur $[4,17]$ par $F(x) = \int_4^x f(t)dt$

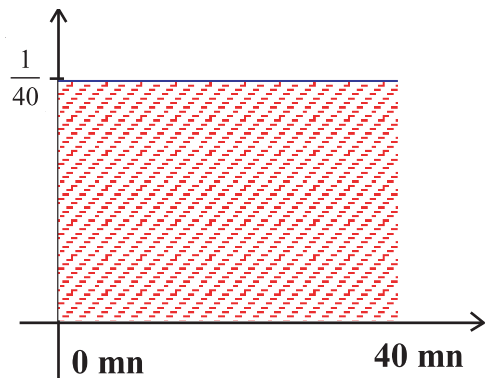
Montrer que F est la fonction de répartition de la variable X.

d) Montrer que l'on a $p(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Activité 3 :

Le temps prévu pour l'arrivée d'un train à une station est 0^h10mn.

Les statistiques montrent que l'instant de son arrivée varie entre 0h00mn et 0^h40mn avec la même probabilité.
Soit X la variable aléatoire qui a toute arrivée du train associe son heure d'arrivée et P sa loi de probabilité. D'après les données, **la loi *P* est uniforme** sur l'intervalle $[0,40]$ et sa densité de probabilité f est une fonction constante sur cet intervalle.



Voici sa représentation graphique (on prend la minute comme unité de temps)

1) Déterminer l'aire du rectangle hachuré.
En déduire sa hauteur.

2) Déterminer la probabilité pour que le train

a) Arrive entre 0^h15mn et 0^h20mn

b) Arrive avant l'heure

c) Arrive après 0^h20mn

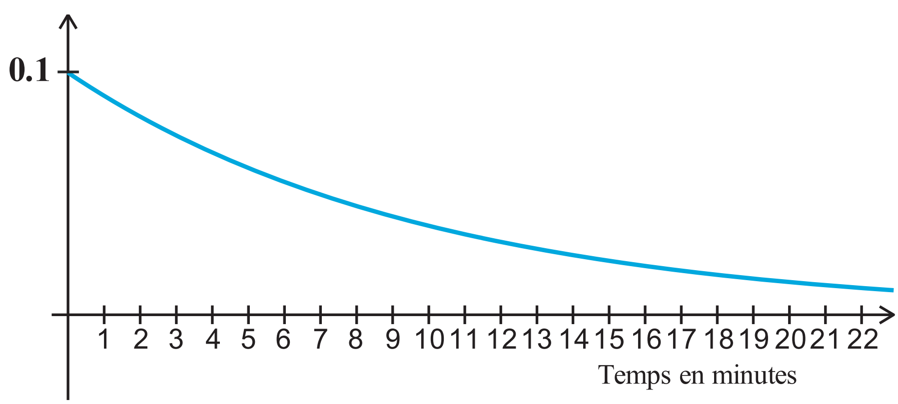
3) Soit F la fonction de répartition de X. Exprimer $F(x)$ en fonction de x dans chacun des cas suivants : $x \leq 0$, $0 < x \leq 40$ et $x > 40$.

Activité 4 :

Au guichet d'une banque, on s'intéresse à l'intervalle de temps entre deux arrivées successives de clients. Soit X la variable aléatoire qui donne, en minutes, la durée de cet intervalle.
Les statistiques montrent que X est une variable aléatoire dont la densité de probabilité est définie par : $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ où λ est un réel strictement positif .

• On dit que la variable aléatoire X suit **une loi exponentielle de paramètre** λ, ou que la loi de probabilité de X est une loi exponentielle de paramètre λ .

Voici la courbe représentative de f dans le cas $\lambda = 0,1$



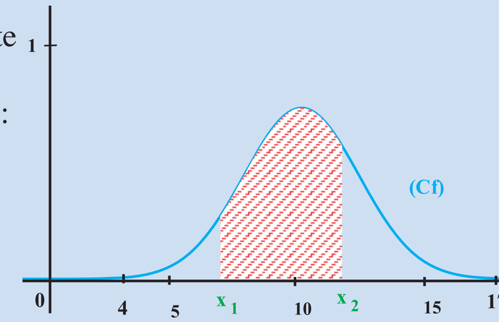
1) Calculer la probabilité pour que l'intervalle entre deux arrivées successives ait une durée :
   a) Inférieure à 2 minutes.
   b) Supérieure à 2 minutes.
   c) Comprise entre 2 minutes et 3 minutes.

2) Soit F la fonction du répartition de X. Montrer que $F(x) = 1 - e^{-0,1x}$

A retenir

Définition :

. Une variable aléatoire continue est une variable aléatoire X qui peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné.
On s'intéresse alors à des évènements du type : « La valeur de X est comprise entre x_1 et x_2 où x_1 et x_2 sont deux réels donnés ».



. X étant une variable aléatoire prenant des valeurs dans $[a,b]$,
- On appelle densité de probabilité de X la fonction f positive et continue sur $[a,b]$ telle que :

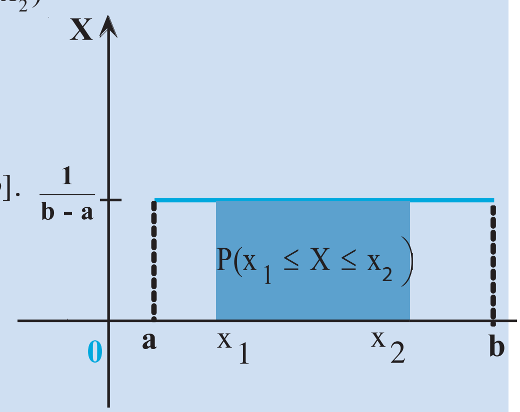
$\int_a^b f(t)dt = 1$ et pour tous x_1 et x_2 de l'intervalle $[a,b]$

$$p(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

- La loi de probabilité P de X est l'application qui, à tout sous-intervalle $[x_1, x_2]$ de $[a,b]$ associe la quantité $P([x_1, x_2]) = p(x_1 \leq X \leq x_2)$

Définition

On appelle loi uniforme sur $[a,b]$ la loi de probabilité dont la densité f est la fonction constante égale à $\dfrac{1}{b-a}$ sur $[a,b]$.



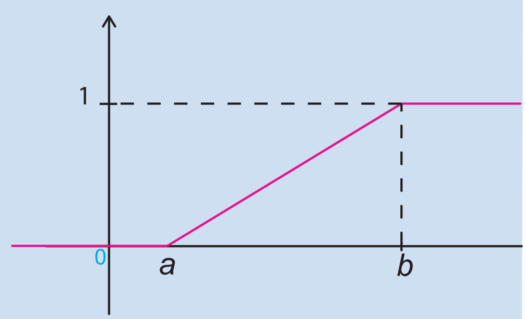
Conséquences

. x_1 et x_2 étant deux réels de l'intervalle $[a,b]$ et X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a,b]$ on a :

$$P([x_1, x_2]) = p(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b-a}$$

. La fonction de répartition de X est définie sur IR par

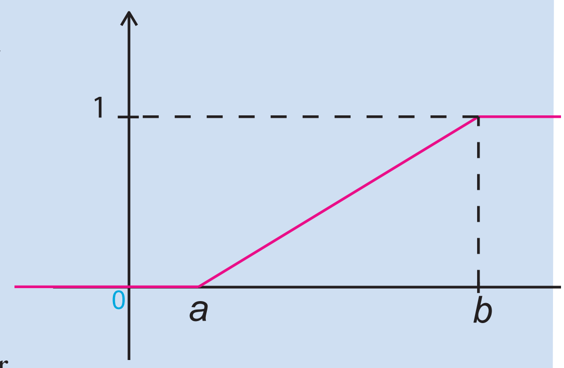
$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x < b \\ 1 & si \quad x \geq b \end{cases}$$



Définition

Soit λ un réel strictement positif. On appelle loi exponentielle de paramètre λ la loi de probabilité dont la densité f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$$



Conséquences

- Si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ alors, pour tous réels positifs a et b tels que $a \leq b$:

$$P([a,b]) = p(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

- On a $p(X \geq a) = e^{-\lambda a}$
- La fonction de répartition de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 1- e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple 1

Un appareil de mesure évalue l'épaisseur (en cm) de pièces mécaniques. L'expérience prouve que l'épaisseur des pièces peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme dans l'intervalle [2 ; 2,8]

1) Calculer $P(X \leq 2{,}6)$ et $P(2{,}3 \leq X \leq 2{,}5)$.

2) Les pièces sont acceptées si leur épaisseur est supérieure à 2,4 cm. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit acceptée ?

3) Une pièce a une épaisseur supérieure à 2,2 cm. Quelle est la probabilité qu'elle soit acceptée ?

Solution

1) X suit la loi uniforme et elle est à valeurs dans [2 ; 2,8]

$$P(X \leq 2{,}6) = \frac{2{,}6-2}{2{,}8-2} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75 .$$

$$P(2{,}3 \leq X \leq 2{,}5) = \frac{2{,}5-2{,}3}{2{,}8-2} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = 0{,}25$$

2) La probabilité pour qu'une pièce soit acceptée est $P(X \geq 2{,}4) = \dfrac{2{,}8-2{,}4}{2{,}8-2} = \dfrac{0{,}4}{0{,}8} = 0{,}5$

3) Soit A : « la pièce est acceptée » et B : « la pièce a une épaisseur supérieure à 2,2 cm ».

La probabilité demandée est $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

On a A B = A donc $P(A/B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$.

On a $P(B) = \dfrac{2,8 - 2,2}{2,8 - 2} = 0,75$ d'où $P(A/B) = \dfrac{0,5}{0,75} = \dfrac{2}{3}$.

Exemple 2

Le temps, en minutes, que passe un médecin pour consulter un patient est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

a) Quelle est la proportion de patients qui passent plus de 15 minutes avec le médecin ?

b) Quelle est la probabilité qu'un patient passe entre 5 mn et 10 mn pour une auscultation ?

Solution

a) La probabilité demandée est : $P(X \geq 15) = e^{-0,1.15} = e^{-1,5} \approx 0,22$.

Il y'a 22% de patients qui passent plus de 15 minutes avec le médecin.

b) La probabilité demandée est : $P(5 \leq X \leq 10) = e^{-0,1.5} - e^{-0,1.10} = e^{-0,5} - e^{-1} \approx 0,23$

Applications

1 Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à une station.
Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station.
On suppose que X suit la loi uniforme sur [0 ; 6].

a) Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

b) Donner l'expression de la fonction de répartition F de X et la représenter graphiquement.

2 On suppose que la durée de vie X d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre 0,05.

a) Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie ; 20 ans de durée de vie

b) On sait qu'une voiture est agée de 10 ans.
Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 15 ans de durée de vie ?

c) Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse cinq ans.

d) Donner l'expression de la fonction de répartition F de X et la représenter graphiquement.

3 Le temps X (en minutes) mis pour trouver la cause d'une erreur dans un programme d'ordinateur suit la loi exponentielle dont la densité est définie par $f(x) = 0,02\, e^{-0,02\,x}$.

a) Représenter graphiquement la fonction f.

b) Calculer la probabilité pour que la durée de la recherche d'erreur dépasse 1h.

c) Calculer la probabilité pour que la durée soit inférieure à un quart d'heure.

Situation 1

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une par une au hasard et avec remise les boules de l'urne jusqu'à ce que l'on tombe pour la première fois sur un numéro obtenu auparavant.

1) On suppose n = 3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui donne le nombre de tirages effectués.

2) On suppose n quelconque

a) Déterminer $p(X > 2)$, $p(X>3)$.

b) Montrer que pour tout k appartenant à $\{2, 3, 4, \ldots, n\}$ on a : $p(X > k) = \dfrac{A_n^k}{n^{k+1}}$

En déduire la loi de probabilité de X.

Situation 2

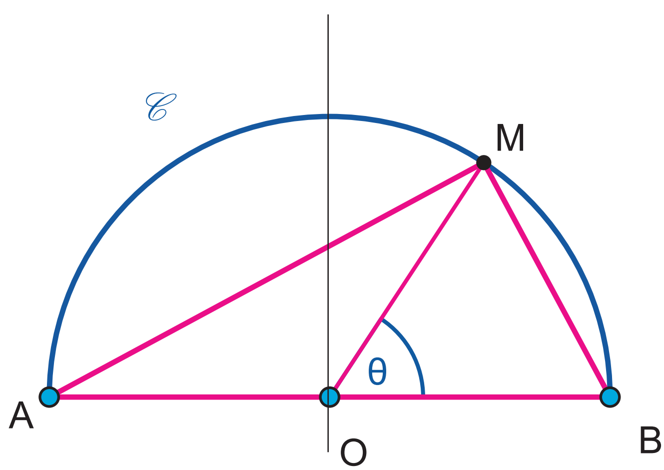
La figure ci-contre représente un demi-cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
Un point *M* pris au hasard sur $\mathscr{C}$. Soit θ l'angle $\widehat{BOM}$. On suppose que le choix du point M sur le demi cercle $\mathscr{C}$ suit une loi uniforme.

a) Montrer que θ suit une loi uniforme.

b) Calculer l'aire A du triangle ABM.

c) Montrer que : $A \geq 0{,}5$ équivaut à : $\theta \in [\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}]$.

En déduire la probabilité pour avoir $A \geq 0{,}5$.



Ce programme calcule la probabilité d'une loi uniforme ou d'une loi exponentielle entre a et b

```
program LoiContinues;
uses wincrt ;
var choix:integer;a,b,lambda:real;
  procedure affiche(Proba:real);
      begin
  clrscr;
  if choix=2 then
  begin
      writeln('                                 Loi exponentielle      ');
          writeln('lambda = ',lambda);
     end
     else
     begin
       writeln('                                 Loi uniforme     ');
       end;
       writeln('a = ',a:0:4,' et  b = ',b:0:4);
      writeln('p[a,b] = ',Proba:0:15);
           end;
   procedure LoiUniforme;
   var p:real;
  begin
  clrscr;
      writeln('                                 Loi uniforme     ');
  Writeln('Donner a et b');
      repeat
   readln(a);readln(b);
   until (a<b);
   p:=1/(b-a);
   affiche(p);
   end;
    procedure LoiExronontielle;
   var p:real;
  begin
  clrscr;
  writeln('                                 Loi exponentielle      ');
  Writeln('Donner a et b');
   repeat
   readln(a);readln(b);
    until (a<b);
  Writeln('Donner Lambda ');   readln(lambda);
```

```
        p:=exp(-lambda*a)-exp(-lambda*b);
    affiche(p);
  end;
 procedure Saisie;
 begin
 Writeln('donner un nombre (1 ou bien 2)   1: loi uniforme 2 : Loi exponentielle');
   repeat
 readln(choix);
 until (choix=1) or (choix=2);
 if choix=1 then  LoiUniforme
   else LoiExronontielle;
  end;
begin       {Programme principal }
saisie;
end.
```

1 Une urne contient 10 boules : cinq blanches numérotées 1,1,2 ,3 trois noires numérotées 1 ,1 ,2 et deux rouges numérotées 1 ,3.

1) On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne . Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Avoir une somme égale à 5 »

B : « Avoir 2 boules blanches et une boule noire »

2) On tire au hasard et successivement et sans remise 3 boules de l'urne

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

C :« Avoir une seule boule rouge »

D :« Avoir dans l'ordre 1, 2 ,3 »

3) On tire au hasard et successivement et avec remise 3 boules de l'urne .Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E :«Avoir au moins une boule rouge »

F :« Avoir trois boules de couleurs différentes »

2 Un dé truqué a les faces numérotées de 1 à 6. On désigne par p_i la probabilité d'une face n°i et on donne $p_1 = p_3 = p_5 = \alpha$ et $p_2 = p_4 = p_6 = 2\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$.

1) Calculer α. (On rappelle que $\sum_{\omega \in \Omega} p(\{\omega\}) = 1$)

2) Quelle est la probabilité d'une face portant un numéro pair ?

3 Une certaine équipe de football possède une probabilité de 0,6 de remporter une victoire (V),une probabilié de 0,3 de subir une défaite (D) ,et une probabilité de 0,1 de faire match nul (N).l'équipe joue trois matches .

1) Faire un arbre de choix .

2) Déterminer les élèments de l'évènement A tel que l'équipe gagne au moins deux fois et ne perde pas, et calculer P(A)

3) Déterminer les élèments de l'évènement B tel que l'équipe gagne et fasse un match nul,et calculer P(B)

4 1) Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 12 des 24 leçons. On a mis 24 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons indépendantes. Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers. On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

Quelle est la probabilité

a) qu'il ne connaisse aucun de ces sujets?

b) qu'il connaisse les deux sujets ?

c) qu'il connaisse un et un seul de ces sujets?

d) qu'il connaisse au moins un de ces sujets?

2) On considère maintenant que l'élève a étudié n des 24 leçons (n étant un entier naturel inférieur ou égal à 24).

a) Quelle est la probabilité P_n qu'il connaisse au moins un de ces sujets?

b) Déterminez les entiers n tels P_n soit supérieur ou égal à 0,95.

5 Dans un groupe de 60 personnes, le quart porte des lunettes et 40% sont fumeurs. De plus, 5 personnes sont fumeurs et portent des lunettes. Faire un arbre de probabilité correspondant à la situation avec L : « portent des lunettes» et F : « est fumeur».

6 On lance un dé régulier à six faces.

Calculer la probabilité que le résultat soit :

a) pair et strictement supérieur à 4 ;

b) pair sachant qu'il est strictement supérieur à 4 ;

c) strictement supérieur à 4 sachant qu'il est pair.

7 Une urne contient quatre jetons blancs portant les numéros 1, 1, 2, 2 et cinq jetons noirs portant les numéros 1, 1, 2, 2, 2.
On tire au hasard et simultanément deux jetons de l'urne.
Soit A l'évènement « On obtient deux jetons noirs » et B l'évènement « On obtient deux jetons portant le numéro 1 ».
Déterminer $p(A/B)$, $p(\overline{A}/B)$ et $p(A/\overline{B})$,.

8 Le directeur d'une fabrique de microprocesseurs constate que 4% de la production journalière est défectueuse. Un responsable qualité propose une vérification systématique des microprocesseurs. Cette vérification n'est pas parfaite, elle ne détecte que 95% des microprocesseurs défectueux et déclare défectueux 2% des microprocesseurs qui ne présentent pourtant aucun défaut.
On prend au hasard l'un des microprocesseurs dans une production journalière. On appelle :
- M l'évènement : «le microprocesseur est défectueux» ;
- R l'évènement : « le microprocesseur est rejeté après vérification ».

1) Préciser les probabilités : $p(M)$, $p(R/M)$, $p(R/\overline{M})$.
2) Calculer la probabilité de l'évènement (M et R) ainsi que celle de l'évènement ($\overline{M}$ et R).
3) Calculer la probabilité que le microprocesseur soit défectueux et déclaré bon par la vérification.
4) Calculer la probabilité que le microprocesseur soit bon sachant que la vérification va le déclarer «à rejeter».

9 Dans un campus universitaire, à l'issue d'une compétition, 1250 athlètes subissent un test antidopage. Le test n'est pas sur à 100%, certains athlètes peuvent être dopés et avoir cependant un test négatif. De même, des athlètes sains peuvent avoir un test positif.
Le tableau ci-dessous donne la répartition des 1250 athlètes en fonction du test et de l'état réel de l'athlète :

	Test négatif	Test positif
Athlète sain	1188	12
Athlète dopé	1	49

1) On choisit au hasard un athlète.
Déterminer la probabilité des évènements suivants : S : «L'athlète est sain» et T : «Le test est positif»
2) On choisit au hasard un athlète sain
Quelle est la probabilité qu'il ait un test positif ?
3) A l'aide des informations données dans le tableau, faire un arbre de probabilité.

10 Une personne choisie au hasard parmi la population d'une région passe un test pour dépister une maladie.
Dans cette région, on a établi par sondage dans les hopitaux que :
- Si une personne a la maladie, alors le test est positif dans 96% des cas,
- Si une personne n'a pas la maladie, alors le test est négatif dans 94% des cas.
- Une personne sur 65 est atteinte de cette maladie.

a) Faire un arbre de probabilité correspondant à cette situation.
b) Le résultat du test est positif, quelle est la probabilité que cette personne soit atteinte de cette maladie ?

11 Soient deux évènements A et B vérifiant

$p(A) = \frac{3}{5}$, $p(B) = \frac{7}{10}$ et $p(A \cup B) = \frac{9}{10}$.

1) Calculer $p(\overline{A})$.
2) Calculer $p(A \cap B)$. A et B sont-ils indépendants ?
3) Calculer $p(A/B)$, $p(\overline{A}/B)$ et $p(B/\overline{A})$.

12 Dans une région, 45% de la population active sont des hommes. On sait aussi que 5% des femmes et 4% des hommes de cette population active sont au chômage.On interroge au hasard une personne de cette région.
Notons F l'évènement : « être une femme » et C l'évènement : « être en chômage ».
1) Calculer p(F), $p(\overline{F})$, p(C/F) et $p(C/\overline{F})$.
2) Calculer la probabilité pour qu'un individu de cette population active interrogé soit au chômage.
3) Sachant que la personne choisie est au chômage, quelle est la probabilité pour que ce soit :
a) Une femme?
b) Un homme?

13 Une urne contient 8 boules blanches et 4 noires
1) On tire 3 boules simultanément. Quelle est la probabilité pour qu'elle soient toutes de même couleur ?
2) On en tire 3 boules successivement, en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne et on considère l'aléa numérique X égal au nombre de boule noires tirées.
a) Etablir le tableau de loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique E(X),la variance V(X) et l'écart type $\sigma(X)$.

14 On lance deux dés réguliers et on relève la somme X des points marqués.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) On vous propose le jeu suivant : On mise 10 D, puis on lance les dés. Si $X > 9$, on gagne 50D, sinon on perd la mise.
Le jeu est-il équitable ? Sinon, est-il favorable ou défavorable ?

15 Un questionnaire à choix multiples consiste à répondre successivement à quatre questions indépendantes.
Pour chaque question trois réponses sont proposées, dont une seule est correcte.
Un candidat répond au hasard à chaque question.
1) On appelle X le nombre de bonnes réponses. Etudier X (loi de probabilité, espérance, écart-type).
2) On appelle Z le score du candidat. Sachant que chaque bonne réponse rapporte deux points et chaque mauvaise réponse enlève un point, étudier Z.

16 La probabilité pour qu'une personne ait une mauvaise réaction à un vaccin est de 0,01.
1) Tous les membres d'une famille de cinq personnes ayant été vaccinés, quelle est la probabilité qu'il y ait une mauvaise réaction :
a) chez 2 membres de la famille
b) chez moins de 2 membres de la famille.
2) Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de mauvaises réactions au vaccin dans une famille de 7 personnes.
a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Déterminer E(X) et V(X).

17 Un appareil de jeu contient 6 boules blanches et 3 boules rouges. Quand un joueur introduit un jeton dans l'appareil, 3 boules prises au hasard tombent.
Si les 3 boules sont rouges, le joueur gagne 100 D. Si 2 des 3 boules sont rouges,

le joueur gagne 15 D. Si une seule des 3 boules est rouge, le joueur gagne un lot de 5 D. Le forain qui utilise l'appareil fixe le prix du jeton à 8 D.

1) Soit X la variable aléatoire désignant la somme gagnée par le joueur.

a) Déterminer la loi de X.

b) Calculer son espérance.

c) En déduire le gain moyen du forain.

2) L'appareil n'est pas assez rentable. Aussi, le forain envisage 2 solutions : vendre le jeton 9 D ou bien rajouter une boule blanche. Quelle est la solution la plus rentable pour lui ?

18 Une boite contient trois boules blanches numérotées **1, 1, 2** et deux boules rouges numérotées **2, 2** indiscernables au toucher.

1) Une épreuve consiste a tirer au hasard, successivement et sans remise deux boules de la boite. On désigne par X l'aléa numérique égal au produit des deux numéros obtenus. Déterminer la loi de probabilité de X.

On pose S = (X=2). Vérifier que P(S)=$\frac{3}{5}$

2) On répète l'épreuve précédente 4 fois de suite en remettant les deux boules tirées dans la boite. On désigne par Y l'aléa numérique égal au nombre de fois ou S est réalisé.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Calculer E(Y) et V(Y).

19 Tous les élèves d'un lycée ont un temps de trajet domicile lycée au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur [0; 1]. On interroge au hasard un élève de ce lycée.

Quelle est la probabilité pour que l'élève interrogé ait une durée de trajet comprise entre 15 min et 20min ?

20 Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à une station bien déterminée. Soit T le temps d'attente d'une personne à cette station.

On suppose que T peut prendre n'importe quelle valeur de l'intervalle [0, 6].

1) Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

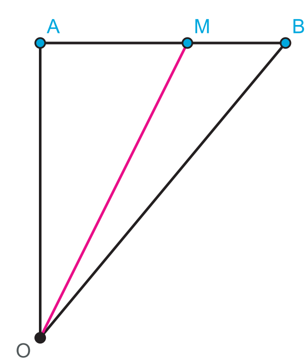
2) Quelle est la probabilité que cette personne attende plus que 5 minutes ?

21 Soit OAB un triangle rectangle isocèle de côté 1 (voir fig. ci-dessous). Un point M étant pris au hasard sur [AB] (c'est-à-dire selon la loi uniforme sur [0, 1]), on considère la variable aléatoire OM.

a) Montrer que $1 \leq OM \leq \sqrt{2}$.

b) Calculer la probabilité que OM ≤ a

(a est un réel donné dans $\left[1, \sqrt{2}\right]$).



22 Le temps de réponse (en secondes) à un terminal relié à un ordinateur suit une loi exponentielle de paramètre 0,3.

1) Quelle est la probabilité que le terminal attende entre 3 et 8 secondes ?

2) Quelle est la probabilité que le terminal attende plus que 8 secondes ?

23 Soit D une droite graduée. On choisit au hasard un point *M* du segment [*AB*] avec A d'abscisse 2 et B d'abscisse 4. On note *x* d'abscisse du point M.

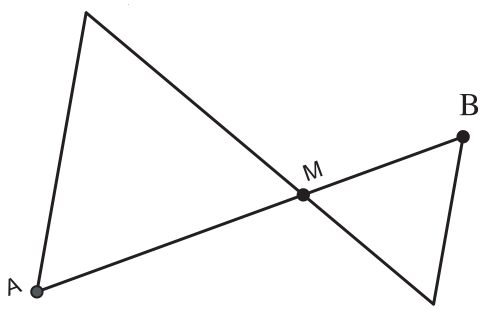
1) Quelle est la probabilité que x [$\in 2$, 3]?

2) Quelle est la probabilité que M soit le milieu du segment [AB] ?

24 Un point M étant choisi au hasard sur le segment [AB] de longueur 4 cm, on construit un triangle équilatéral au-dessus de [AB] et un autre au-dessous de [AB] comme indiqué dans la figure ci-dessous :

1) Quelle est la probabilité pour que les deux triangles aient la même aire ?

2) Quelle est la probabilité pour que la somme des deux aires soient supérieure où égale à 4 $\sqrt{3}$?



25 On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, est la variablealéatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1/10. Vous arrivez à une cabine téléphonique et juste à ce moment précis, une personne passe devant vous pour téléphoner.

a) Quelle est la probabilité que vous attendiez plus de 10 mn ?

b) Quelle est la probabilité que vous attendiez entre de 10 mn et 20 mn ?

26 Le temps , en minutes, d'attente à un guichet est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On sait de plus que la valeur moyenne d'attente à ce guichet est de 8 minutes.

1) On admet que l'attente moyenne à un guichet est la limite quand A tend vers $+\infty$ de :

$$\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

Montrer que: $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \dfrac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$

En déduire que $\lambda = 0{,}125$.

2) Quelle est la probabilité pour que le temps d'attente à ce guichet soit inférieur ou égal à 5 minutes ?

3) Quelle est la probabilité pour que le temps d'attente appartienne à l'intervalle $\left[10;20\right[$?

4) Sachant qu'un client a déjà attendu 15 minutes, quelle est la probabilité pour qu'il attende moins de 45 minutes au total ?

27 **1)** La durée de vie, en années, d'un certain type de lampe est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1/5) Calculer P([0,4]), P([4,6]), P([3, $+\infty$[).

2) Exprimer en fonction de x, la fonction de survie S définie par S(x) = P(X > x).

3) Sachant que la vie moyenne d'un tel type de lampe est égale à 5 ans, calculer la probabilité de survie au-delà de la vie moyenne.

4) Sachant que la lampe est âgée de 10 ans, calculer la probabilié que la lampe dure 5 années supplémentaires au moins.

Les premiers écrits sur les probabilités sont l'oeuvre de Jérôme Cardan (1501-1576), qu'un de ses biographes a surnommé « le joueur savant ». Un problème qui intéressait Cardan était le suivant : comment doit-on répartir les mises d'un jeu de dés si le jeu venait à être interrompu ? La même question fut posée en 1654 à Blaise Pascal par son ami le Chevalier de Méré, qui était un joueur impénitent. Un joueur parie qu'il tirera un as en huit coups de dés, mais la police interrompt le jeu après le troisième coup. Les assistants protestent, mais comment doit-on répartir les mises ? Cette question fut à l'origine d'une correspondance entre Pascal et Fermat, et leurs réflexions furent publiées en 1657 dans Tractatus de ratiociniis in aleae ludo (Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés). L'auteur est le néerlandais Christian Huygens, plus connu pour ses travaux en astronomie et en physique. C'est donc à partir de problèmes posés par les jeux de hasard que se définirent les concepts et les premières approches de cette nouvelle branche des mathématiques.
On avait observé que, lorsque l'on répétait de nombreuses fois la même expérience, les fréquences tendaient à se stabiliser. On savait de plus que ces fréquences se stabilisaient autour des probabilités, lorsque celles-ci étaient connues. Ainsi, dans le cas d'un dé, au bout d'un grand nombre de tirages, chaque face était obtenue environ une fois sur six. Cette observation empirique pouvait-elle recevoir un fondement théorique ?
Le premier à se poser la question est le balois Jacques Bernoulli, fils de Nicolas Bernoulli, premier membre d'une longue dynastie de mathématiciens, dont les plus célèbres sont Jacques, Jean (son frère) et Daniel (le fils de Jean). Jacques Bernoulli a écrit Ars Conjectandi, qui ne sera publié qu'après sa mort en 1713 par son neveu Daniel. Au $19^{\text{ème}}$ siècle, la croissance rapide des sciences rendit nécessaire l'extension de la théorie des probabilités au delà des jeux de hasard. Elle devint très utilisée en économie et dans le domaine des assurances.
Pour faire de la théorie des probabilités une discipline à part entière, il ne manquait finalement plus qu'une chose : une définition précise de son objet, la probabilité.
C'est Laplace qui s'en charge dans son ouvrage Théorie analytique des probabilités, paru en 1812 :
« La probabilité est une fraction dont le numérateur est le nombre de cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles. »
D'autres noms importants dans le domaine des probabilités sont Abraham de Moivre (1667-1754), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Denis Poisson (1781-1840), Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894), Andrei Andreeivich Markov (1856-1922) et Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987).