REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

Mathématiques

$4^{ième}$ année de l'enseignement secondaire

Economie et gestion

Auteurs

Houcine SBIKA
Inspecteur principal

Abdelaziz CHENINI
Inspecteur

M^{ed} Nejib DALHOUMI
Professeur

Nabil BEN ALI
Professeur

Evaluateurs

Noureddine AFFI
Inspecteur principal

Othmane FERJANI
Inspecteur

Centre National Pédagogique

Préface

Le présent ouvrage est conçu conformément aux nouveaux programmes. Il s'adresse aux élèves de la quatrième année économie et gestion.
Les chapitres de ce manuel, dans leur presque totalité, comportent les rubriques suivantes :

- ***Pour commencer***
  Dans cette rubrique sont proposées soit, des activités de diagnostique des aptitudes et connaissances minimales, soit des activités d'introduction ...

- ***Le cours***
  Cette rubrique comporte éventuellement :
  - Une partie intitulée « Revoir » dans laquelle sont proposées des activités dans l'intention de faire le point sur les connaissances antérieures indispensables à l'élève.
  *- Une deuxième partie qui contient un cours organisé de façon progressive et qui comporte des activités de **découverte** de la notion à étudier, des définitions, les résultats utiles et des activités d'application pour contrôler le degré d'acquisition des nouveaux concepts.*

- ***Avec l'ordinateur***
  Dans cette rubrique on invite l'élève à profiter de l'outil informatique pour utiliser, contrôler ou conjecturer certains résultats et ce à travers des activités traitées et illustrées par étapes pourvu qu'elles répondent au besoin des utilisateurs les plus débutants .

- ***Exercices et problèmes.***
  Cette rubrique présente :
  - De nombreux exercices simples qui permettent à l'élève de s'auto évaluer, de consolider ses connaissances et de maîtriser de nouvelles techniques.
  - Des exercices et des problèmes qui permettent à l'élève de résoudre des problèmes dans des situations variées.

- ***Math culture***
  Cette rubrique comporte un aperçu historique sur une notion mathématique ou sur un savant, un texte ou un document tiré d'un ouvrage mathématique...

C'est avec reconnaissance et plaisir que nous accueillerons les remarques, critiques et suggestions que les utilisateurs voudront bien nous envoyer.

Les auteurs

Chapitre 1

LIMITES ET CONTINUITE

Pour commencer
Limites

- Revoir
- Limites et ordre
- Limite d'une fonction composée

Continuité

- Revoir
- Continuité d'une fonction composée
- Théorème des valeurs intermédiaire
- Théorème de la bijection

Avec l'ordinateur
Exercices et problèmes
Math culture

Pour commencer

Activité 1

Pour chacune des limites ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de cocher cette réponse.

QUESTIONS	REPONSES	QUESTIONS	REPONSES
1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$	6) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 0
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 0	7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ $\frac{3}{2}$
3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$	8) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^5}{x^3} =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ $\frac{5}{3}$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} =$	☐ $+\infty$ ☐ 0 ☐ 1	9) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-x} =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$
5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} =$	☐ $+\infty$ ☐ 0	10) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} =$	☐ 0 ☐ $+\infty$

Activité 2

On considère la fonction f définie par: $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2}$

a) Vérifier que : $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$.

b) Déduire $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Activité 3

Soient g,h et k les fonctions définies par:

$g(x) = 2x - \frac{1}{x}$; $h(x) = 2x - |x|$ et $k(x) = \frac{2x - x^3}{\sqrt{2} - x}$.

Calculer:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} k(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} k(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x)$; $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} k(x)$

Activité 4

Le coût moyen C_M de fabrication en dinars de *x* centaines d'objets est modélisé par la fonction :

$$C_M(x) = 5x + 31 + \frac{1500x + 100}{x^2} \quad \text{pour } x > 0.$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- Déterminer la limite de C_M à droite en 0 et donner une interprétation économique de cette limite.

2- a- Déterminer la limite de C_M en $+\infty$. Interpréter économiquement le résultat.

b- Montrer que pour des valeurs de x assez grandes (x tend vers $+\infty$), la différence $C_M(x)-(5x+31)$ prend des valeurs très proche de zéro (tend vers 0).

c- Donner une estimation du coût moyen de fabrication de 100000 objets.

Activité 5

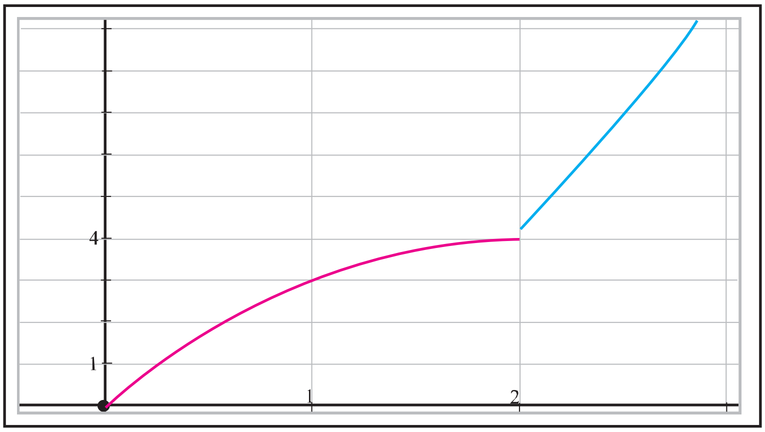
Une petite entreprise qui fabrique des jouets pour enfants estime que le coût total en milliers de dinars, de production de x milliers d'objets s'exprime en fonction de x, par :

$C(x) = -x^2 + 4x$ si $x \le 2000$ et $C(x) = x^2 + x - 1.8$ si $x > 2000$

La courbe de la fonction coût total C est donnée par le graphique ci- dessous (l'unité des abscisses étant 1000 jouets).

1- Calculer les limites de C(x) à droite et à gauche en 2000. Interpréter le résultat

2- L'entreprise veut fabriquer 3000 jouets, est-il plus rentable de les fabriquer en un lot de 3000 ou bien en deux lots de 1500.

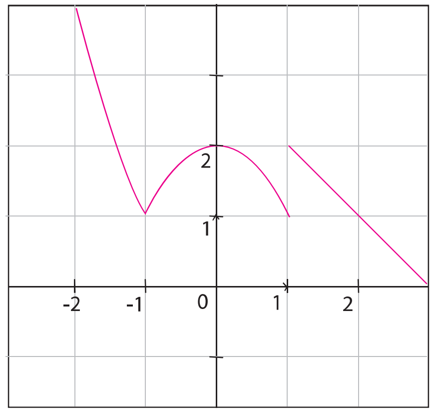


Cours

LIMITES

I- Revoir:

Activité 1



On considère la fonction f dont la représentation est donnée par la figure ci-contre.

1) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

2) La fonction f admet-elle une limite au point 1 ?

3) f admet-elle une limite au point -1 ?

Théorème(admis)

Soit I un intervalle ouvert contenant x_0 et f une fonction définie sur I, sauf peut être en x_0.

On a $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell\right)$ si et seulement si $\left(\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell \text{ et } \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell\right)$

(ℓ est fini ou infini)

Activité 2

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\in \left]-\infty,1\right[\\ -x+3 & \text{si } x\in \left[1,+\infty\right[\end{cases}$

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Opérations sur les limites:

Les tableaux suivants donnent les règles de calcul de la limite d'une somme, d'un produit et du quotient de deux fonctions.

a) <u>Somme</u>:

Limite de f	Limite de g	Limite de f+g
L	L'	L+L'
L	$+\infty$	$+\infty$
L	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Pas de conclusion

b) **Produit** :

Limite de f	Limite de g	Limite de $f\times g$
L	L'	$L\times L'$
$L\neq 0$	∞	(règle des signes) ∞
∞	∞	(règle des signes) ∞
0	∞	Pas de conclusion

c) **Quotient**:

Limite de f	Limite de g	Limite de f/g
L	L'	L/L'
L	∞	0
∞	L'	(règle des signes) ∞
∞	∞	Pas de conclusion
$L\neq 0$	0	(règle des signes) ∞
∞	0	(règle des signes) ∞
0	0	Pas de conclusion

Activité 3

1- Soit la fonction $f: x \mapsto (x-2)-\dfrac{1}{x}$

Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sqrt{x}-x}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x(1-\dfrac{1}{x^2})\right)$

Activité 4

Calculer les limites suivantes:

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x(|x|-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2x+7+\dfrac{x^4+7x^3-31}{(2x-11)^3}\right)$

$\lim\limits_{x\to 1}\left((x-1)^3-\dfrac{2x}{x^3-5x+7}\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\left((x-1)^3-\dfrac{2x}{x^3-5x+7}\right)$

Activité 5

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-2x^3+5x^2-1)$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^3-x^2+1)^3$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-x^2+x-1}{4x^4-3x+6}$; d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-27}{x^2-5x+6}$;

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[3x-\dfrac{2x^2+1}{x-1}\right]$; f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x-1+\frac{1}{x}}{x^2+x-2}\right)$.

-La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à celle de son terme de plus haut degré.
-La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à celle du quotient des termes de plus haut degré.

II- Limites et ordre :

Activité 1

1) Peut-on calculer la limite en $+\infty$ de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$?

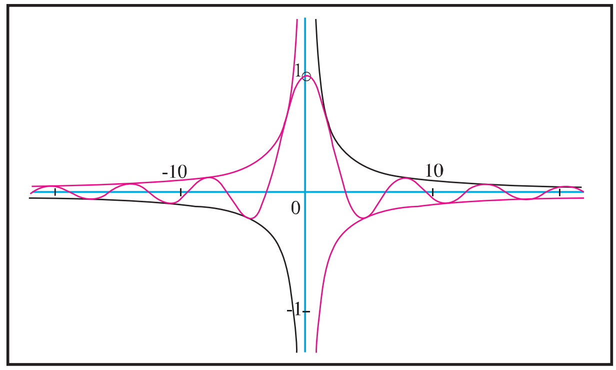
2) Soient f et g les fonctions définies par: $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$.

Les courbes ci- contre sont celles des fonctions f, g et h.

a- Associer chacune des fonctions à sa représentation graphique.

b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x}$

c- Que peut-on conjecturer pour la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$



Théorèmes (admis)

Soit x_0 un réel et I un intervalle ouvert contenant x_0 .

f, g et h trois fonctions définies sur l'intervalle I sauf peut être en x_0.

1) Si pour tout $x \in I$ et $x \neq x_0$ on a $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$

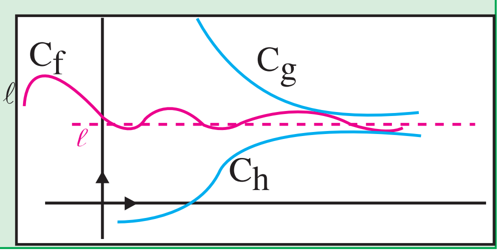
Alors $\ell \leq \ell'$.

2) Si pour tout $x \in I$ et $x \neq x_0$ on a :

$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$

Alors

f admet une limite en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.



Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 - \dfrac{\cos x}{|x|}$.

1) Montrer que pour tout réel $x \neq 0$ on a : $2 - \dfrac{1}{|x|} \leq f(x) \leq 2 + \dfrac{1}{|x|}$.

2) Calculer: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{1}{|x|}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \dfrac{1}{|x|}\right)$.

3) Déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -x + \sin x$.

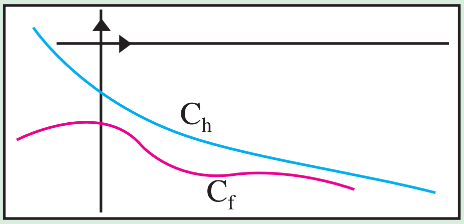
1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \leq -x + 1$.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x+1)$.

3) En supposant que f admet une limite en $+\infty$, prévoir la valeur de cette limite?

Théorème (admis)

Soit x_0 un réel et I un intervalle ouvert contenant x_0.
f et h deux fonctions définies sur l'intervalle I sauf peut être en x_0.
Si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leq h(x)$
et si $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = -\infty$ Alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

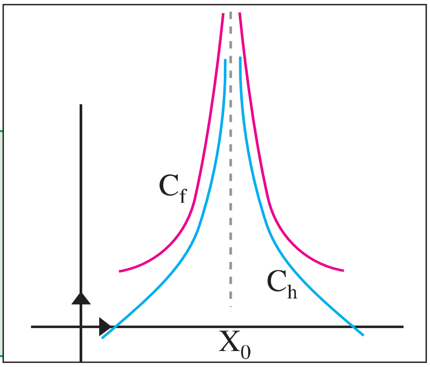


Activité 4

Démontrer le théorème suivant :

Théorème

Soit x_0 un réel et I un intervalle ouvert contenant x_0.
f et h deux fonctions définies sur l'intervalle I sauf peut être en x_0.
Si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq h(x)$
et si $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = +\infty$ Alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



Remarque

Les théorèmes précédents restent valables lorsqu x_0, ℓ et ℓ' sont finis ou infinis.

Activité 5

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse en donnant une brève justification.

1) Si une fonction f vérifie : pour tout x strictement positif, $3 \leq f(x) \leq 3 + \dfrac{5}{x+2}$

alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

2) Si une fonction f vérifie :pour tout x de $[5 ; +\infty[$, $f(x) \leq \dfrac{9}{x}$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3) Si une fonction g vérifie : pour tout x non nul, $-\dfrac{3}{x^2} \leq g(x) - 7 \leq \dfrac{3}{x^2}$

alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 7$.

Activité 6

Soit f la fonction définie sur IR_+^* par $f : x \mapsto 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

1) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $-\frac{1}{\sqrt{x}} \leq f(x) - 1 \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 1]$.

3) Calculer: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)$

III- Limite d'une fonction composée :

Activité 1

On considère les fonctions f et g définies respectivement sur $IR \setminus \{1\}$ et $IR \setminus \{-1\}$ par

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ et $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

1- Vérifier que pour tout $x \in IR^* \setminus \{1\}$ $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$.

2- a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (g \circ f)(x)$.

b- Comparer $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (g \circ f)(x)$.

3-a- Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} (g \circ f)(x)$.

b- Comparer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} (g \circ f)(x)$.

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$

La fonction notée $g \circ f$ définie sur I par : $g \circ f(x) = g[f(x)]$ est une fonction composée des deux fonctions g et f.

Remarque qu'en général on a:
$g \circ f \neq f \circ g$

Théorème (admis)

Soient f et g deux fonctions.

Si $\left(\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to b} g(x) = L\right)$ alors $\left(\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = L\right)$

(a,b et L sont finis ou non)

Activité 2

En appliquant le théorème précédent, calculer les limites suivantes :

a- $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x-1)^3$; b $-$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3+3}{9-x^2}\right)^2$; c $-$ $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\frac{2x-5}{x-2}\right)^3$.

Conséquence

Soient f une fonction définie sur intervalle ouvert I contenant x_0 et L un réel.

- Si f est positive sur I et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

Activité 3

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2x-1}{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to-3^+}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2-5}{x-2}}$

Activité 4

Soient f et g les fonctions définies respectivement sur IR et IR* par $f(x)=ax$ et $g(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ où a est un réel non nul .

Rappelons qu'on a: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

1- Donner l'expression de $g\circ f$ et prouver que:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{x}=a$$

2- En adoptant une démarche analogue, montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$.

Activité 5

Soient f, g, u, v et h les fonctions définies par:

$f:x\mapsto\dfrac{1-\cos x}{x}$, $g:x\mapsto\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, $u:x\mapsto 2x$, $v:x\mapsto\sqrt{x}$ et $h:x\mapsto x^2$

a) Vérifier que $\dfrac{1-\cos(x^2)}{x}=x.(f\circ h)(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x}$

b) Donner l'expression de $(g\circ u)(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos(\sqrt{x})}{x}=\dfrac{1}{2}$.

CONTINUITE

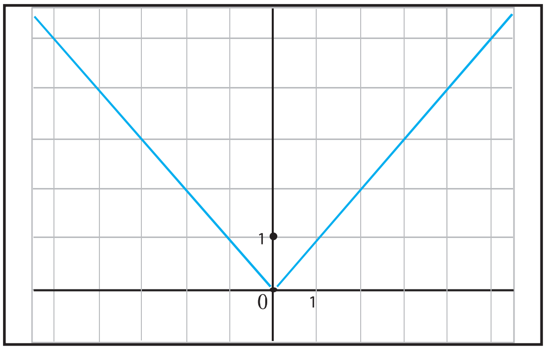
I- Revoir:

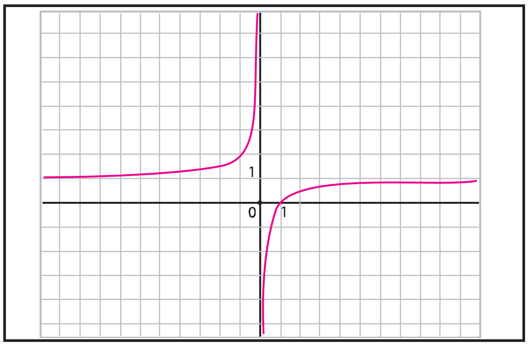
Activité 1

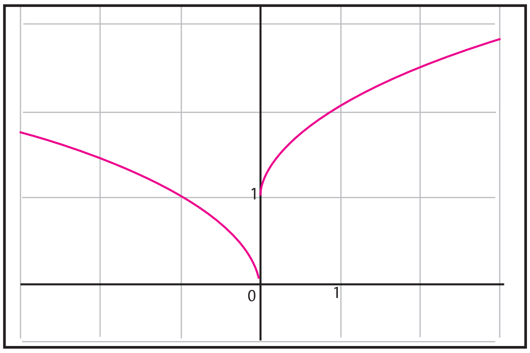
On considère les trois fonctions f, g, h et k dont les représentions graphiques sont données par les figures ci- dessous et qui sont définies par leurs expressions suivantes:

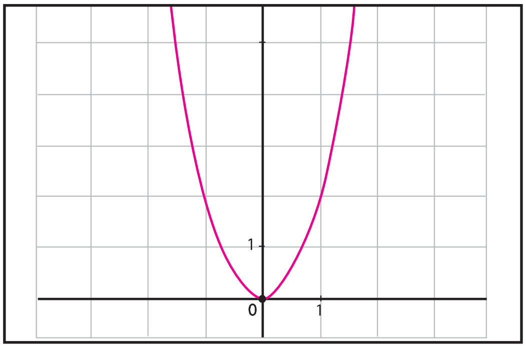
$f : x \mapsto |x^3 + x|$; $g : x \mapsto \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$; $h : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $k : x \mapsto \dfrac{x-1}{x}$

1- Associer à chaque fonction sa courbe.
2- Etudier la continuité éventuelle de chacune de ces fonctions au point 0.









Théorèmes

- f est continue en x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- f est continue à droite en x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- f est continue à gauche en x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- f est continue en x_0 **si et seulement si** f est continue à droite et à gauche x_0.

f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point de I. (pour les bornes de I appartenant à I on considère la continuité à droite ou bien à gauche en ces bornes)

Activité 2

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en x_0 :

a) $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ en $x_0 = 1$; b) $f(x) = |x| + 1$ en $x_0 = -1$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1}$ en $x_0 = -1$; d) $f(x) = (x-1)(1-\cos x)$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Opérations sur les fonctions continues :

Théorèmes

Soient f et g deux fonctions continues en x_0 et $\lambda \in$ IR .
Les fonctions λf , $|f|$, $f + g$ et $f g$ sont continues en x_0.
Si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en x_0.

Remarques

1 - L'application des opérations précédentes nous permet de justifier la continuité d'une grande gamme de fonctions en utilisant la continuité de fonctions simples.

2 - Du fait que la fonction $x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$ est continue sur IR on déduit que :

Toute fonction polynôme est continue sur IR.
Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle contenu dans son domaine de définition.

Activité 3

1) Soit f la fonction définie sur IR par $\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 3 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ f(x) = 1 - 2\sqrt{x} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$

a- Montrer que f est continue en 1.
b- En déduire que f est continue sur tout $\mathbb{R}$.

2) Soit g la fonction définie sur IR par $\begin{cases} g(x) = x^2 - 1 & \text{si } x \in]-\infty, 2] \\ g(x) = x + \alpha & \text{si } x \in]2, +\infty[\end{cases}$ $(\alpha \in \text{IR})$

a) Justifier que g est continue sur $]-\infty, 2]$ et $]2, +\infty[$?

b) Comment choisir α pour que g soit continue sur tout IR?

Activité 4

Reprendre les fonctions définies dans l'activité 2 ci-dessus.
1) Déterminer leurs ensembles de définitions.
2) En utilisant le théorème précédent, étudier la continuité de chacune d'elles sur chaque intervalle contenu dans son ensemble de définition.

II- Continuité d'une fonction composée :

Activité 1

Soient u et f les fonctions définies sur IR par: $u(x) = x^2 - \frac{\pi}{4}$ et $f(x) = \cos(u(x))$

a- Prouver que u est continue en 0 et que f est continue en u (0).
b- Déterminer la limite de f en 0 et en déduire que f est continue en 0.

Théorème (admis)

Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors la fonction gof est continue en x_0.

Conséquence 1

Si f est continue en x_0 et positive sur un intervalle contenant x_0 alors $\sqrt{f}$ est une fonction continue en x_0.

Activité 2

En appliquant le théorème précédent étudier la continuité de f au point x_0 dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$, $x_0 = \sqrt{5}$

2) $f : x \mapsto \sin(1 - \frac{1}{x})$, $x_0 = 1$

3) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$, $x_0 = 5$

Conséquence 2

Soient f et g deux fonctions:

$$\text{Si} \begin{pmatrix} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \\ \text{et} \\ \text{g est continue en a} \end{pmatrix} \text{alors} \begin{pmatrix} \text{la fonction } (g \circ f) \text{ admet une limite finie en } x_0 \\ \text{et cette limite est égale à g(a)} \end{pmatrix}$$

x_0 étant fini ou infini et a est un réel.

Activité 3

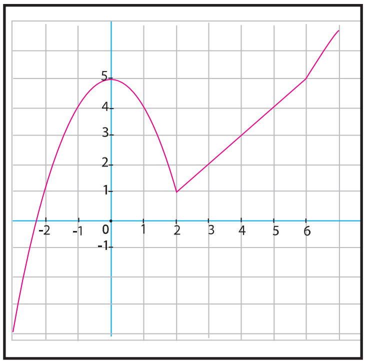
Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{2 - x^2}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1}$; c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{2x^3 + 1}{x^3 - 1}}$; d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 2}{6x}\right)$

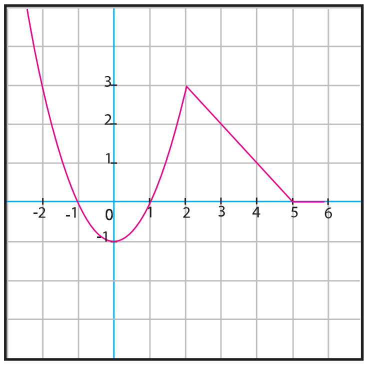
III- Théorème des valeurs intermédiaires :

Activité 1

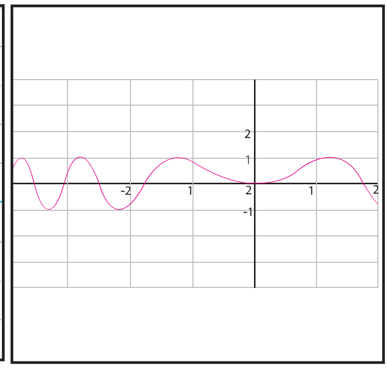
Déterminer à partir de chacun des graphiques suivants, l'image de l'intervalle I :



$I=[0,4]$



$I=]-1,6[$



$I=[-4,1[$

Activité 2

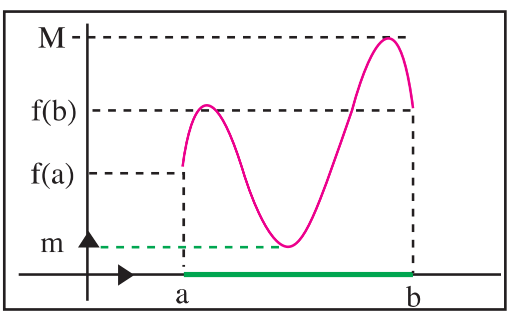
Soit la fonction $f:x \mapsto x^2-1$

a- Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

b- Déterminer graphiquement l'image de l'intervalle $[-1,1]$ par f

Théorèmes (admis)

* L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
* L'image d'un intervalle fermé [a,b] par une fonction continue est un intervalle fermé [m,M].



$f([a,b])=[m,M]$

m est la plus petite valeur de f sur $[a,b]$

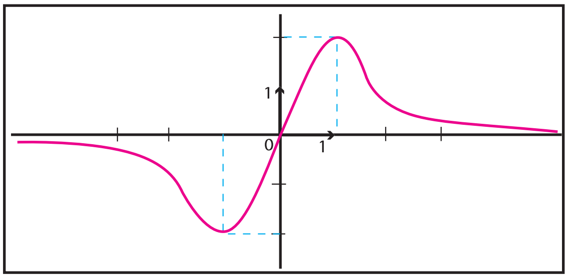
M est la plus grande valeur de f sur $[a,b]$

Activité 3

Soit f la fonction définie par $f(x)=3x^2-2$.
1- Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan .
2- Déterminer les images par f de chacun des intervalles suivants:
$[0,2]$, $[-1,3]$,$]-\infty,1]$, $[3,5[$, $]0,+\infty[$, $\mathbb{R}$.

Cas d'une fonction continue et strictement monotone:

Activité 3



Soit f la fonction représentée graphiquement par la courbe ci-contre.

1- Déterminer
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $f(-1)$; $f(1)$; et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- Déterminer le sens de variation de f sur chacun des intervalles
$]-\infty,-1]$, $[-1,1]$ et $[1,+\infty[$

3- Préciser les images des intervalles $]-\infty,-1]$, $[-1,1]$ et $[1,+\infty[$ par f et les comparer respectivement aux intervalles : $\left[f(-1), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$, $[f(-1),f(1)]$ et $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right]$

Ainsi si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I on a :

Intervalle I	L'image de l'intervalle I par f	
	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$

(a et b sont finis ou infinis).

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $[-2,5]$ par $f(x)=|1-2x|-|x+2|$.

1- Vérifier que $f(x)=\begin{cases} -3x-1 & \text{si } -2\le x\le \frac{1}{2} \\ x-3 & \text{si } \frac{1}{2}< x\le 5 \end{cases}$

2- Tracer la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

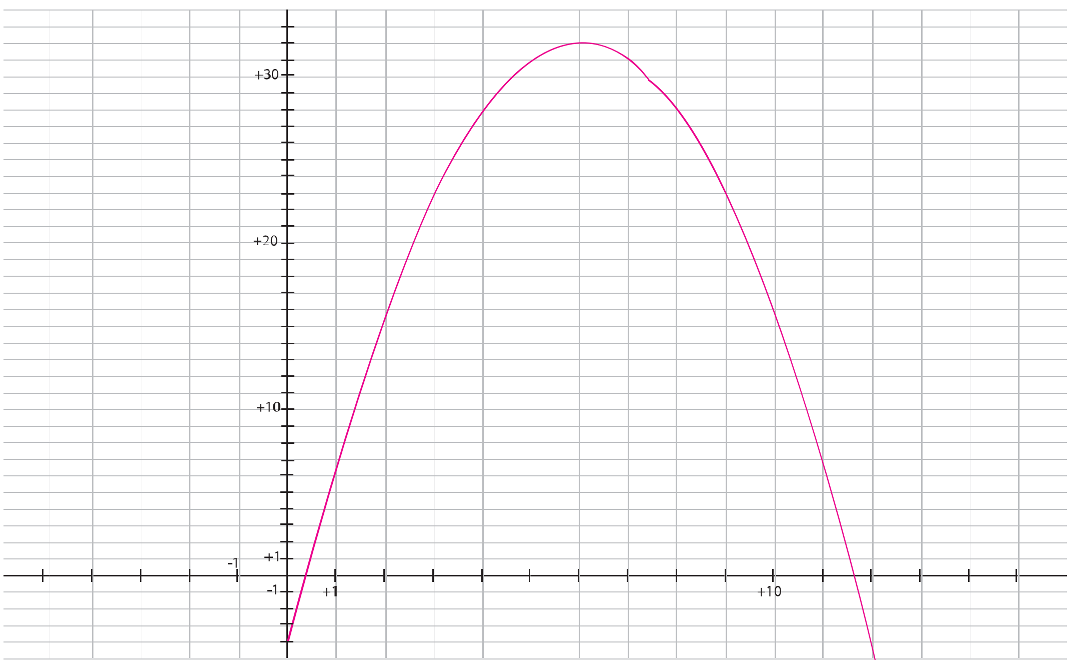
3- Dresser le tableau de variations de f.

4- Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=1$ dans l'intervalle $[-2,5]$.

5- Déterminer de même le nombre de solutions de l'équation $f(x)=3$ dans l'intervalle $[-2,5]$.

Activité 5

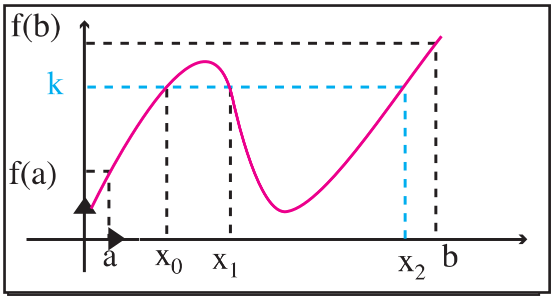
Une entreprise de fabrication de produits cosmétiques estime que le coût total de fabrication en milliers de dinars, de p lots de 1000 pièces est donné par la fonction $C(p) = p^2 + 3p + 4$
Le lot de 1000 pièces est vendu à un prix de 15000 dinars .
1- La courbe ci-dessous représente le bénéfice en milliers de dinars en fonction du nombre p de lots vendus. Déterminer graphiquement le nombre de pièces à fabriquer pour avoir un bénéfice maximal.
2- Déterminer une approximation du nombre minimal et du nombre maximal de pièces que l'entreprise doit fabriquer pour être rentable(avoir un bénéfice positif) .
3- Déterminer graphiquement le nombre de lots que l'entreprise doit fabriquer pour avoir un bénéfice égal à 23000 dinars.



Théorème (admis)

<u>Si</u> une fonction f est **continue** sur un **intervalle** fermé [a ; b] et <u>si</u> k est un réel quelconque compris entre f(a) et f(b) (ces deux valeurs comprises),
<u>alors</u> il **existe au moins** un réel x_0 dans [a ; b] tel que $f(x_0) = k$

Notons que f prend toutes les valeurs intermédiaires entre f(a) et f(b), c'est pour cela que ce théorème est connu sous le nom " ***Théorème des valeurs intermédiaires*** " .



Activité 6

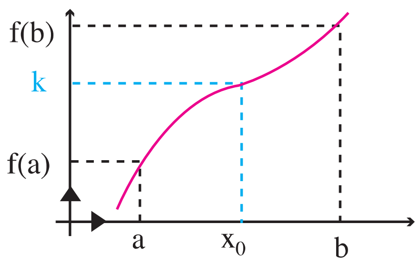
On considère l'équation : $x\sqrt{x}-x-1=0$ (E).

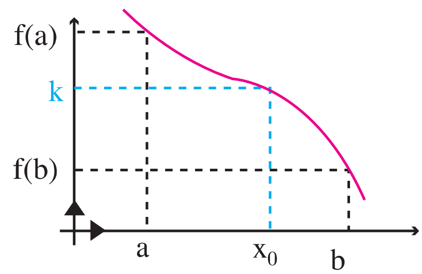
a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}-x-1$ est continue sur IR_+.

b) Montrer que (E) admet au moins une solution dans $[1,4]$.

Remarque

Si de plus f est **strictement monotone** sur l'intervalle [a , b], alors l'équation f(x) = k admet une solution unique dans [a , b].





Activité 7

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ -1.

1- Déterminer le domaine de définition de f.

2- Prouver que f est continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

3-Montrer que f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

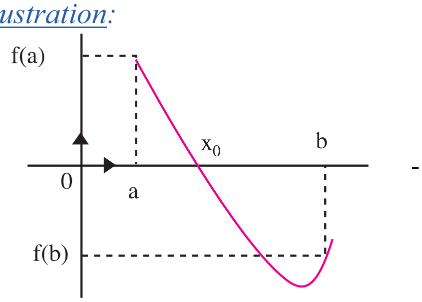
4- Calculer $f(2)$ et $f(3)$ puis montrer que l'équation f(x)= 1 admet dans $[1,+\infty[$ une solution unique c.

5- Calculer $f(1).f(2)$ et montrer que l'équation f(x)= 0 admet dans $]1,2[$ une solution unique c'. Calculer la valeur de c'.

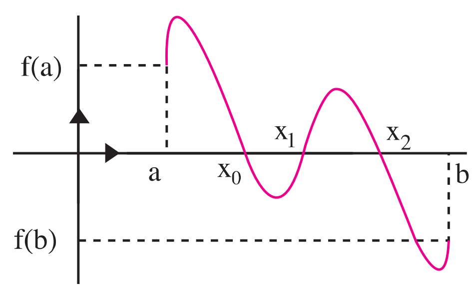
Corollaire

Si f est une fonction **continue** sur un **intervalle** fermé [a ; b] et Si f(a).f(b)< 0 **alors** l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans l'intervalle $]a,b[$.

Illustration:



Cas d'une solution unique



Cas de solutions multiples

Activité 8

Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 + x - 1$.

1- Justifier la continuité de f sur [0, 1] .

2- Montrer que l'équation : f(x) = 0 admet une solution unique α comprise entre 0 et 1.

3- Calculer $f(\frac{1}{2})$ et vérifier que : $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

4- Calculer $f(\frac{3}{4})$ et vérifier que : $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

5- Calculer $f(\frac{5}{8})$ et vérifier que : $\alpha \in \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right]$.

6- Calculer $f(\frac{11}{16})$ et en déduire un encadrement de α.

7- Calculer $f(0,682)$ et $f(0,683)$ et donner un encadrement de α à 10^{-3} près.

Résolution d'équations par dichotomie :

f étant une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$,on sait que si f(a).f(b)<0 alors l'équation f(x)= 0 possède une unique solution x_0 dans $[a, b]$.

Pour encadrer la valeur de x_0 on peut utiliser le ***principe de la dichotomie*** qui consiste à partager l'intervalle $[a, b]$ en deux intervalles de même amplitude : $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ et à reconnaître celui qui contient x_0, puis on recommence le même travail avec cet intervalle jusqu'à ce qu'on obtienne un encadrement satisfaisant de x_0.

Algorithme **:**

Soit x_0 la solution de l'équation $f(x) = 0$.

On veut trouver un encadrement de x_0 à 10^{-n} près $(n \in \mathbb{N}^*)$.

- Si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$, le problème est résolu.
- Si $f(a).f(b) < 0$, on détermine le réel $c = \frac{a+b}{2}$ milieu de $[a, b]$ et on calcule f(c)
  - Si $f(c) = 0$ alors $x_0 = c$ et le problème est résolu.
  - Si $f(c) \neq 0$, la solution x_0 est soit dans $[a, c]$ soit dans $[c, b]$.

On reprend les mêmes étapes sur l'intervalle qui contient x_0 jusqu'à avoir un encadrement d'amplitude 10^{-n} de la solution.

Activité 9

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 4]$ par $f(x) = x + \sqrt{x} - 3$

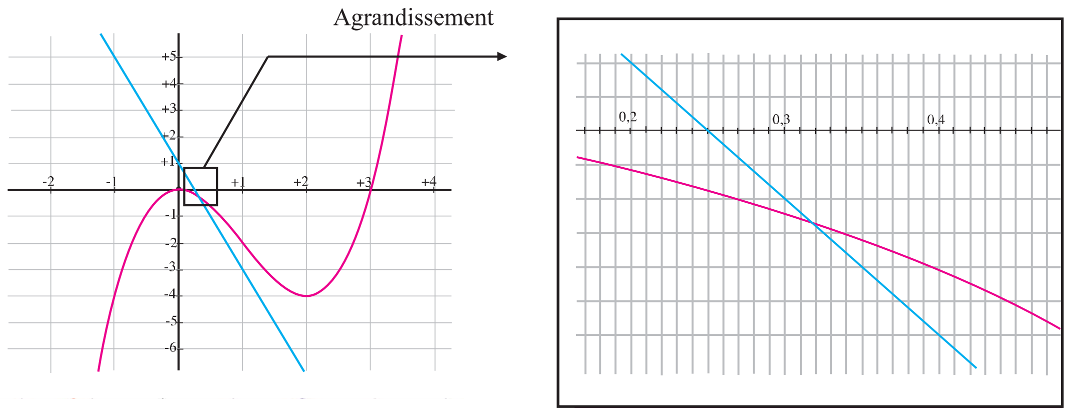
1. Montrer que f est continue et strictement croissante.
2. Expliquer pourquoi il existe un unique réel a de [0,4] tel que f(a) = 0.
3. A l'aide de votre calculatrice, donner une valeur approchée de a à 10^{-2} près.
4. Donner le signe de f(x) sur [0,4].

Activité 10

On considère l'équation (E) : $\left(x^3-3x^2+4x-1=0\right)$ et on donne les courbes représentatives ci-dessous des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x^2$ et $g(x)=-4x+1$.

1- Vérifier que l'équation (E)est équivalente à l'équation : $f(x)-g(x)=0$

2- En déduire graphiquement que (E) admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.



IV- Théorème de la bijection :

Activité 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(x)=4x^2-1$

Montrer que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

1- Vérifier que $f\left([0,+\infty[\right)\subset[-1,+\infty[$.

2- Montrer que tout élément y de $[-1,+\infty[$ admet un unique antécédent x par f dans $[0,+\infty[$ et que $x=\frac{1}{2}\sqrt{y+1}$.

Commentaire:

Notons alors que tout élément de $[0,+\infty[$ a une image par f dans $[-1,+\infty[$ et que tout élément de $[-1,+\infty[$ a un seul antécédent par f dans $[0,+\infty[$.

On dit que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ dans $[-1,+\infty[$ et il existe une fonction notée f^{-1} appelée **fonction réciproque** ou **bijection réciproque** de f.

f^{-1} est définie sur $[-1,+\infty[$ par $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x+1}$.

Théorème (admis)

Si une fonction f est **strictement monotone** sur un intervalle I alors :

- f est une bijection de l'intervalle I sur f(I)
- La fonction réciproque f^{-1} de f a le même sens de variation que f.

Si de plus, la fonction f est **continue** sur I, alors
La fonction réciproque f^{-1} de f, est une bijection continue de l'**intervalle** J = f(I) sur I

Remarque

Pour tout $x \in I$ et $y \in J$, $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur IR_+ par $f(x)=x^2$

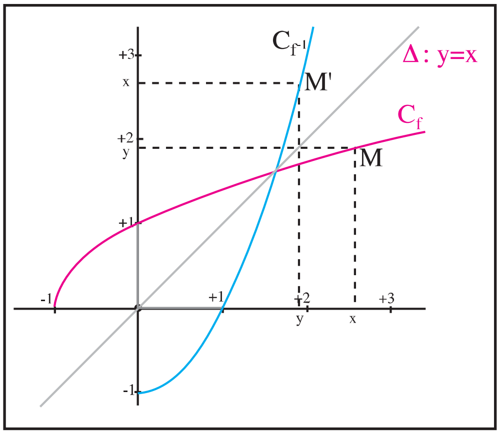
1) Montrer que f est une bijection de IR_+ sur IR_+.
2) Définir la fonction réciproque f^{-1} de f.
3) Construire dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ du plan la droite Δ d'équation : $y = x$ et les courbes représentatives de f et f^{-1}.Que remarquez-vous pour ces deux courbes?

On admet que :

Les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé du plan, sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$

Pour tout $x \in I$ et $y \in J$

$M(x,y) \in C_f \Leftrightarrow M'(y,x) \in C_{f^{-1}}$



Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$.

a- Montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty,1]$.

b- En déduire que f est une bijection de $]-\infty,1]$ sur $[0,+\infty[$.

c- Représenter graphiquement f et f^{-1} dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

Activité 4

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4}{x^2}$

1- Montrer que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

2- Déterminer les images des intervalles $]0,1]$, $[1,2]$ et $[1,+\infty[$ par f.

Activité 5

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$.

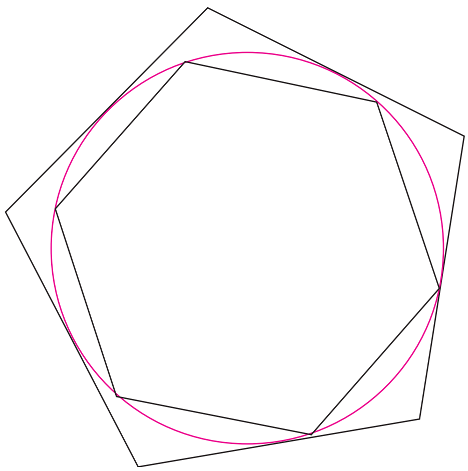
1- Etudier le sens de variation de f.

2- Déterminer les images des intervalles $]-1,1[$ et $[1,+\infty[$ par f.

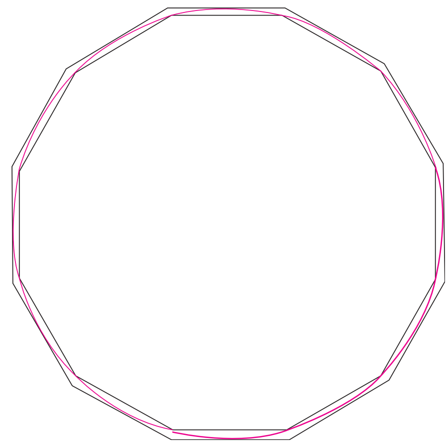
Recherche d'une valeur approchée de π :

On peut considérer l'aire du cercle unitaire comme étant la limite de l'aire d'un polygone régulier à n côtés (polygone à n cotés isométriques) inscrit dans le cercle ou circonscrit au cercle, lorsque n tend vers l'infini.

D'autre part, l'aire du cercle de rayon 1, est égale à π et on remarque que : lorsque le nombre n de côtés augmente l'aire du polygone devient de plus en plus proche de la valeur de π.



$n = 12$



$n = 5$

A l'aide d'un tableur (exemple : Excel), remplir le tableau contenant les mesures des aires en fonction du nombre n de cotés pour des valeurs de n de plus en plus grandes.

Pour calculer l'aire du polygone inscrit dans le cercle unitaire, on utilisera la formule suivante : $A_i = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$

Pour calculer l'aire du polygone circonscrit au cercle unitaire, on utilisera la formule suivante: $A_c = n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$

Etape1 : Remplir la colonne « nombre d'arêtes »
Les cellules A3 jusqu'à A15 contiennent le nombre d'arêtes du polygone inscrit

B3 fx =(A3/2*SIN(2*PI()/A3))

A	B	C
Nombre d'arètes	Aire du polygone inscrit	Aire du polygone circonscri
4	2	
10		
50		
60		
70		
80		
90		
100		
110		
120		
130		
140		
150		

Etape 2 : Dans la cellule B3, écrire la formule : =(A3/2*SIN(PI()/A3)) permettant de calculer l'aire d'un polygone inscrit en fonction du nombre d'arêtes

Etape 3 : Recopier la formule B3 dans les cellules B4 jusqu'à B15

Etape 4 : Dans la cellule C3, écrire la formule =(A3*SIN(PI()/A3)/COS(PI()/A3)) permettant de calculer l'aire d'un polygone circonscrit en fonction du nombre d'arêtes

C3 fx =(A3*SIN(PI()/A3)/COS(PI()/A3))

A	B	C
Nombre d'arètes	Aire du polygone inscrit	Aire du polygone circonscri
4	2	4
10	2,938926261	
50	3,133330839	
60	3,135853898	
70	3,137375812	
80	3,138363829	
90	3,139041318	
100	3,139525976	
110	3,139884597	
120	3,140157375	
130	3,140369669	
140	3,140538125	
150	3,14067403	

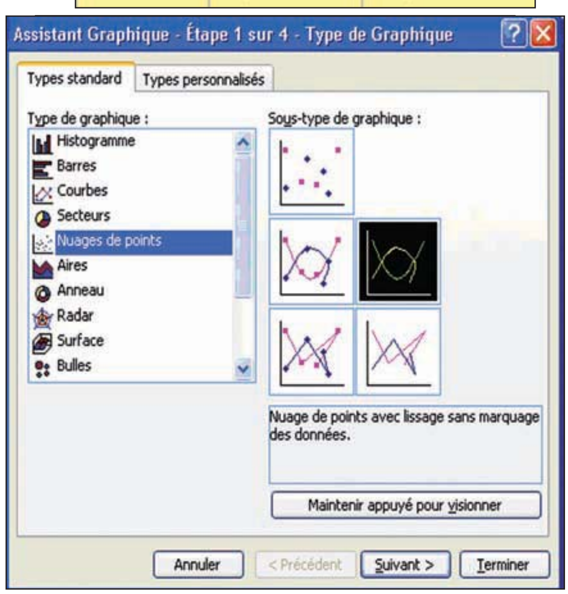
Etape 5 : Recopier la formule C3 dans les cellules C4 jusqu'à C15 ,on obtient le tableau suivant :

Nombre d'arètes	Aire du polygone inscrit	Aire du polygone circonscrit
4	2	4
10	2,938926261	3,249196962
50	3,133330839	3,145733363
60	3,135853898	3,144466757
70	3,137375812	3,143703625
80	3,138363829	3,143208561
90	3,139041318	3,142869254
100	3,139525976	3,142626604
110	3,139884597	3,1424471
120	3,140157375	3,142310588
130	3,140369669	3,14220436
140	3,140538125	3,142120077
150	3,14067403	3,142052086

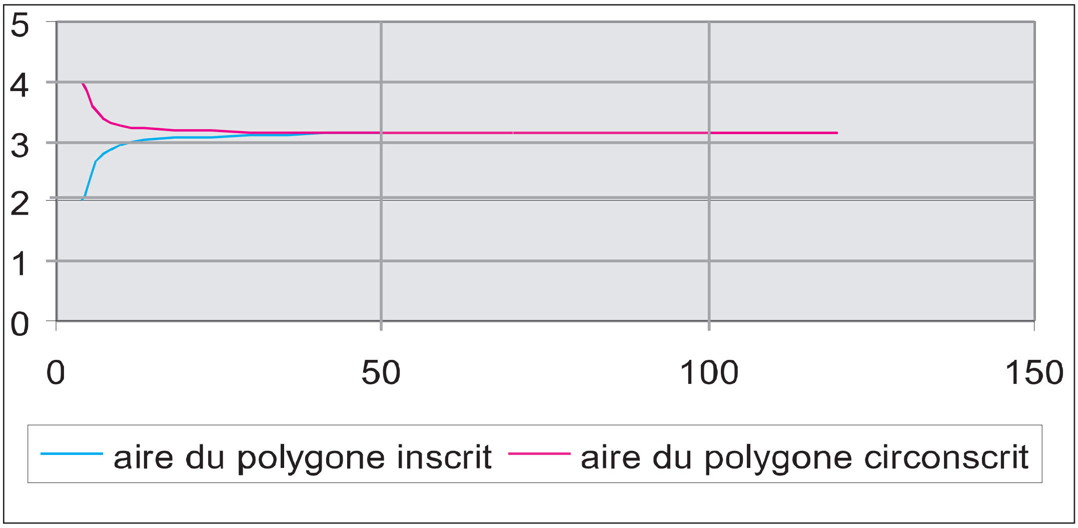
<u>**Etape 6**</u> :
Sélectionner les trois colonnes A, B et C

<u>**Etape 7**</u> :
Cliquer sur le bouton « Assistant graphique ».

<u>**Etape 8**</u> :
Sélectionner la commande « Nuage de points ». Poursuivre la démarche en cliquant à chaque fois sur le bouton « Suivant ».



On obtient le graphique suivant :



Observation des valeurs proches de π pour un grand nombre d'arêtes

Nombre d'arètes	Aire du polygone inscrit	Aire du polygone circonscrit
4	2	4
10	2,938926261	3,249196962
50	3,133330839	3,145733363
200	3,141075908	3,141851065
500	3,141509971	3,141633996
1000	3,141571983	3,141602989
5000	3,141591827	3,141593067
10000	3,141592447	3,141592757
100000	3,141592652	3,141592655

1- Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte.

QUESTIONS	REPONSES	QUESTIONS	REPONSES
1) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-5x^2 - 3x + 4) =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 4	7) $\lim\limits_{x\to 0}\left\|\dfrac{x^3-6}{x^2+1}\right\| =$	☐ $+\infty$ ☐ 6 ☐ 0
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{1}{x^3}+x^2-1) =$	☐ 0 ☐ $+\infty$ ☐ -1	8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left\|\dfrac{x+1}{x^2+3x-2}\right\| =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ 0
3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}-x^2-1\right)^3 =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$	9) $\lim\limits_{x\to 2^+} (\dfrac{2-x}{4-4x+x^2}) =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+8}\right) =$	☐ $+\infty$ ☐ $-\dfrac{1}{8}$ ☐ 2	10) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-x-2) =$	☐ 1 ☐ 0 ☐ -2
5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^3-6x}{x^2+1}\right) =$	☐ $+\infty$ ☐ 4 ☐ 6	11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} =$	☐ 1 ☐ 0
6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+5}{x^2+3x+2}\right) =$	☐ $-\infty$ ☐ $\dfrac{5}{2}$ ☐ 0	12) $\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{2x^2+1} =$	☐ $+\infty$ ☐ 1 ☐ $\sqrt{3}$

2- Pour chacune des questions ci-dessous cocher la ou les réponse(s) correcte(s)

QUESTIONS	REPONSES
La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \|x-1\| & \text{si } x>1 \\ 2x-1 & \text{si } x\leq 1 \end{cases}$	☐ f est continue en 1 ☐ f n'est pas continue en 1 ☐ f est continue en 2
La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x>0 \\ \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$	☐ f est continue en 0 ☐ f n'est pas continue en 0 ☐ f est continue sur $\mathbb{R}$
La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } x<2 \\ \dfrac{x}{x-1} & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$	☐ f n'est pas continue en 2 ☐ f est continue en 2 ☐ f est continue sur $]-\infty,2]$

3 - Calculer les limites suivantes si elles existent:

1) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2-x+3\right)$; b- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-5x^2+x+3\right)$

2) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3+5x-2\right)$; b- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x^3+2x-2\right)$

3) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^4+x-1\right)$; b- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-5x^4+2x-1\right)$

4 - Calculer les limites suivantes si elles existent:

1) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$; b- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

2) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)$; b- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x-2}\right)$

3) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{5x+1}{x}\right)$; b- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-\dfrac{3x^2+1}{4x}\right)$

4) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{3x^2-x+2}\right)$; b- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-5x^2-3}{3x^2-x-1}\right)$

5) a- $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3x^2-x-2}{x-1}\right)$; b- $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x^3-8}{x-2}\right)$; c- $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\dfrac{x^2-5x+6}{(x-2)^2}\right)$

6) a- $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$; b- $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$

7) a- $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{x^2-5x+6}{(x-2)^2}\right)$; b- $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\dfrac{x^2-5x+6}{(x-2)^2}\right)$

5 - Calculer les limites suivantes si elles existent:

1) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x-2}$; b- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+2x\right)$; c- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-2x\right)$

2) a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right)$; b- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+2x\right)$

3) a- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{2-x}{x^2+1}}$; b- $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\dfrac{2+x}{x^2-1}}$; c- $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$; d- $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sqrt{x}-x}{x}\right)$

6- a- Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$

b- En déduire : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}-6}{x}$

7 - Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites de f(x) aux bornes de ce domaine :

a- $f:x\mapsto\dfrac{x-2}{-x^2+x+2}$; b- $f:x\mapsto\dfrac{2x-4}{x^2-x+1}$

c- $f:x\mapsto\dfrac{x^2+2x-1}{x+2}$; d- $f:x\mapsto\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$

8- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=]0\,;3[$ par : $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-3x}$

1- Etudier le signe de f sur l'intervalle I.

2- Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle I.

9- Soit f la fonction définie par: $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-6x+9}$

1- Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f puis étudier son signe.

2- Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

10- Justifier la continuité de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I:

1) $f(x)=\left(x^2-5\right)^4$; $I=IR$; 2) $f(x)=\left(\dfrac{3x-4}{x-1}\right)^2$; $I=]1,+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $I=]-\infty,0]$; 4) $f(x)=\sqrt{3+\cos^2 x}$; $I=IR$

5) $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$; $I=[0,+\infty[$; 6) $f(x)=\sin\left(\sqrt{x}\right)$; $I=[0,+\infty[$

11- a) f est une fonction vérifiant: pour tout réel $x>1, 1-\dfrac{1}{x^2}\leq f(x)\leq\dfrac{x+1}{x}$.

Peut-on calculer la limite de f en $+\infty$? Si oui déterminer cette limite.

b) g est une fonction vérifiant : pour tout réel $x>10$, $-1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}<f(x)<-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Peut-on calculer la limite de f en $+\infty$?

c) Calculer: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$

12- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\sin(\dfrac{1}{x})$

Calculer les limites de f en 0 , $+\infty$ et $-\infty$.

13- Soit u une fonction définie sur $[1,+\infty]$ et telle que: Pour tout $x\in[1\,;+\infty[$, $0\leq u(x)\leq x$ et soit f la fonction définie sur $[1,+\infty]$ par $f(x)=1+\dfrac{u(x)}{x^2}$.

1) Montrer que si $x\geq 1$ on a : $-\dfrac{1}{x}+1\leq f(x)\leq\dfrac{1}{x}+1$.

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

14- Soit dans IR l'équation : $x^3-3x^2+1=0$ (E).

1- Montrer que l'équation (E) admet une solution dans l'intervalle $]-1,0[$.

2- On pose $f(x)=x^3-3x^2+1$ pour $x\in IR$

a- Calculer f(0) et f(3).

b- Peut-on appliquer le corollaire de la page 30 sur l'intervalle $[0,3]$?

c- Calculer f(2) et en déduire que l'équation (E) admet deux autres solutions.

3- Donner un encadrement d'amplitude 0,5 de chacune des trois solutions de (E).

15- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\left|3x^2+x-4\right|-2$

1- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2- montrer que f est continue sur IR.

3- Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.
4- A l'aide du graphique, déterminer le nombre de solutions de l'équation f(x) = 0.
5- Donner un encadrement de chacune des solutions à 10^{-2} près .
6- Déterminer les valeurs exactes des solutions.

16- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x$

1- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2- Etudier les variations de f .
3- a- calculer $f(-3)$ et $f(2)$.
  b- Montrer que l'équation $f(x)=5$ admet exactement trois solutions.
  c- Donner un encadrement à 10^{-1} près de la solution qui appartient à l'intervalle $[-3,2]$.

17- Soit f la fonction définie sur IR_+ par : $f(x)=\sqrt{x}+x^2-4$.
1) Montrer que f est continue et strictement croissante sur IR_+ .
2) En déduire que f réalise une bijection de IR_+ sur lui même.
3) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$ et que $1,6<\alpha<1,7$.

18- On considère l'équation : $x^4-4x^3+2=0$ (E)
a) En utilisant le sens de variation de la fonction $f: x \mapsto x^4-4x^3+2$, montrer que (E) admet une solution unique α sur l'intervalle $[0,1]$.
b) Trouver un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
c) Montrer que (E) admet une solution unique β sur l'intervalle $[3,4]$ puis trouver un encadrement d'amplitude 10^{-1} de β.

19- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+4$.
1) Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé du plan.
2) Pour chaque point M de C d'abscisse x non nulle on considère la droite (OM) et on désigne par d(x) le coefficient directeur de (OM).

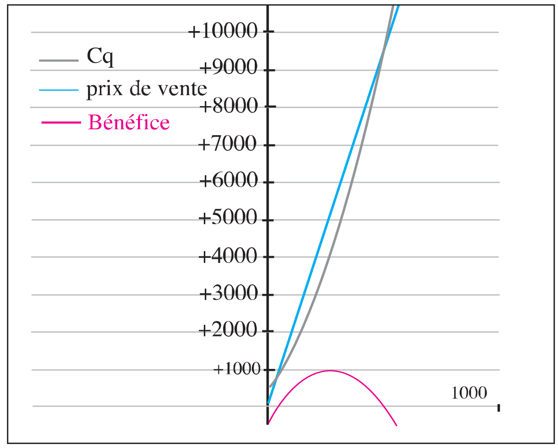
Vérifier que $d(x)=x+\frac{x}{4}$.

3) Etudier la limite de d en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$.
4) Pour quelle position de M a-t-on :
  a) d(x)=5 ? b) d(x)=4 ? c) d(x)=2 ?
5) Pour t non nul, soit $M\left(t,t^2+4\right)$ et D_t la droite (OM).
  Déterminer selon les valeurs de t, le nombre de points d'intersection de C et D_t.
6) Expliquer les résultats trouvés dans 4).
7) En économie, si f(x) représente le coût de production de x objets (pour x > 0), expliquer pourquoi d(x) représente le coût unitaire moyen pour une production de x objets.

20- Le coût total de fabrication d'une quantité x d'un produit, exprimée en centaines d'unités, est représenté graphiquement par la courbe ci-contre.

1- Déterminer la quantité d'objets, à la centaine près, à fabriquer pour avoir un coût minimum.

2- On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est égal à 13 000 dinars. Déterminer graphiquement le nombre minimum et le nombre maximum d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice.



21- A la suite d'une épidémie dans une région, on a constaté que le nombre de malades, n jours après l'apparition des premiers cas, est : $-n^3+75n^2$, pour n entier tel que $0<n<60$.

Soit f la fonction définie sur [0 ; 60] par :

$f(x)=-x^3+75x^2$

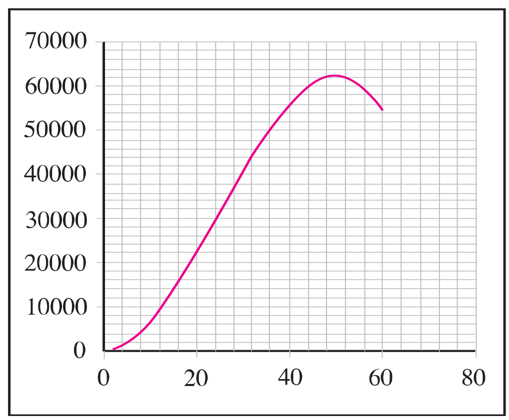
On donne sur le graphique ci-contre, la courbe représentative de f.

1-a- Déterminer graphiquement le jour où le nombre de malades est maximal durant cette période de 60 jours.

b- Préciser le nombre de malades ce jour là

2- a- Déterminer graphiquement le jour où le nombre de malades est égal à 22000

b- Déterminer graphiquement la période durant laquelle le nombre de malades est supérieur à 56000.



22- ***Partie A*** Soit g la fonction définie sur [0 ; +∞[par : $g(x) = x^3 - 1200x - 100$.

1- Déterminer la limite de g en +∞.
Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

2- Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle [20 ; 40].
Donner une valeur approchée de α à l'unité près.

3- En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

Partie B Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = x + 50 + \dfrac{1200x+50}{x^2}$.

On appelle Csa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- Déterminer la limite de f à droite en 0 et en +∞.

2- Etudier les variations de f.

3- Montrer que la droite D d'équation y = x + 50 est asymptote à la courbe C.

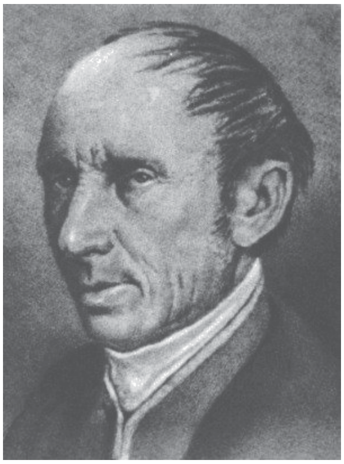
4- Construire C et D sur le même graphique.

5- Résoudre graphiquement l'équation f(x) = 130. On donnera les valeurs approchées des solutions à l'unité près.

Math culture

Au XIXe siècle le mathématicien français Augustin Louis Cauchy définit la continuité d'une fonction sur un intervalle $[a,b]$ de la manière suivante :

« Si en partant d'une valeur x, comprise entre a et b, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle- même recevra pour accroissement la différence $f(x+\alpha)-f(x)$... La fonction f est continue en x si la différence $f(x+\alpha)-f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de α ».Ce ci est à comparer avec la définition moderne " f est continue en x si $\lim\limits_{\alpha\to 0} f(x+\alpha)=f(x)$ ". Mais pour arriver à cette définition, il a fallu d'abord définir d'une manière précise et opérationnelle une limite.



Augustin Louis Cauchy
1789 - 1857

Cauchy est devenu professeur à l'école polytechnique en 1814,après avoir

débuté une carrière d'ingénieur des ponts et chaussées qui ne lui convenait pas. Il rédigea un cours d'analyse , dans lequel il prit comme notions fondamentaux la limite et la continuité. L'analyse moderne était née.

- ***Vers 1760*** Publication de l'article " limites" par Jean Laurent d'Alembert (1717 – 1783)

D'ALEMBERT
(1717-1783)

- ***Vers 1821***
  Publication du premier volume du cours d'analyse de l'école royale polytechnique où Cauchy fonde l'Analyse sur la notion de limite et de fonction continue

Chapitre 2

DERIVATION - PRIMITIVES

Activité 1

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de cocher cette réponse.

QUESTIONS	REPONSES	QUESTIONS	REPONSES
$(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan $A(1,-1)$ et $B(0,2)$ deux points. La droite (AB) a pour équation :	☐ $y=2$ ☐ $3x+y-2=0$ ☐ $x-y=2$	$f: x \mapsto a$ le nombre derivé de f en un point x_0 de IR est égal à :	☐ 0 ☐ a ☐ 1
$(o,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan $D: y=-3x+2$ Le coefficient directeur D est égal à :	☐ $-\frac{3}{2}$ ☐ 2 ☐ -3	$f: x \mapsto x^3$ le nombre derivé de f en un point x_0 de IR est égal à :	☐ ${x_0}^2$ ☐ 3 ☐ $3{x_0}^2$
$(o,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan $D: y=-3x+2$ $D': 3x+y=2$ D et D' sont	☐ parallèles ☐ sécantes	$f: x \mapsto \frac{1}{x}$ le nombre derivé de f en un point x_0 de IR^* est égal à :	☐ $-\frac{1}{{x_0}^2}$ ☐ $\frac{1}{x_0}$ ☐ 1
$(o,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan, $A(1,-1)$ et $B(3,-1)$. La pente de la droite (AB) est égale à :	☐ 3 ☐ 0 ☐ -1	$f: x \mapsto \sqrt{x}$ le nombre derivé de f en un point x_0 de IR_+^* est égal à :	☐ $\sqrt{x_0}$ ☐ $\sqrt{1}$ ☐ $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$
$f: x \mapsto x$ le nombre derivé de f en un point x_0 de IR est égal à :	☐ x_0 ☐ 1 ☐ 0	$f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ le nombre derivé de f en un point x_0 de IR est égal à :	☐ x_0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $2x_0$

Activité 2

Une usine fabrique des objets dont le nombre varie de 0 à 40
Le coût total de fabrication exprimé en dinars, de x quantités est modélisé par la fonction C définie par :

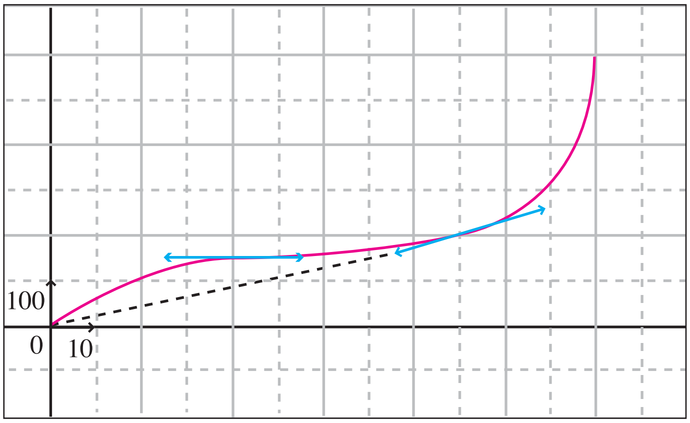
$$C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 15x^2 + 200x$$

1- Calculer le coût marginal en fonction de x
2- A combien s'élève-t-il pour 10 unités ? et pour 30 unités ?
3- Pour quelle valeur de x ce coût marginal est-il minimal ?

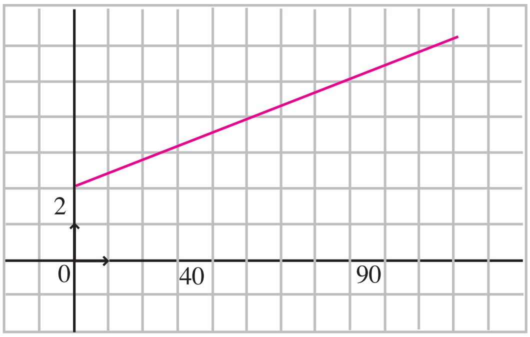
> Le coût marginal Cm est la dépense occasionnée par la production d'un objet supplémentaire et on suppose que $C_m(x) = C'(x)$

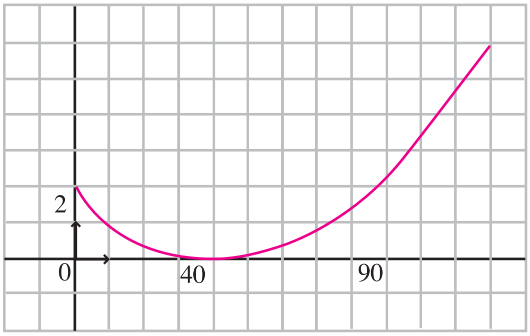
Activité 3

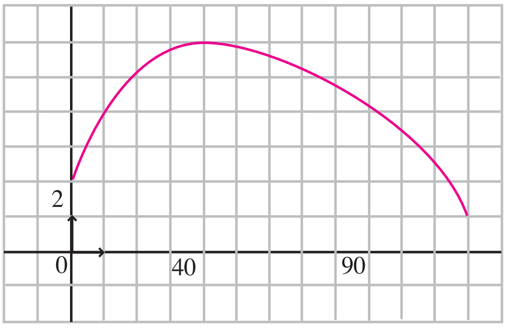
La courbe C ci-dessous représente le coût total de production d'un produit en fonction de la quantité x produite (x est exprimé en kg et le coût total en dinars).

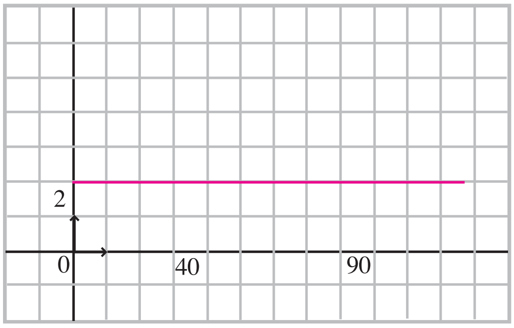


Parmi les représentations ci-dessous, une correspond au coût marginal associé à la production du produit. Laquelle ? Justifier la réponse.









DERIVATION

I- Revoir:

1) Dérivabilité en un point:

Activité 1

Soit f la fonction définie, sur $]0,+\infty[$, par : $f(x)=x+\frac{1}{x}$

1) Calculer f(1).
2) Vérifier que pour

tout $x \in]0,+\infty[\setminus \{1\}$ on a : $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1-\frac{1}{x}$.

En déduire que f est dérivable en 1 et que f'(1)=0.

3) Soit x_0 un élément de $]0,+\infty[$ et $x \in]0,+\infty[\setminus \{x_0\}$,

vérifier que : $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=1-\frac{1}{xx_0}$.

4) En déduire que f est dérivable en x_0 et

que $f'(x_0)=1-\frac{1}{x_0^2}$.

On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un réel ℓ tel que:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$$

ℓ est appelé le **nombre dérivé** de f en x_0 et on note $f'(x_0)=\ell$

Activité 2

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x|-1$.

1- Etudier la continuité de f en 0 et en -1.
2- Montrer que f est dérivable en -1 et calculer f '(-1).
3- Etudier la dérivabilité de f en 0.

1) On dit que f est dérivable à droite en x_0 si et seulement si il existe un réel ℓ tel que $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$

ℓ est appelé **nombre dérivé à droite** de f en x_0 et on note $f'_d(x_0)=\ell$

2) On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si et seulement si il existe un réel ℓ tel que $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$

ℓ est appelé **nombre dérivé à gauche** de f en x_0 et on note $f'_g(x_0)=\ell$

Activité 3

Soit la fonction : $f : x \mapsto \begin{cases} 2x^2-1 & \text{si } x \le -1 \\ x+2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

1- Etudier la continuité de f en -1.
2- Vérifier que f est dérivable à droite et à gauche en -1. f est-elle dérivable en -1 ?

1) f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à **droite** et à **gauche** en x_0 et $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$.

2) Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .

Activité 4

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=|x-1|-x & \text{si } x>0 \\ f(x)=-2x+2 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$..

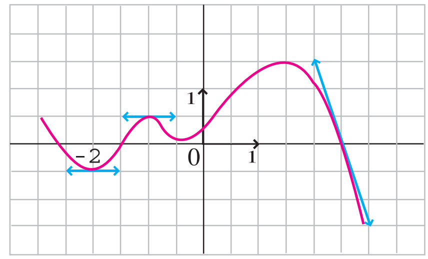
1) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 1.
2) La fonction f est-elle continue en 0 ? et en 1 ?

Remarque

La fonction f peut être continue en un point sans être dérivable en ce point.

2) Interprétation graphique du nombre dérivé:

Activité 1



Soit f la fonction représentée graphiquement ci-contre :
1- Préciser le domaine de définition de f.
2- Déterminer :

a – $f(-2)$ et $f'(-2)$.

b – $f(-1)$ et $f'(-1)$.

3- Déterminer $f'\left(\frac{5}{2}\right)$ et donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{5}{2}$.

Si f est une fonction dérivable en x_0 alors sa courbe représentative admet au point d'abscisse x_0 une tangente d'équation:
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Remarques

1) Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)=0$ alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est parallèle à l'axe des abscisses.

2) - Si f est dérivable à droite en x_0 alors sa courbe représentative admet au point d'abscisse x_0 une demi tangente d'équation:

$$\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$

- Si f est dérivable à gauche en x_0 alors sa courbe représentative admet au point d'abscisse x_0 une demi tangente d'équation.

$$\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases} :$$

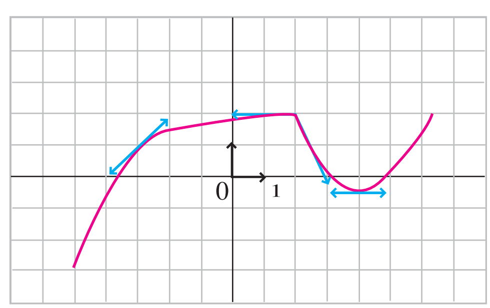
3) Si la limite de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est infinie lorsque x tend vers x_0^+ ou x tend vers x_0^- alors la courbe représentative de f admet au point d'abscisse x_0 une demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

4) Si la courbe représentative de f admet en un point M deux demi tangentes de directions différentes, alors M est dit : **un point anguleux.**

Activité 2

Soit g la fonction dont la courbe représentative dans un repère orthonormé est donnée dans le graphique ci contre.

Donner les équations des tangentes ou des demi tangentes à Cg aux points d'abscisses $\frac{5}{2}$, 2 et -3.



3) Dérivabilité sur un intervalle – fonction dérivée :

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$, par :

$f(x)=x+\sqrt{x}$

1- Soit x_0 un élément de $]0,+\infty[$ et

$x\in]0,+\infty[\setminus\{x_0\}$

vérifier que : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$.

2- En déduire que f est dérivable en tout point x_0 de $]0,+\infty[$ et que $f'(x_0)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Soit f une fonction a variable réelle.
1- On dit que f est dérivable sur un intervalle] a,b[lorsque f est dérivable en tout réel de]a,b[.
2- On dit que f est dérivable sur [a,b[lorsque f est dérivable sur]a,b[et f est dérivable à droite en a
3- On dit que f est dérivable sur]a,b] lorsque f est dérivable sur]a,b[et f est dérivable à gauche en b
4- On dit que f est dérivable sur [a,b] lorsque f est dérivable sur]a,b[, dérivable à droite en a et à gauche en b
(a et b peuvent être finis ou infinis)

Commentaire

- La fonction f est dérivable en tout point de $]0,+\infty[$, on dira que f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
- La fonction f' est définie sur $]0,+\infty[$ par:

$f'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Si f est dérivable sur un intervalle I, la fonction qui à chaque réel x de I associe $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f.

4) Opérations sur les fonctions dérivables :

Activité 3

Dans chacun des cas suivants étudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I et définir sa fonction dérivée :

a – $f: x\mapsto x+\sqrt{x}$; $I=]0,+\infty[$

b – $f: x\mapsto x^2\sqrt{x}-1$; $I=]0,+\infty[$

c – $f: x\mapsto 2\left(x^3-x\right)\sqrt{x}$; $I=]0,+\infty[$

d – $f: x\mapsto x^2-1$; $I=IR$

e – $f: x\mapsto \dfrac{1}{x^3-8}$; $I=]2,+\infty[$

f – $f: x\mapsto x-2+\dfrac{1}{x-1}$; $I=]1,+\infty[$

g – $f: x\mapsto \dfrac{x+1}{x^2+3}$; $I=IR$

f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et α un réel fixé. On a :
La fonction f+g est dérivable sur I et $(f+g)'=f'+g'$
La fonction αf est dérivable sur I et $(\alpha f)'=\alpha f'$
La fonction f.g est dérivable sur I et $(f.g)'=f'.g+f.g'$
Si de plus f ne s'annule pas sur I Alors :

* La fonction $\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{f}\right)'=-\dfrac{f'}{f^2}$

* La fonction $\dfrac{g}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{g}{f}\right)'=\dfrac{g'f-gf'}{f^2}$

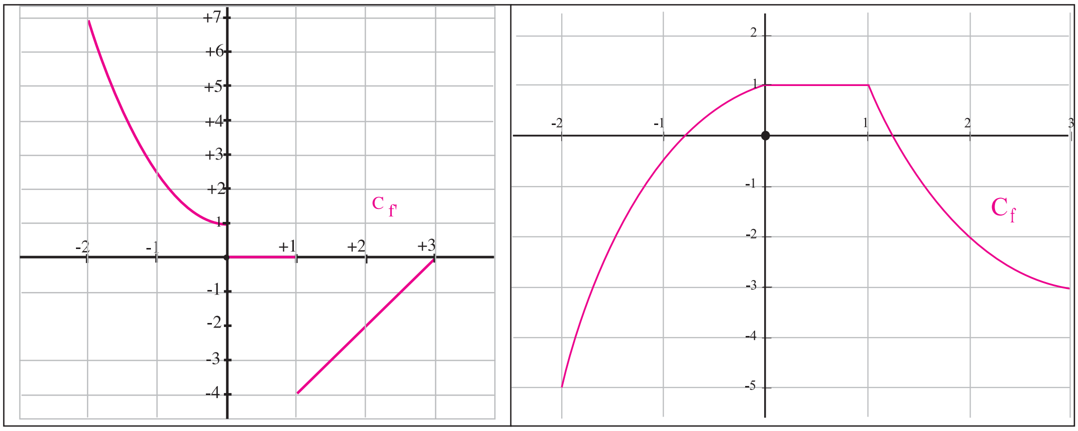
Toute fonction polynôme est dérivable sur IR.
Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle contenu dans son domaine de définition.

5) Sens de variation et signe de la dérivée :

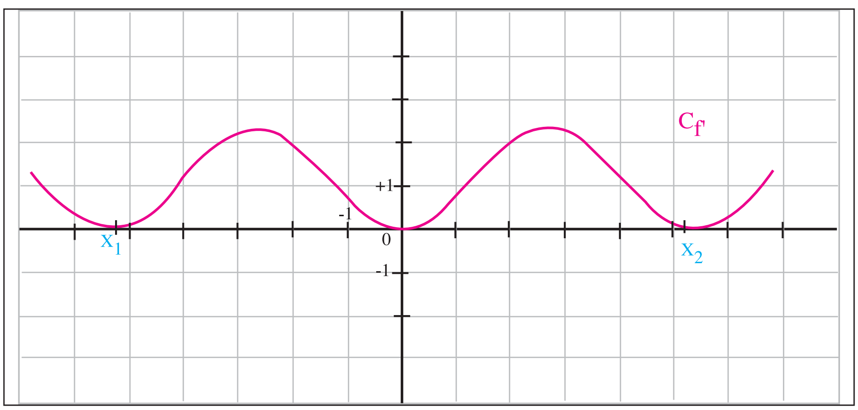
Activité 1

1) On donne sur les graphiques suivants, les courbes représentatives des fonctions f et sa dérivée f '.

Préciser le signe de f' et le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles $I =]-2,0[$, $J =]0,1[$ et $K =]1,3[$.

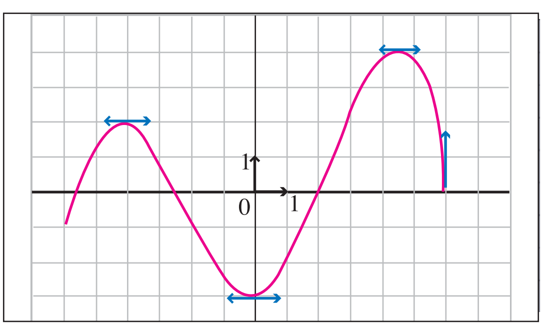


2) Dans le cas suivant, donner le tableau de signe de f'(x) puis déterminer le sens de variation de f.



Activité 2

Soit f une fonction définie sur $[-6,6]$ et ayant pour représentation graphique la courbe ci-dessous. Déterminer le signe de f'(x) pour tout x de $]-6,6[$.

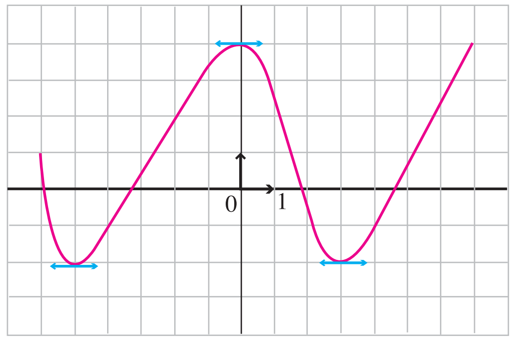


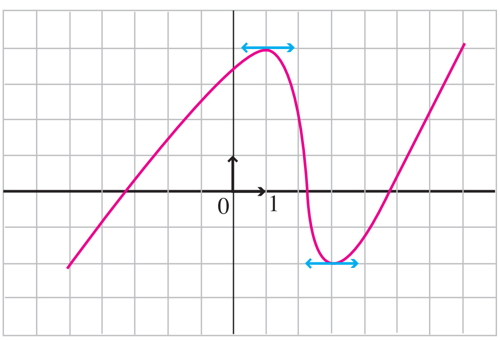
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I.
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I.
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout x de I

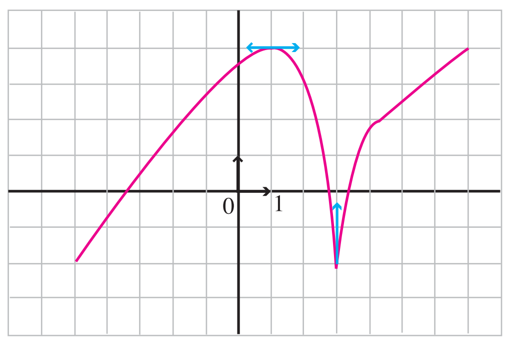
Activité 4

On donne le tableau de variation suivant :
Parmi les représentations graphiques ci-dessous, quelle est la courbe susceptible de représenter la fonction f ?

x	-5		1		3		7
f'(x)		+	0	−	‖	+	
f(x)	-2	↗	4	↘	-2 ‖	↗	4







Activité 5

Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes :

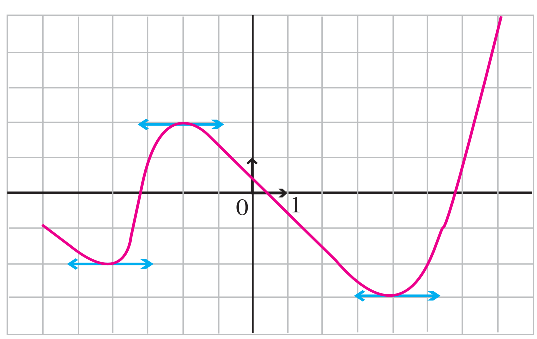
a) $f : x \mapsto x - \frac{1}{x}$; b) $f : x \mapsto 3x^4 - 2x^2 + 1$

c) $h : x \mapsto \frac{4}{x^2 - 2x}$; d) $g : x \mapsto \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 1}$

Activité 6

On donne dans la figure ci-contre la représentation graphique d'une fonction f.

Déterminer les extremums de f sur $[-5, 6]$



Activité 7

Un artisan fabrique des objets en verre. Pour chaque semaine, il estime que le coût de production en dinars de x objets est modélisé par :
$C(x)=x^2+60x+121$ pour $x\in[1;30]$.

Le coût moyen de production est défini par $C_m(x)=\dfrac{C(x)}{x}$.

1- Calculer la dérivée C'_m de C_m.

2- Etudier le signe de C'_m et dresser le tableau de variation de C_m.

3- En déduire le nombre d'objets à fabriquer pour obtenir un coût moyen minimal.

4- Chaque objet est vendu à 110 d.

a- Montrer que le bénéfice réalisé par la vente de x objets est donné par $B(x)=-x^2+50x-121$.

b- Etudier le signe de $B'(x)$ et dresser le tableau de variation de B.

c- En déduire le nombre d'objets à vendre pour obtenir un bénéfice maximal.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0.
1- Si f admet un extremum relatif en x_0 alors $f'(x_0)=0$
2- Si f ' s'annule en x_0 en changeant de signe alors $f(x_0)$ est un extremum relatif de f.

II- Dérivée seconde et point d'inflexion:

Activité 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+1$

1- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f '

2- Montrer que f ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée qu'on notera f''.

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si sa fonction dérivée f ' est dérivable sur I , on dira que f est deux fois dérivable sur I et la fonction dérivée de f ' notée f '' est appelée fonction dérivée seconde de f sur I.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=2x^3+x-1$.

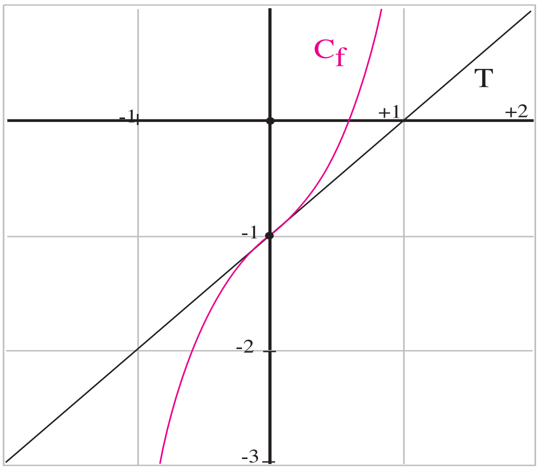
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- Montrer que f est deux fois dérivable sur IR et déterminer les expressions de f ' et de f ''

2- Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse nulle.

3- Etudier les positions de C_f par rapport à T.

4- Dresser le tableau de signe de la fonction f ''.



Interprétation

Dans le cas de l'activité précédente, la tangente T traverse la courbe C_f au point d'abscisse nulle, on dira que A(0 , -1) est un point d'inflexion de C_f .

Théorème (admis):

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0.
Si f " s'annule et change de signe en x_0 , alors $M(x_0 , f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f .

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{6}x^3+2$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Montrer que la courbe représentative de f admet trois points d'inflexion que l'on déterminera.

Activité 4

On considère la fonction f définie sur IR^* par $f(x)=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

et on désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que f est deux fois dérivable sur IR^* et que sa courbe représentative C_f admet un point d'inflexion I dont-on donnera les coordonnées.

Activité 5

f est la fonction définie sur IR par $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{si } x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & \text{si } x<0\end{cases}$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2- Prouver que la tangente en O traverse la courbe C.
3- En déduire que O est un point d'inflexion de C

III- Dérivée d'une fonction composée:

Activité 1

On considère les fonctions f, g et h définies sur IR_+ par :

$$f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}} \quad ; \quad g(x)=\frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad h(x)=\sqrt{x}$$

1- Vérifier que : $f=g\circ h$

1- Déterminer les fonctions dérivées de f, g et h

2- Comparer $f'(x)$ et $g'[h(x)].h'(x)$ pour $x\in IR_+^*$.

Théorème (admis):

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et g est une fonction dérivable sur un intervalle J contenant f(I)
Alors la fonction $(g \circ f)$ est dérivable sur I, et pour tout x de I :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$.

1- Calculer $f'(x)$ pour $x \in]1,+\infty[$.

2- Déduire la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x^2-3}{x^2-1}$.

3- Soit h la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $h(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$.

Calculer $h'(x)$ pour $x \in]1,+\infty[$.

Conséquences

1) Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier relatif.
f^n est dérivable :

- En tout point de I lorsque $n \geq 2$.
- En tout point de I où f ne s'annule pas lorsque $n \leq -1$.

Et dans les deux cas on a : $(f^n)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$

2) Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et $f(x)>0$ pour tout x de I, alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

Activité 2

Dans chacun des cas suivants étudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I et donner l'expression de sa fonction dérivée :

a) $f(x)=\left(\dfrac{2x-1}{x^2+2}\right)^3$; $I=\mathbb{R}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^5}$; $I=]1,+\infty[$

c) $f(x)=\sqrt{5x-3}$; $I=\left]\dfrac{5}{3},+\infty\right[$

d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x^2+2}}$; $I=\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

IV- Dérivée de la fonction réciproque:

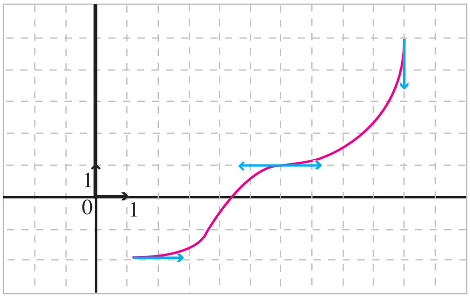
Activité 1

Soit f la fonction représentée par le graphique ci-contre.

1- Vérifier que f réalise une bijection de $[1,10]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2- Représenter la courbe de la fonction f^{-1}

3- Déterminer graphiquement l'intervalle sur lequel f^{-1} est dérivable.



Activité 2

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=x^2-1$.

1- Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

2- Vérifier que pour tout x de J, $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$.

3- Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

4- Vérifier que pour tout x de $]-1,+\infty[$, $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$.

Théorème (admis):

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert I contenant x_0

Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)\neq 0$ **alors** la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $y_0=f(x_0)$ et on a : $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Remarque

Dans les conditions du théorème, si la fonction f^{-1} est dérivable sur un intervalle J $\left(J\subset f(I)\right)$ alors pour tout x de J on a $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$.

Activité 3

Soit la fonction f définie sur $[-2,+\infty[$ par $f(x)=x^2+4x+5$.

1- Montrer que f réalise une bijection de $[-2,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.

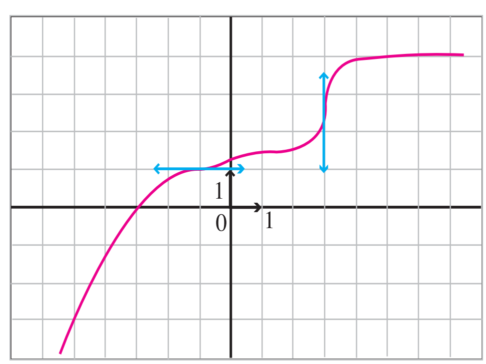
3- Déterminer l'intervalle sur lequel f^{-1} est dérivable et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

2- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour x dans $[1,+\infty[$ et retrouver $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

Activité 3

On donne dans le graphique ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR
Et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

1- Prouver que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on déterminera.
2- Construire dans le même repère la courbe de la fonction f^{-1}.
3- A l'aide du graphique, justifier que f^{-1} est dérivable en tout point de $J\setminus\{1\}$.



Activité 4

Soit $f:[0,\pi]\to[-1,1]$
$x \mapsto \cos x$

1- Montrer que f est une bijection.

2- Calculer les antécédents de $0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{2}$, et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ par f^{-1}.

3- Tracer les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4- Préciser l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable et expliciter $(f^{-1})'(x)$.

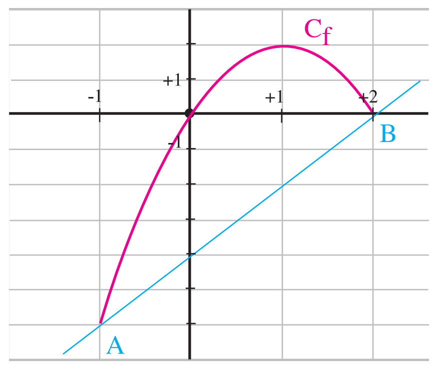
Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :
$\sin'(x) = \cos(x)$ et
$\cos'(x) = -\sin(x)$

V- Théorème des accroissements finis :

1) Théorème des accroissements finis :

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $[-1,2]$ par $f(x) = -x^2 + 2x$.
On donne dans le graphique suivant la représentation de f.
Soient A et B les points de C_f d'abscisses respectives -1 et 2
1- Calculer le coefficient directeur de la droite (AB).
2- Déterminer les points de C en lesquels la tangente est parallèle à la droite (AB).



Théorème (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle [a ; b] .
Si (f est continue sur $[a,b]$ **et** f est dérivable sur $]a,b[$)
Alors (Il existe au moins un élément c de]a ; b[tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$).

Activité 2

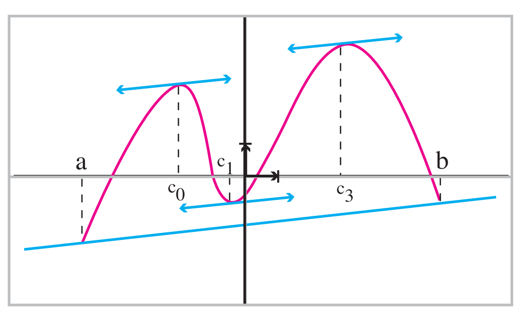
Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par $f(x) = x^2\sqrt{x} - x^2$

1- Montrer que f est continue sur $[0,4]$ et qu'elle est dérivable sur $]0,4[$.

2- Montrer qu'il existe un réel c de $]0,4[$ tel que $f'(c) = 4$.

Remarques

1- Lorsque les conditions sont remplies, le théorème affirme l'existence d'au moins une tangente à C_f parallèle à la droite (AB) où A et B sont les points de C_f d'abscisses respectives a et b.
2- Le théorème affirme l'existence de c et non pas son unicité (voir la figure ci-contre).



Activité 3

1) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4x + 2$.

a- Montrer que f est dérivable sur IR et déterminer sa fonction dérivée.

b- Calculer f (0) et f(2).

c- En appliquant le théorème des accroissements finis, déduire que l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ admet au moins une solution x_0 dans l'intervalle $]0,2[$.

2) Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle [a ; b] et dérivable sur $]a,b[$.
Montrer que si $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins une tangente à la courbe représentative de f qui soit parallèle à l'axe des abscisses.

2) Inégalités des accroissements finis

Activité 1

Soit la fonction f définie sur $[1,3]$ par : $f(x) = \sqrt{x}$

1- Montrer que f est continue sur $[1,3]$ et qu'elle est dérivable sur $]1,3[$.

2- Montrer que pour tout x dans $]1,3[$ on a : $\frac{\sqrt{3}}{6} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

3- Vérifier que : $\frac{\sqrt{3}}{6} \leq \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \leq \frac{1}{2}$.

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle [a ; b] et dérivable sur $]a,b[$.
S'il existe deux réels m et M tels que: pour tout x de $]a ; b[$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors on a

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} \leq M$$

Activité 2

Soit la fonction : $f : x \mapsto (x+2)^3$ définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

1- Démontrer que : pour tout x dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ on a : $12 \leq f'(x) \leq \frac{75}{4}$.

2- Montrer que pour tout x dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$; $12x \leq f(x) - 8 \leq \frac{75}{4}x$.

3- En déduire un encadrement de $(2,01)^3$ à 10^{-1} près.

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
S'il existe un nombre réel positif k tel que : pour tout élément x de I on a : $|f'(x)| \leq k$
Alors, quels que soient les réels a et b de I, $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$

Activité 3

Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

1- Montrer que l'équation g(x) = x admet une unique solution α dans l'intervalle $]0,+\infty[$

Vérifier que $\alpha\in[1,2]$.

2- Montrer que pour tout x de $]1,+\infty[$ on a $|g'(x)|\le\dfrac{1}{2}$.

3- En déduire que pour tout réel x de $]1,+\infty[$, on a $|g(x)-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|x-\alpha|$.

PRIMITIVES :

I- Notion de primitive :

Activité 1

Une entreprise fabrique un certain produit en quantité x (x ∈ [0 ; 500]). Les coûts fixes s'élèvent à 6000 DT. On suppose que le coût marginal (en DT) est donnée par:
g(x) = 2x + 45.

1- Quelle est l'expression du coût total en fonction de x ?
2- Pour 200 unités produites, trouver une relation entre le coût marginal, le coût de la dernière unité produite et le coût d'une unité supplémentaire.

Activité 2

Soient f et F les fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par

$f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+3x^2$ et $F(x)=\sqrt{x}+x^3-1$.

Vérifier que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que F'(x) = f(x) .

Définition

Soient f et F deux fonctions définies sur un même intervalle I.
On dit que F est une primitive de f sur I, si F est **dérivable** sur I et pour tout x ∈ I, **F'(x) = f(x)**.

Activité 3

Dans chacun des cas suivants vérifier que F est une primitive de f sur l'intervalle I.

a) $f:x\mapsto x^3-2$; $F:x\mapsto\dfrac{1}{4}x^4-2x-1$ $I=\mathbb{R}$

b) $f:x\mapsto\dfrac{3}{x^2}+2x+1$; $F:x\mapsto-\dfrac{3}{x}+x^2+x$ $I=]-\infty,0[$

c) $f:x\mapsto\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+x^2$; $F:x\mapsto\sqrt{x}-\dfrac{1}{3}x^3+\sqrt{2}$ $I=]0,+\infty[$

Théorème (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

Activité 4

1- Justifier que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une primitive F sur $]0,+\infty[$.

2- donner le sens de variation de F sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Remarques

Le théorème précédent affirme l'existence d'une primitive d'une fonction continue sur un intervalle sans pour autant la déterminer.

II- Ensemble des primitives d'une même fonction :

Activité 1

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

1- Montrer que f admet une primitive sur IR.

2- Vérifier que les fonctions F et G définies sur IR par : $F(x) = -\frac{1}{x^2+1}$ et $G(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1}$

sont deux primitives de f sur IR.

3- Calculer $F(x) - G(x)$ pour $x \in$ IR.

Activité 2

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

1- Montrer que pour tout réel k la fonction $G : x \mapsto F(x) + k$ est aussi une primitive de f sur I.

2- Montrer que si H est une primitive de f sur I alors la fonction (H-F) est constante sur I.

Théorème (admis)

Soit f une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle I.

1- Toute fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ où k est un réel, est une primitive de f sur I.

2- Toute primitive de f sur I est de la forme : $x \mapsto F(x) + k$ où k est un réel.

Remarque

Deux primitives d'une fonction sur un même intervalle diffèrent d'une constante.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

1- Montrer que f admet une primitive sur $]0,+\infty[$.

2- Vérifier que pour tout réel k, la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $F_k(x)=-\frac{2}{x}+2\sqrt{x}+k$

est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

3- Déterminer k pour que $F_k(1)=2$.

Théorème (admis)

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel donné de I et y_0 un réel donné. Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Activité 4

1- Trouver toutes les primitives sur $]0,+\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{3}-\frac{3}{x^2}$.

2- Déterminer celle qui s'annule en 1 puis celle qui prend la valeur -1 en 3.

Activité 5

Soit f une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle I et soit a un élément de I. Montrer que la primitive G de f sur I qui s'annule en a est définie sur I par :
$G(x) = F(x) - F(a)$.

III- Calculs sur les primitives :

Activité 1

Soient f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I.

1- Monter que les fonctions f et g admettent des primitives sur I.

2- Soient F et G deux primitives respectives de f et g sur I.

a- Montrer que la fonction (F+G) est une primitive de (f+g) sur I.

b- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ Montrer que la fonction αF est une primitive de αf sur I.

Théorème

Si F et G sont deux primitives respectives de f et g sur I, alors (F+G) est une primitive de (f +g) sur I et αF est une primitive de αf sur I.

Primitives usuelles:

Les tableaux suivants donnent les primitives de quelques fonctions usuelles et de fonctions ayant la forme d'une dérivée connue.

- k désigne un réel quelconque.

f(x)=…	Primitive F(x)=…	Intervalle I= …
c (constante)	cx+k	IR
x	$\frac{1}{2}x^2+k$	IR
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+k$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
x^n n entier, $n\leq -2$ ou $n\geq 1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+k$	$\begin{cases}\text{IR si } n\geq 1\\ ]-\infty,0[\text{ ou }]0,+\infty[\text{ si } n\leq -2\end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k$	$]0,+\infty[$

- u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I et k un réel quelconque.

Forme de la fonction	Primitive	Conditions de validité
u'	u+k	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+k$	$u(x)\neq 0$ pour tout x de I
$u^n u'$ $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+k$	Lorsque $n\leq -2$ $u(x)\neq 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+k$	$u(x)>0$ pour tout x de I

Activité 2

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une primitive en précisant l'intervalle sur lequel elle est définie :

$f:x\mapsto 3x^4-2x^3-1$; $f:x\mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}+1$; $f:x\mapsto \frac{2}{x^3}$

$f:x\mapsto -2(1-2x)^4$; $f:x\mapsto \frac{-3}{(2-3x)^3}$; $f:x\mapsto \frac{-4x}{(1-2x^2)^2}$

$f:x\mapsto x^2(2+x^3)^2$; $f:x\mapsto \frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; $f:x\mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{4-x}}$

Activité 3

1- Donner une primitive de chacune des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^3}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^4}$ définies sur $I =]1,+\infty[$.

2- f est la fonction définie sur I par : $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^4}$.

Trouver des réels α et β tels que pour tout x de I : $f(x) = \dfrac{\alpha}{(x-1)^3} + \dfrac{\beta}{(x-1)^4}$.

En déduire une primitive de f sur I.

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=\dfrac{4}{x^2+1}$

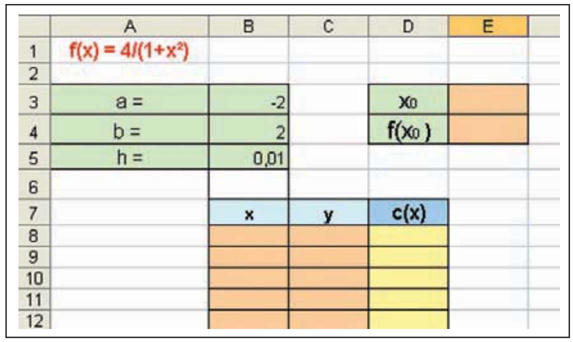
On se propose de dresser un tableau ‘dynamique’ contenant les coefficients directeurs des droites (AM) où A et M sont deux points de la courbe de f d’abscisses respectives : x_0 et x (x_0 fixé et x varie dans un intervalle [a , b] suivant un pas h >0.

Les valeurs calculées dans ce tableau, changeront en fonction de a, b, h et de x

Le but est de mettre en évidence la convergence des valeurs vers $f'(x_0)$ pour différentes valeurs de x_0 de l’intervalle [a , b]

<u>Etape 1 :</u> Préliminaire

Dans la cellule A1 taper : « $f(x) = 4/(x^2+1)$ »
Dans la cellule A3 taper : « a = »
Dans la cellule A4 taper : « b = »
Dans la cellule A5 taper : « h = »
Dans la cellule D3 taper : « x_0 = »
Dans la cellule D4 taper : « $f(x_0)$ = »
Dans la cellule B7 taper : « x »
Dans la cellule C7 taper : « y »
Dans la cellule D7 taper : « c(x) »

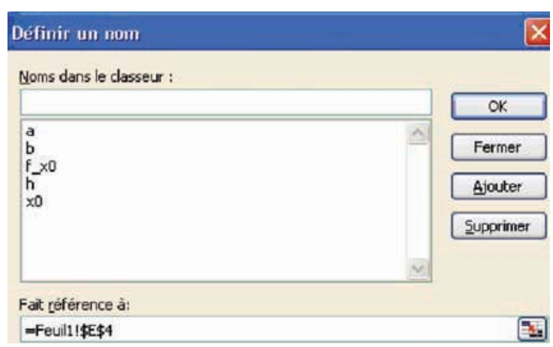


<u>Etape 2 :</u> Définir les variables a, b et le pas h

* Sélectionner la cellule B3
Dans le menu : ‘Insertion’ sélectionner la commande ‘nom’ puis ‘définir’.
Taper la lettre : a ; puis valider

* Sélectionner la cellule B4
Dans le menu : ‘Insertion’ sélectionner la commande ‘nom’ puis ‘définir’.
Taper la lettre : b ; puis valider

* Sélectionner la cellule B5
Dans le menu : ‘Insertion’ sélectionner la commande ‘nom’ puis ‘définir’.
Taper la lettre : h ; puis valider



* Sélectionner la cellule E3
Dans le menu : ‘Insertion’ sélectionner la commande ‘nom’ puis ‘définir’.
Taper : x0 ; puis valider

* Sélectionner la cellule E4
Dans le menu : ‘Insertion’ sélectionner la commande ‘nom’ puis ‘définir’.
Taper : fx0 ; puis valider

Ainsi les variables a, b et h, et x0 contiendront respectivement les valeurs introduites dans les cellules B3, B4, B5 et E3.

Etape 3 : Calcul des coefficients directeurs de la droite (AM)

* Choix des valeurs de a, b, h et x_0

A titre d'exemple : dans la cellule B3 taper -5
dans la cellule B4 taper 5
dans la cellule B5 taper 0.1
dans la cellule E3 taper 1

* Dans la cellule E4 taper : « =(4/(x0^2+1) »

* Dans la cellule B8 taper : « =a »

* Dans la cellule B9 taper la formule : « = SI(ET(B8<>"";B8+h<=b);B8+h;"") »

(i.e. : si la cellule précédente n'est pas vide et x <b alors ajouter h à son contenu et l'écrire dans la cellule courante ; si non ne rien écrire dans la cellule courante)

Copier la cellule B9 et la coller dans les cellules : de B10 à B150 (on obtient alors les différentes valeurs de x)

* Dans la cellule C8 taper : « SI(B8<>"";4/(B8^2+1);"") »

(c'est-à-dire : si la cellule x n'est pas vide afficher f(x), si non ne rien afficher)

Copier la cellule C9 et la coller dans les cellules : de C10 à C150 (on obtient alors les différentes valeurs de y = f (x))

* Dans la cellule D8 taper : « =SI(ET(B8<>"";B8<>x0);(C8-fx0)/(B8-x0);"") »

(c'est à dire. : si la cellule x n'est pas vide et contient un réel différent de x0 alors afficher c(x), si non ne rien afficher)

Copier la cellule C9 et la coller dans les cellules : de D10 à D150 (on obtient alors les différentes valeurs du coefficient directeur c(x)

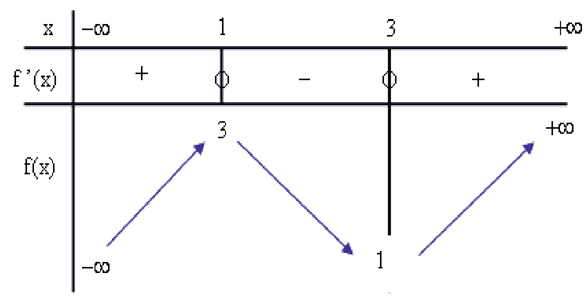
	A	B	C	D	E	F
1	f(x) = 4/(1+x²)					
2						
3	a =	-5		x_0	1	
4	b =	5		$f(x_0)$	2	
5	h =	0,1				
6						
7		x	y	c(x)		
8		-5	0,153846	0,307692		
9		-4,9	0,159936	0,311875		
10		-4,8	0,166389	0,31614		
11		-4,7	0,173235	0,320485		
12		-4,6	0,180505	0,32491		
13		-4,5	0,188235	0,329412		
14		-4,4	0,196464	0,333988		
15		-4,3	0,205233	0,338635		
16		-4,2	0,214592	0,343348		
17		-4,1	0,224593	0,348119		
18		-4	0,235294	0,352941		

Etape 4 : Modification des données

Modifier l'une des valeurs a, b, h ou x_0 entraîne le changement de toutes les valeurs calculées dans le tableau, donc on pourra choisir des valeurs de a et b proches de x_0 et un pas h réduit pour voir de proche en proche la convergence des valeurs vers $f'(x_0)$

Exercices et problèmes

1- Pour chacune des questions ci-dessous, une au moins des réponses proposées a, b et c est correcte.

Question	a	b	c
1) Pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$ $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$ $f'(x)=\ldots$	$\dfrac{2}{x^2}$	$-\dfrac{2}{x^2}$	$1+\dfrac{2}{x}$
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^4}{4}$ $f'(x)=\ldots$	$\dfrac{x^4}{5}-\dfrac{x^3}{4}$	$\dfrac{x^6}{6}-\dfrac{x^5}{5}$	x^4-x^3
3) Pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$ $f(x)=\dfrac{2}{x^2}-3x+5$ Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est : …	$y=-7x+3$	$y=-7x+11$	$y=x+3$
4) On donne le tableau de variations d'une fonction f  Et soit F une primitive de f sur IR	F est croissante sur IR	F' est positive sur IR	F est croissante sur $[1,3]$

2- Pour chacune des questions ci-dessous, une au moins des réponses proposées a, b et c est correcte.

Question	a	b	c
1) Une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x+5-\dfrac{2}{x^2}$ sur $\left]0,+\infty\right[$ est la fonction $F : x \mapsto$	$x^2-\dfrac{1}{x}$	$x^2+5x-\dfrac{1}{x}$	$x^2+5x+\dfrac{2}{x}$
Une primitive de la fonction $f : x \mapsto 3\sqrt{x}$ sur IR_+ est la fonction $F : x \mapsto$	$\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$	$x\left(2\sqrt{x}+1\right)$	$2x\sqrt{x}$
2) La fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{12}\left(x^3-1\right)^4$ Est une primitive sur IR de la fonction $f : x \mapsto$	$\dfrac{1}{3}\left(x^3-1\right)^3$	$x^2\left(x^3-1\right)^3$	$\dfrac{1}{12}x^2\left(x^3-1\right)^3$
3) La fonction $F : x \mapsto \sqrt{x^2-2x+5}$ Est une primitive sur IR de la fonction $f : x \mapsto$	$\dfrac{x-1}{2\sqrt{x^2-2x+5}}$	$\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$	$\dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

3 - Dans chacun des cas suivants, prouver que f est dérivable sur l'intervalle I et déterminer sa fonction dérivée :

a) $f : x \mapsto x^2 - 5x - 1$ $\quad I = \mathbb{R}$; b) $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x + 1$ $\quad I = \mathbb{R}$

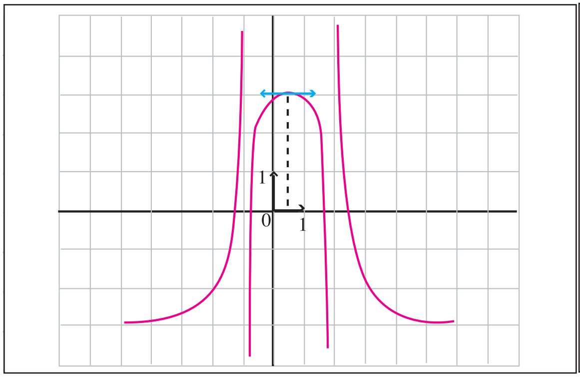
c) $f : x \mapsto -2x^4 + 3x^3 - x + 1$ $\quad I = \mathbb{R}$; d) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ $\quad I =]2, +\infty[$

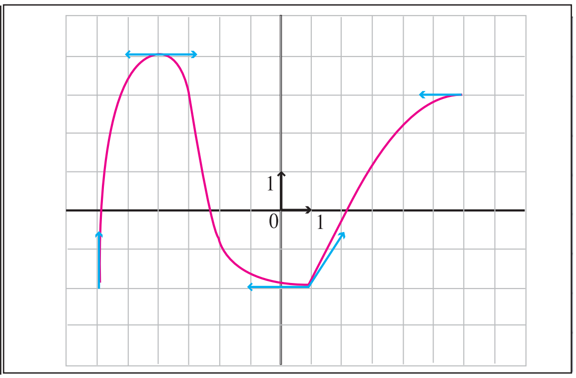
e) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+3}$ $\quad I =]-3, +\infty[$; f) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$ $\quad I = \mathbb{R}$

g) $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+1}{2x^2+x+2}$ $\quad I = \mathbb{R}$; h) $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{\sqrt{x}}$ $\quad I =]0, +\infty[$

i) $f : x \mapsto 2x^2\sqrt{x} - x$ $\quad I =]0, +\infty[$

4 - Dans chacun des cas suivants, déterminer graphiquement les intervalles sur lesquels f est définie, continue et dérivable, puis dresser le tableau de variations de f





5 - Etudier les variations de chacune des fonctions suivantes sur son domaine de définition :

a) $f : x \mapsto x^2 - x - 1$ $\quad$ b) $f : x \mapsto x^3 - x^2 + \dfrac{1}{3}x + 1$ $\quad$ c) $f : x \mapsto -x^3 + 3x + 1$

d) $f : x \mapsto 3x^4 - 2x^2 + 1$ $\quad$ e) $f : x \mapsto \dfrac{-7}{x+2}$ $\quad$ f) $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+3}$

g) $f : x \mapsto \dfrac{4}{x^2 - 2x}$ $\quad$ h) $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{x^2 - x + 1}$ $\quad$ i) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x + 1}$

6 - Dans chacun des cas suivants, vérifier que f est dérivable sur I et déterminer sa fonction dérivée :

a) $x \mapsto \sqrt{-2x+5}$; $I = \left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right[$ $\quad$ b) $x \mapsto x - \sqrt{x^2 - 16}$; $I =]4, +\infty[$

c) $x \mapsto \cos 3x$; $I = \mathbb{R}$ $\quad$ d) $x \mapsto \sin 2x$; $I = \mathbb{R}$

7 - Dans chacun des cas suivants, déterminer un intervalle sur lequel f est dérivable ainsi que sa fonction dérivée :

a) $x \mapsto (1 - \sin x)\sin x$ $\quad$ b) $x \mapsto (1 + \cos x)\sin x$

c) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$ $\quad$ d) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos 2x}$

8 - f et g étant les fonctions définies sur IR par $f(x) = x(2+x)$ et $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x$

a) Calculer f'(x) et g'(x) puis dresser les tableaux de variation de f et de g.
b) On désigne par C et C' les courbes représentatives respectives de f de g dans un repère cartésien $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Montrer C et C' admettent en O la même tangente T.

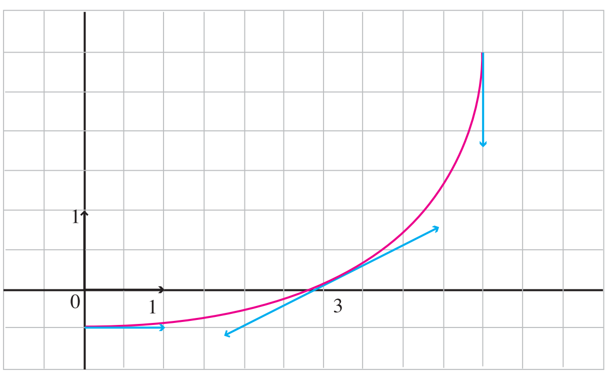
c) Donner une équation cartésienne de T.

9 - Dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère la parabole Γ d'équation :

$y = ax^2 + bx + c$.
1- Soient A et B les points de Γ d'abscisses respectives 0 et 2. Montrer que la tangente à la parabole au point C d'abscisse 1 est parallèle à la droite (AB).
2- Soient M et N les points de Γ d'abscisses respectives α et β. Montrer que la tangente à la parabole au pt P d'abscisse $\frac{\alpha+\beta}{2}$ est parallèle à la droite (MN).

10 - Soient v une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et u une fonction dérivable sur v(I)
En appliquant le théorème *'dérivée d'une fonction composée'*, démontrer les deux résultats suivants :
* Si u et v ont le même sens de variation, alors $f = u \circ v$ est croissante.
* Si u et v ont des sens de variation différents, alors $f = u \circ v$ est décroissante.

11 - On donne sur le graphique suivant la courbe représentative C d'une fonction f.



a- Justifier que f réalise une bijection de $[0,5]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Etudier graphiquement la dérivabilité de sa fonction réciproque f^{-1} sur J.

c- Déterminer $\left(f^{-1}\right)'(0)$

12 - Soit f la fonction définie sur $IR \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

a) Montrer que f est croissante sur chacun des intervalles de son domaine de définition.

b) En déduire le sens de variation de la fonction g définie pour $x > 1$ par $g(x) = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

c) On pose $h(x) = \frac{x+2}{-x+1}$ pour $x > 1$; Montrer que $h(x) = f(\frac{1}{x})$
En déduire le sens de variation de h sur $]1,+\infty[$

13- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=ax+b+\dfrac{2}{x-1}$, où a et b sont deux réels.

C désigne la courbe représentative de f .
1- Déterminer a et b pour que C passe par le point A(2,3) et admette en ce point une tangente d'équation : $y=-x+5$.
2- Pour les valeurs trouvées de a et b, étudier les variations de f.

14- Soit f la fonction définie sur $IR\setminus\{-1\}$ et dont le tableau de variations, incomplet, est le suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	-6	↘	.... ‖ $+\infty$	↘	2	↗	....

On admet que f est définie par
$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$.
1- Calculer f '(x) en fonction de a, b et c.
2- En vous aidant du tableau de variations de f, montrer que l'on a : a = 1, b = -1 et c = 4 .
3- Compléter alors le tableau de variations de la fonction f.

15- On considère la fonction f définie sur $]-\infty,4]$ par $f(x)=x\sqrt{4-x}$

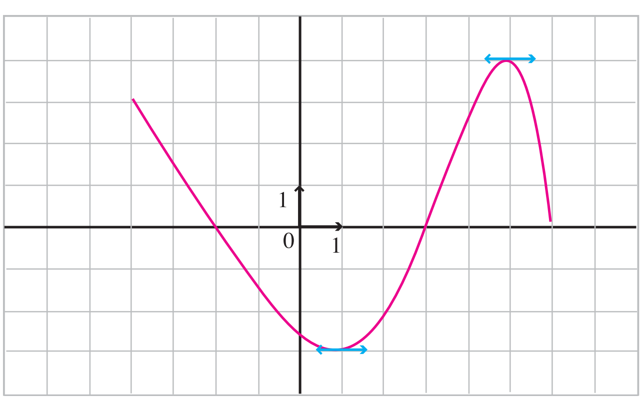
On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse nulle.
2- Déterminer le point de C en lequel la tangente est perpendiculaire à T.

16 - Une entreprise fabrique des objets. Le profit unitaire (le profit réalisé par objet fabriqué) est exprimé en dinars en fonction de la durée x nécessaire à la fabrication d'un objet par $p=4\sqrt{x}-x$.

1- Etudier les variations de la fonction $f : x\mapsto 4\sqrt{x}-x$.
2- Pour quelles valeurs de x le profit unitaire est-il positif ?
3- Pour quelles valeurs de x le profit unitaire est-il maximal ? Quel est alors ce profit ?

17- La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f ' dérivée d'une fonction f définie sur [-4 , 6] ; Soit C la courbe représentative de f.



1- Dresser le tableau de variation de f sur [-4 , 6].
2- Préciser les coefficients directeurs des tangentes à C aux points d'abscisses : -4, -2, 1, 3, 5 et 6.
3- Donner une allure possible de C sachant que :
$f(-4)=-1,\ \ f(-2)=4,\ \ f(1)=2,$
$f(3)=-1,\ \ f(5)=2\ \text{ et }\ f(6)=4$.

18 - Un artisan fabrique des objets dont le nombre x varie de 1 à 20 par semaine.
Le prix de vente unitaire P d'un objet, en dizaines de dinars, vérifie la relation
$P(x) = -x + 20$.

1- L'artisan fabrique et vend 8 objets. Calculer le prix unitaire de ces objets puis leur montant de vente (exprimé en dinars).
2- Vérifier que la recette R, en dizaines de dinars obtenue par la vente de x objets est
$R(x) = -x^2 + 20x$.
3- Etudier les variations de R sur l'intervalle [1 , 20].
4- En déduire le nombre d'objets à vendre pour obtenir la recette maximale.
Calculer cette recette en dinars.

19 - Une usine fabrique et vend un produit dont la quantité journalière exprimée en tonnes, peut varier de 0 à 5.
Toute la production étant vendue, le bénéfice exprimé en milliers de dinars est donné en fonction de la quantité x produite, par la fonction : $B(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 34$.

1- Calculer le bénéfice, en dinars pour 5 tonnes de produit puis pour une tonne de produit
2- Calculer B'(x) et étudier son signe
3- Etudier la fonction B sur l'intervalle $[0,5]$
4- Pour quelle quantité de produit le bénéfice est-il maximal ?
6- A partir de quelle quantité la fabrication est-elle rentable ?

20 - *(Notion d'élasticité)*
Une étude effectuée sur un certain article a conduit à établir la relation :
$f(p) = \dfrac{10^5 \times 6p}{36p^2 - 100}$ pour $p \in [2, +\infty[$ où p représente le prix du produit en DT et f(p) la demande liée à ce produit pour le prix p.

1- Calculer la demande pour p = 0, p = 2,5 et p = 15
2- Montrer que f est décroissante sur $[2, +\infty[$.
3- On suppose que le prix p initialement égal à 2.5d , subit une augmentation de 1%.
   a- Calculer le nouveau prix p_1 et la demande correspondant à ce prix.
   b- Déduire le pourcentage de variation de la demande, consécutive à l'augmentation de ce prix.
4- On appelle **élasticité** de la demande par rapport au prix, le nombre

$$E(p) = p \times \frac{f'(p)}{f(p)} \quad \text{pour} \quad p \in [2, +\infty[.$$

On admettra que ce réel donne une bonne approximation du pourcentage de variation de variation de la demande, pour une augmentation de 1% d'un prix donné.
   a- Déterminer en le justifiant, le signe de E(p) ; interpréter le résultat.
   b- Montrer que $E(p) = 1 - \dfrac{72p^2}{36p^2 - 100}$.
   c- Dresser le tableau de variation de E.
   d- Calculer la valeur p_0 pour laquelle l'élasticité est de -1,25.
   e- Comment évolue la demande quand le prix passe de 5 à 5,5DT ?

21 - Soit la fonction : $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$

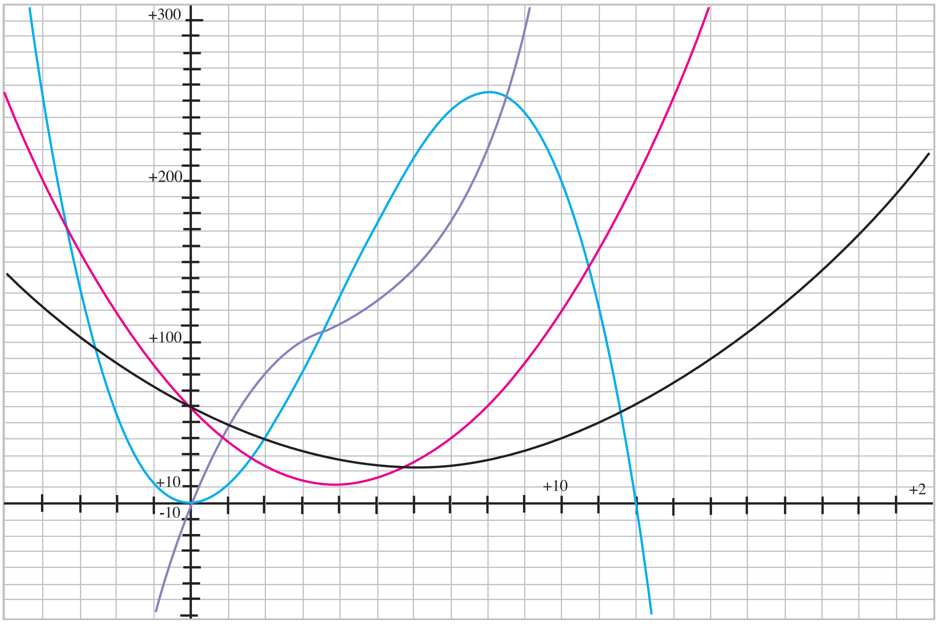
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- Vérifier que les fonctions f et f 'sont dérivables sur IR.
2- Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse nulle
3- Etudier les positions de C_f par rapport à T.
4- Dresser le tableau de signe de la fonction f ''. En déduire que C_f admet n point d'inflexion dont-on donnera les coordonnées.

22 - f est la fonction définie sur IR par $f(x) = x^3 - 30x^2 + 112$.
1- Dresser le tableau des variations de f.
3- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions.
Avec la calculatrice, donner l'arrondi au dixième ou la valeur exacte de chaque solution.
4- En déduire le signe de f.
5- Calculer la dérivée g' de la fonction définie sur IR par $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 10x^3 + 112x - 148$
Que peut-on en déduire pour g ?
6- Dresser le tableau des variations de g sur IR.

23 - Une entreprise estime que le coût total, en milliers de dinars, de production de x tonnes d'objets s'exprime, en fonction de x, par : $C(x) = x^3 - 12x^2 + 60x$.
1- Etudier les variations de la fonction $x \mapsto C(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.
Le coût moyen de fabrication est donné par $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$ (pour $x > 0$).
2- Quel est le coût moyen de fabrication de 500 kg ?
3- Exprimer $C_M(x)$ en fonction de x, puis étudier les variations de la fonction $x \mapsto C_M(x)$ sur $[0 ; +\infty[$. On note $C_m(x)$ le coût marginal de x, et on admet que $C_m(x) = C'(x)$.
4- Etudier les variations de la fonction $x \mapsto C_m(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.
5- L'entreprise vend sa production 60 000 dinars la tonne. On note B(x) le bénéfice réalisé pour la vente de x tonnes.
a- Vérifier que $B(x) = -x^3 + 12x^2$.
b- Etudier les variations de la fonction B.
c- Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il maximal ? Vérifier alors que, pour cette valeur de x, le coût marginal est égal au prix de vente unitaire.
6- On donne sur le graphique ci- dessous, les courbes représentatives des fonctions C, C_M, C_m et B
a- Identifier chacune de courbes.
b- Déterminer l'abscisse α du point d'intersection des courbes de C_M et C_m.
c- Que représente $C_M(\alpha)$ pour la fonction C_M ?

Exercices et problèmes



24 - Dans chacun des cas suivants, donner une primitive de f sur l'intervalle I :

$f(x)=2x^2-3x+1 \quad I=\mathbb{R}$; $f(x)=-x^3+x-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad I=]0,+\infty[$

$f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{2x-1}} \quad I=\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$; $f(x)=\dfrac{2-x}{(x^2-4x+1)^2} \quad I=]-\infty,0]$

$f(x)=(x-1)(2x^2-4x+1) \quad I=\mathbb{R}$

25 - f est la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{(2x+1)^3}$

a- Vérifier que pour tout réel positif x, $f(x)=\dfrac{1}{2(2x+1)^2}-\dfrac{1}{2(2x+1)^3}$.

b- En déduire une primitive de f sur $[0,+\infty[$.

26 - Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-2[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+4x+6}{(x+2)^2}$.

a- Justifier que f admet une primitive sur $]-\infty,-2[$.

b- Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x de $]-\infty,-2[$, $f(x)=a+\dfrac{b}{(x+2)^2}$.

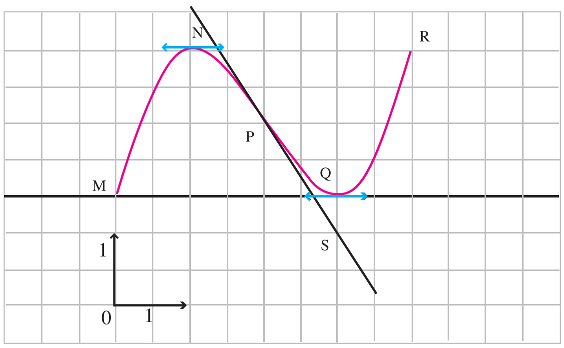
c- En déduire la primitive F de f sur $]-\infty,-2[$, qui prend pour valeur 1 en -3.

27 - Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^3-5x^2+4x+2}{(x-1)^2}$

a- Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x de $]1,+\infty[$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

b- En déduire la primitive F de f qui s'annule en 2.

28 - Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 4] dont la représentation graphique, dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$, est la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous.



Les points M, N, P, Q et R appartiennent à $\mathscr{C}$ et leurs coordonnées sont respectivement : $\left(0,\frac{3}{2}\right)$, $\left(1,\frac{7}{2}\right)$ $\left(2,\frac{5}{2}\right)$, $\left(3,\frac{3}{2}\right)$ et $\left(4,\frac{7}{2}\right)$.

La courbe $\mathscr{C}$ admet en chacun des points N et Q une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

La droite Δ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point P ; elle passe par le point S de coordonnées (3 ; 1).

1- a) Donner f '(1), f '(2) et f '(3).

b) Déterminer une équation de la droite Δ.

2- Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation f(x) = 3 sur l'intervalle [0 ; 4].

3- f est la dérivée d'une fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 4].
En justifiant la réponse, donner le sens de variation de F.

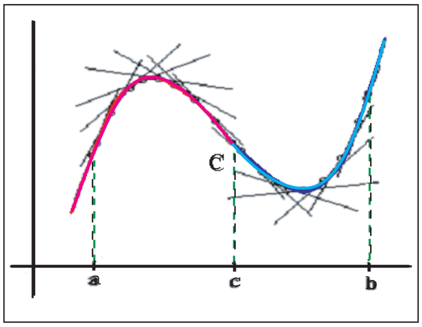
4- a) Pour tout $x \in [0 ; 4]$, $f'(x) = \alpha\ (x-1)(x-3)$, α étant une constante réelle.
Déterminer α à l'aide des résultats de la question 1- a).

b) Vérifier que pour tout $x \in [0 ; 4]$, $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2}$ puis déterminer l'expression de f(x) pour $x \in [0 ; 4]$.

Math culture

Interprétation graphique du signe de la dérivée seconde

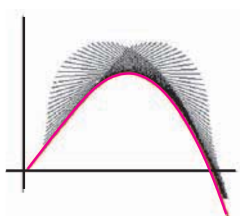
Soit f une fonction admettant une dérivée seconde sur l'intervalle [a,b]et soit C_f la représentation graphique ci-contre.



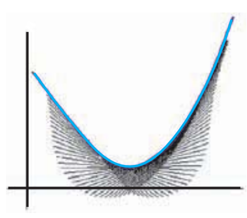
Les pentes des tangentes successives à C_f en un point M d'abscisse x décroissent. lorsque x varie de a à c, puis croissent lorsque x varie de c à b.

Or la pente des tangentes est donnée, point par point, par le nombre dérivé f '(x) ; donc si la pente décroît, la dérivée de la fonction f ', c'est-à-dire f " , est négative pour tout x de [a,c] et si la pente croit, f " est positive, pour tout x de [c,b].

Sur l'intervalle [a,c] on dira que la courbe C_f admet une concavité dirigée vers le bas ou aussi que C_f est concave.



Sur l'intervalle [c,b] on dira que la courbe C_f admet une concavité dirigée vers le haut ou aussi que C_f est convexe.



Ainsi la courbe C_f change de concavité au point de C(c ,f(c)), dans ce cas C est un point d'inflexion de C_f .

LAGRANGE Joseph Louis, Comte de français, 1736-1813

Né à Turin (Italie), il y enseigna les mathématiques dès l'âge de 19 ans. Ses principaux traités mathématiques résident dans la Théorie des fonctions analytiques (1797). Lagrange simplifia les notations fonctionnelles en introduisant le symbole f ' pour la dérivée d'une fonction ainsi que f ", f "'. Il appelle fonction primitive la fonction f dont dérivent f ', f ", etc., appelées respectivement première fonction dérivée, seconde fonction dérivée, etc.

On entendait par primitif à l'époque - indépendamment de tout sens mathématique- ce qui n'est dérivé d'aucun autre et par dérivé (du latin rivus = ruisseau) celui qui provient d'un autre appelé primitif. On tourne un peu en rond, mais c'est clair... notons que le substantif primitive ne prendra sa place définitive qu'au début du 20è siècle.

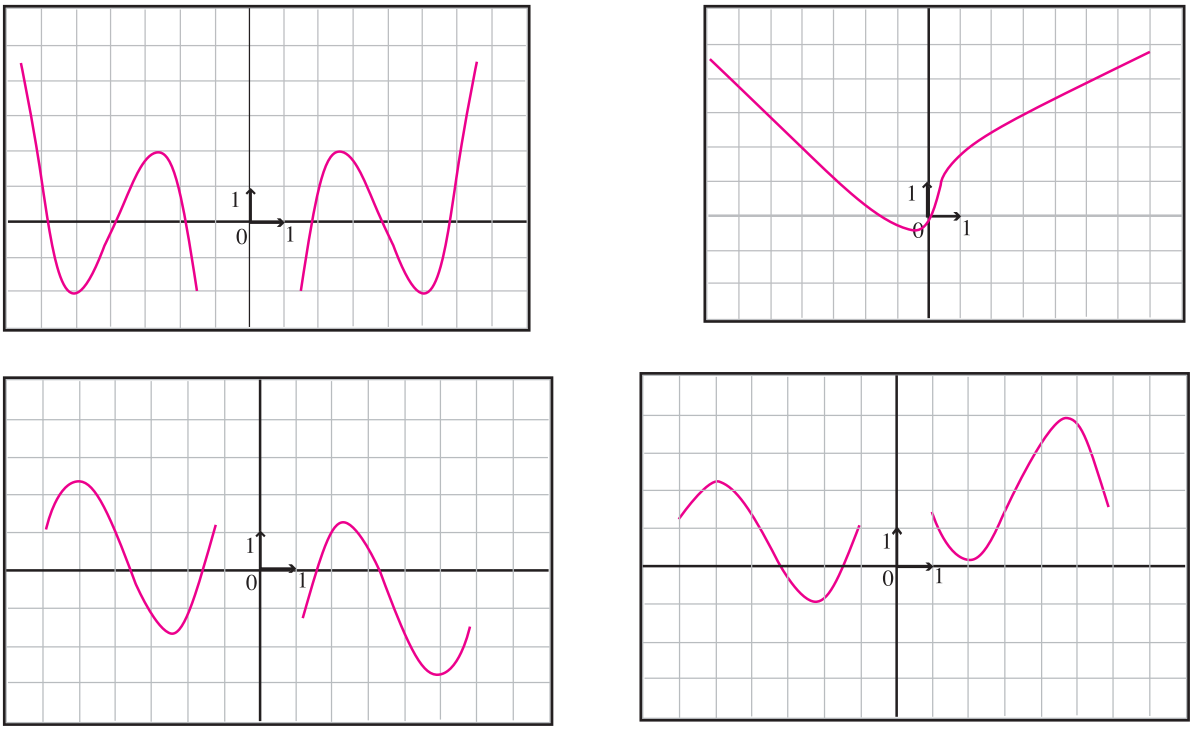
Chapitre 3

ETUDE DE FONCTIONS

Pour commencer

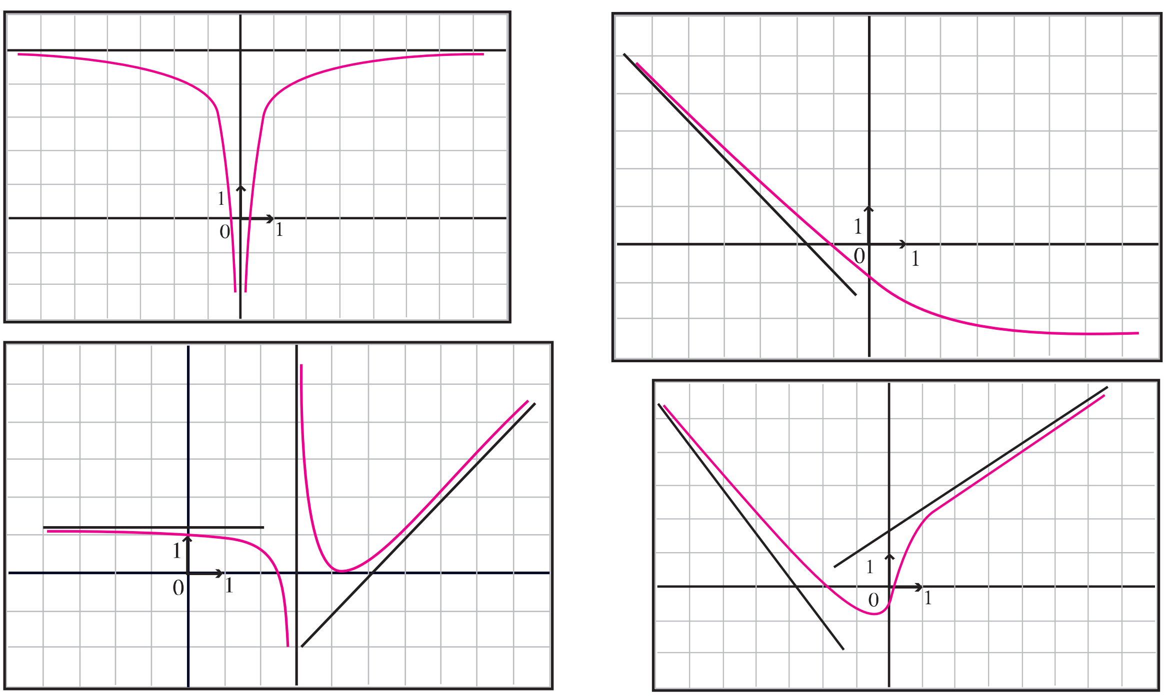
Activité 1

Parmi les courbes suivantes, identifier celle qui représente une fonction paire et celle qui représente une fonction impaire :



Activité 2

Déterminer dans chacun des cas suivants, les asymptotes à la courbe représentée et donner une équation cartésienne de chacune de ces asymptotes.



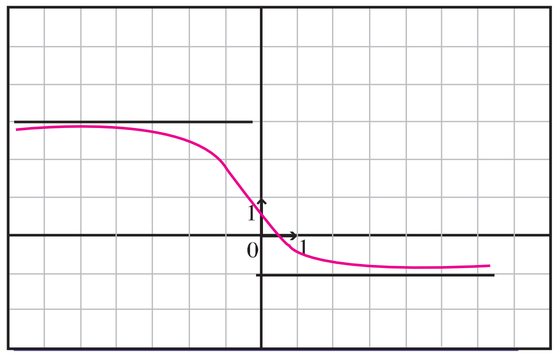
Activité 3

La fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-1}$ a pour représentation graphique une courbe C dans un repère cartésien. Confirmer ou nier chacune des propositions suivantes en donnant une brève justification :

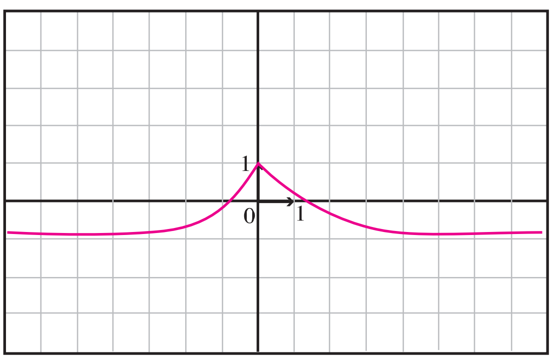
- La droite d'équation $y = x+1$ est asymptote à C en $+\infty$.
- La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à C.
- La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à C.

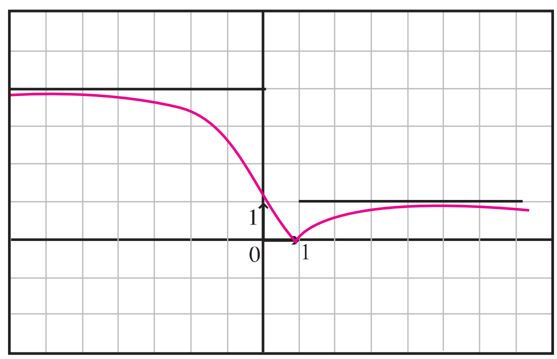
Activité 4

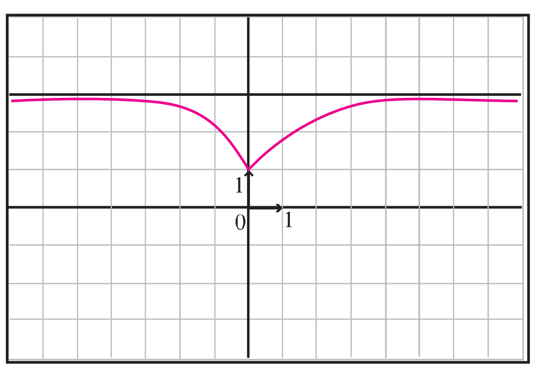
On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f



Identifier parmi les représentations graphiques suivantes, celle de la fonction $x \mapsto |f(x)|$.





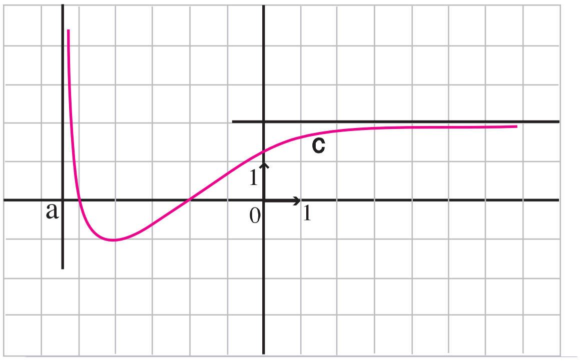


I- Revoir:

1) Asymptotes parallèles aux axes :

Activité 1

Soit f la fonction dont la courbe représentative C est donnée ci-dessous :



La droite d'équation y = a est asymptote horizontale à la courbe C si : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$

La droite d'équation x = a est asymptote verticale à la courbe C si : $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

1- Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to a^+} f(x)$.

2- Préciser les asymptotes à C .

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $IR \setminus \{2;-2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4}$

Calculer la limite de f :

- à droite et à gauche en 2.
- à droite et à gauche en -2.
- en $-\infty$ et $+\infty$.

Interpréter graphiquement les résultats.

2) Asymptote oblique :

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par

$f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x - 2}$

C étant sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x - 2}$

2- Montrer que la droite $\Delta : y = 2x - 1$ est asymptote à la courbe C au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

La droite d'équation y = ax +b $(a \neq 0)$ est asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$) si :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

(respectivement $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$)

3) Branches paraboliques :

Activité 1

1- Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+1}$

Montrer que la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-2x^2-1$.

Montrer que la courbe représentative de g admet deux branches paraboliques de direction l'axe des ordonnées l'une au voisinage de $+\infty$ et l'autre au voisinage de $-\infty$.

Soient f une fonction admettant en l'infini une limite infinie et C sa courbe représentative.

* Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, alors C admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

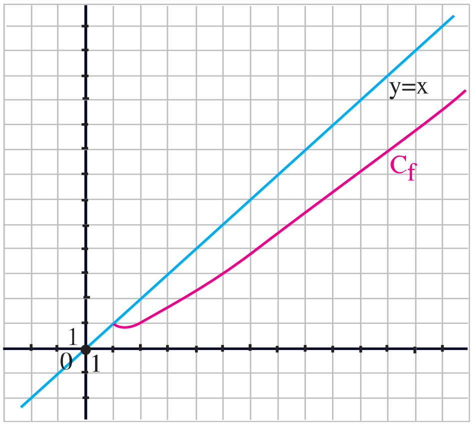
* Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$, alors C admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=x-\sqrt{x-1}$.

On donne sa représentation dans le graphique ci-contre.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$.

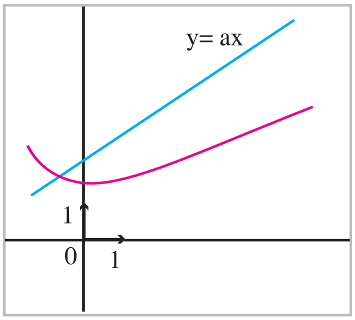


Soient f une fonction admettant en l'infini une limite infinie et C sa courbe représentative.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-ax=\pm\infty$

ou si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\ (a\neq 0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-ax=\pm\infty$

alors C admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation y = ax.



Activité 4

Etudier les branches infinies de la courbe de chacune des fonctions suivantes :

$f: x\mapsto x^4-2x^2+5$ $\qquad g: x\mapsto x\sqrt{x}$

$h: x\mapsto x+2\sqrt{x}$ $\qquad k: x\mapsto \frac{x^3+1}{x+1}$

II- Exemples d'étude de fonction polynôme:

Activité 1

Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x - 1$

C désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- Etudier les variations de f .

2- Montrer que la courbe C admet un point d'inflexion I dont on donnera les coordonnées.

3- Vérifier que I est un centre de symétrie de C.

4- Etudier les branches infinies de C.

5- Tracer la courbe C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

6- Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = x^3 - 3x + 1$.

a) Vérifier que la courbe de g se déduit de celle de f par une translation que l'on précisera.

b) Tracer dans le même repère la courbe C' de la fonction g.

> Soient f une fonction définie sur un domaine D et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé
> * Le point I(a,b) est un centre de symétrie de C si et seulement si Pour tout x de D on a
> $$\begin{cases} (2a - x) \in D \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

> Dans un repère, si C est la représentation graphique d'un fonction f alors la courbe représentative de f+k (avec k un réel)est l'image de C par la translation de vecteur $k\vec{j}$.

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto 2x^4 - 4x^2 + 1$

C désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- Montrer que la fonction f est paire.

2- Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement les résultats.

3- a- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = 8x(x^2 - 1)$.

b- Dresser le tableau de variation de f.

4- Tracer la courbe C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5- a- Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du réel k, le nombre de solutions de l'équation: $f(x) = k$.

b- Résoudre dans IR l'équation f(x) =1 et en déduire les solutions de l'inéquation $f(x) > 1$.

Activité 3

Une entreprise décide de fabriquer et de commercialiser un produit.

Le coût de production exprimé en milliers de dinars, en fonction du nombre x de tonnes produites est modélisé par : $C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x$, avec $x \in [0, 20]$.

1- Après une étude de marché, l'entreprise espère vendre son produit à 84 milles dinars la tonne.

a- Déterminer, en fonction du nombre x de tonnes produites, la recette R(x) en milliers de dinars espérée par cette entreprise.

b- En étudiant la position relative des courbes Γ et Δ représentant respectivement les fonctions C et R, déterminer l'intervalle de production dans lequel l'entreprise assure un bénéfice.

c- Tracer dans le même repère les courbes Γ et Δ. (sur l'axe des abscisses l'unité désigne une tonne et sur l'axe des ordonnées, l'unité désigne 100 milles dinars).

d- Déterminer graphiquement, à une tonne près, le nombre de tonnes à produire pour assurer un bénéfice maximal.

Confirmer le résultat précédent par le calcul.

2- Pour affaiblir la concurrence, l'entreprise décide de vendre son produit le moins cher possible tout en assurant un bénéfice.

Soit $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ le coût moyen de fabrication.

a- Exprimer $C_m(x)$ en fonction de x. Etudier les variations de C_m sur l'intervalle $[0, 20]$.

b- En déduire la valeur x_0 qui assure un coût moyen minimal. Quel est alors le prix de vente d'une tonne adopté ?

III- Exemples d'étude de fonction rationnelle

Activité 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{x^2-2x}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- Déterminer l'ensemble de définition de f.

2- Montrer que la droite D : x = 1 est un axe de symétrie pour la courbe C.

3- Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ et interpréter graphiquement les résultats.

4- a- Montrer que f est dérivable en tout point de $IR \setminus \{0, 2\}$ et que $f'(x) = \dfrac{2(1-x)}{(x^2-2x)^2}$.

b- Dresser le tableau de variation de f.

5- Tracer la droite D et la courbe C.

4- Soit la fonction g définie sur $IR \setminus \{-1, 1\}$ par $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

a- Vérifier que la fonction g est paire.

b- Montrer que pour tout x de $IR \setminus \{-1, 1\}$, g(x) = f (x+1)

c- En déduire la construction de la courbe C' de g.

Dans un repère , si C est la représentation graphique d'une fonction f alors la courbe représentative de la fonction: $x \mapsto f(x-k)$ (avec k un réel) est l'image de C par la translation de vecteur $k\vec{i}$.

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+3x+3}$

1- a- Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)^2}{(x^2+3x+3)^2}$.

b- Déduire que f est strictement croissante sur IR.

c- Calculer : $f(0), f(-3)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

d- Dresser le tableau de variations de f .

2- a- Montrer que la droite D d'équation y = x – 3 est asymptote à la courbe C de f au voisinage de $+\infty$.

b- Montrer que la droite D coupe la courbe C en un seul point I dont-on donnera les coordonnées.

c- Démontrer que I est un centre de symétrie pour C.

3- Tracer D et C dans un même repère.

4-a- Tracer dans le même repère la courbe C' de la fonction $|f|$.

b- Justifier graphiquement que la fonction $|f|$ est dérivable en 0.

Activité 3

Une entreprise fabrique x milliers d'objets avec $0 \le x \le 15$.

Le coût marginal en dinars de cette production est modélisé sur $[0,15]$

par $C_m(x) = 3x^2 - 36x + 750$.

1- Sachant que les coûts fixes s'élèvent à 200 dinars, déterminer l'expression du coût total C(x).

2- La fonction coût moyen C_M est définie sur $]0,15]$ par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

a- Déterminer l'expression de $C_M(x)$.

b- Calculer $C'_M(x)$ et vérifier que pour tout x de $]0,15]$ on a :

$$C'_M(x) = \frac{2(x-10)(x^2+x+10)}{x^2}.$$

c- Etudier le signe de $C'_M(x)$ et dresser le tableau de variation de C_M sur $[0,15]$.

d- Combien d'objets faut-il fabriquer pour que le coût moyen soit minimal ?

e- Calculer alors ce coût moyen et le coût marginal correspondant.

3- a- Tracer les courbes représentatives de C_m et C_M dans un même repère orthogonal (unités : 1cm pour un millier d'objets en abscisses et 1cm pour 100 dinars en ordonnées).

b- Comparer graphiquement le coût marginal et le coût moyen.

Activité 4

Soient la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{x^2-2x}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1- Montrer que f est croissante sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.

2- Dresser le tableau de variation de f.
3- Montrer que le point I (1 , 0) est un centre de symétrie pour la courbe C.
4- Déterminer les asymptotes à C.
5- Tracer la courbe C.
6- On se propose de construire la courbe C'de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$.

a)Vérifier que $g(x-1) = 2 + f(x)$ et en déduire une relation entre C et C'.

b)Construire C' dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

IV- Exemples d'étude de fonction contenant des racines carrées

Activité 1

Soient la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1- a- Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
b- Vérifier que la droite $\Delta : x = -1$ est un axe de symétrie de la courbe C.

2- a- Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que: $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$.

b- Préciser le sens de variation de f sur $[-1, +\infty[$.

c- Prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

d- Dresser le tableau de variation de f sur IR

3- a- Vérifier que $f(x) - (x+1) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x + 1}$.

b- En déduire que la droite $D : y = x + 1$ est asymptote à la courbe C au voisinage de $+\infty$.
c- Montrer que la droite $D' : y = -x - 1$ est asymptote à la courbe C au voisinage de $-\infty$.
4- Tracer la courbe C et les droites D et D'.

Activité 2

Soient la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

1- a- Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que: $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

b- Montrer que pour tout x de $]-\infty, 0[$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)}$.

c- En déduire le sens de variation de f .

d- Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

e- Dresser le tableau de variation de f.

2- Vérifier que $f(x)-2x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ et en déduire que la droite D : y = 2x est asymptote à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

3- Tracer la droite D et la courbe C dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Activité 3

Soient la fonction $f: x \mapsto \sqrt{|2x-x^2|}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1- Montrer que la droite $D: x=1$ est un axe de symétrie pour C.

2-a- Vérifier que : pour tout $x \neq 2$ on a $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

b- Etudier alors la dérivabilité de f en 2 et interpréter graphiquement le résultat.

c- Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $[1,2[$ et $]2,+\infty]$ et vérifier que:

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} & \text{si } 1\le x<2 \\ f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} & \text{si } x>2 \end{cases}$$

3- a- Déterminer le sens de variation de f sur chacun des intervalles $[1,2]$ et $[2,+\infty[$.

b- Dresser le tableau de variation de f sur $[1,+\infty[$.

4- a- Vérifier que pour $x>2$ $f(x)-(x-1)=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-2x}+(x-1)}$.

b- Déduire que la droite $\Delta: y=x-1$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$.

5- Tracer la droite Δ et la courbe C .

V- *Exemples d'étude de fonction trigonométrique*

Activité 1

Soit la fonction $f: x \mapsto \sin(\pi x)$

1- Montrer que la fonction f est impaire.

2- Vérifier que 2 est une période de f.

3- En déduire que l'on peut étudier f sur l'intervalle $[0,1]$.

4-a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in [0,1]$.

b) Vérifier que pour tout x de [0,1] $0 \le \pi x \le \pi$ et en déduire le signe de $f'(x)$ sur [0,1].

Soient f une fonction définie sur un domaine D.
f est une fonction périodique si et seulement si il existe un réel non nul t tel que
Pour tout x de D on a
$\begin{cases} x+t \in D \\ f(x+t)=f(x) \end{cases}$

c) Dresser le tableau de variation de f sur [0,1].

5- Tracer la courbe C_1 représentative de f sur $[0,1]$ dans un repère orthonormé.

6- Expliquer comment tracer la courbe C de f sur IR.

Activité 2

On appelle fonction tangente et on note **tg** la fonction définie sur $IR \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, (k\in\mathbb{Z})\right\}$ par $tg(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Soit la fonction $f : x \mapsto tg(x)$

1-a) Vérifier que la fonction f est impaire.

b) Vérifier que π est une période de f.

2-a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que $f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+tg^2(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

3- Donner une équation de la demi tangente à C au point d'abscisse nulle.

4- Tracer la courbe C_1 représentative de f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

5- Expliquer comment tracer la courbe C de f sur $IR \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, (k\in\mathbb{Z})\right\}$.

Activité 3

Soit g la fonction définie sur $[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$ par $g(x)=\frac{2}{1-\cos x}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1- Montrer que la fonction g est paire.

2- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

3- a- Montrer que pour tout x de $]0,\pi]$, $f'(x)=\frac{-2\sin x}{(1-\cos x)^2}$

b- Dresser le tableau de variations de f.

4- Tracer la courbe C

5- Soit f la fonction définie sur $[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$ par $f(x)=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$

a- Vérifier que pour tout x de $[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$, $f(x)=g(x)-1$

b- En déduire la représentation graphique de f.

Avec l'ordinateur

On se propose de créer une macro qui permet de remplir un tableau de valeurs d'une fonction qu'on programmera (sous Visual Basic pour Excel) et de représenter sa courbe.

<u>Etape 1 :</u> Définition des variables :

Dans la cellule A3 taper : « a = »
Dans la cellule A4 taper : « b = »
Dans la cellule A5 taper : « h = »
Dans la cellule B7 taper : « x »
Dans la cellule C7 taper : « y »

Définir les variables a, b et le pas h

* Sélectionner la cellule B3
  Dans le menu : 'Insertion' sélectionner la commande 'nom' puis 'définir'.
  Taper la lettre : a ; puis valider
* Sélectionner la cellule B4
  Dans le menu : 'Insertion' sélectionner la commande 'nom' puis 'définir'.
  Taper la lettre : b ; puis valider
* Sélectionner la cellule B5
  Dans le menu : 'Insertion' sélectionner la commande 'nom' puis 'définir'.
  Taper la lettre : h ; puis valider

<u>Etape 2 :</u> Programmation de la fonction et de la procédure de remplissage du tableau de valeurs.

* Afficher l'éditeur de code de Visual Basic et taper les lignes suivantes :

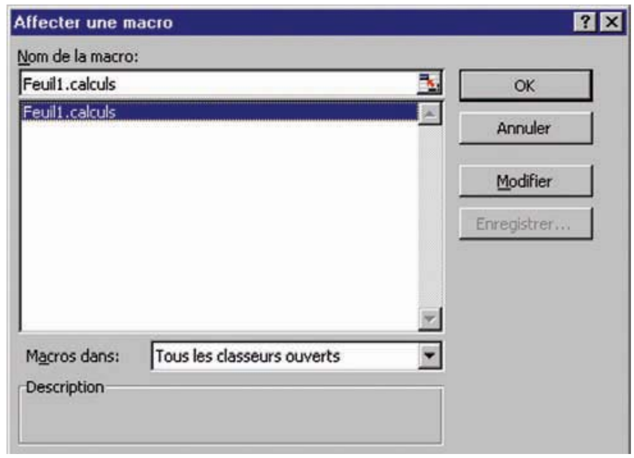
```
Function f(x)
  f = x / (x * x + 1)          ' On peut considérer toute autre fonction'
End Function

Sub calculs()
   a = Cells(3, 2)
   b = Cells(4, 2)
   h = Cells(5, 2)
   i = 8
   x = a
   Do While i <= 100        ' Effacer le contenu des 100 premières  cellules'
      Cells(i, 2) = ""      'si elles ne sont pas vides '
      Cells(i, 3) = ""
      i = i + 1
   Loop
   i = 8
   Do While x <= b
      Cells(i, 2) = x
      Cells(i, 3) = f(x)
      x = x + h
      i = i + 1
   Loop
End Sub
```

* Ajouter un bouton pour lancer l'exécution de la procédure de représentation.

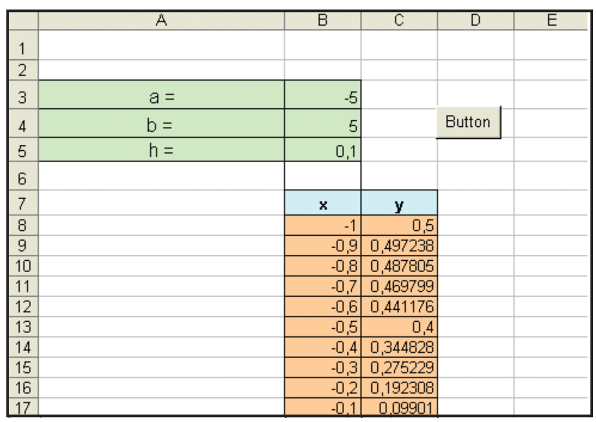
Choisir dans la barre des boutons, le bouton "Bouton" : .
Si ce bouton n'apparaît pas dans la barre des boutons, effectuer la commande Affichage/Barre d'outils... et choisir la barre d'outils Formulaire :

Placer le bouton en faisant glisser la souris dans la feuille de calcul.
Dès qu'on lâche le bouton de la souris, on obtient une fenêtre permettant d'affecter à notre bouton une macro (procédure) de notre choix. on lui affecte la procédure Calculs :



Etape 3 : Remplissage du tableau de valeurs .

Cliquer sur le bouton ajouté et le tableau se remplit en fonction des valeurs et de la fonction choisies.



	A	B	C	D	E
1					
2					
3	a =	-5			
4	b =	5		Button	
5	h =	0,1			
6					
7		x	y		
8		-1	0,5		
9		-0,9	0,497238		
10		-0,8	0,487805		
11		-0,7	0,469799		
12		-0,6	0,441176		
13		-0,5	0,4		
14		-0,4	0,344828		
15		-0,3	0,275229		
16		-0,2	0,192308		
17		-0,1	0,09901		

Etape 4 : Traçage de la courbe

Pour obtenir directement la courbe représentative de la fonction programmée:
Sélectionner les cellules contenant les données x et y, à partir de la ligne 8,
Cliquer sur le bouton 'Assistant graphique' :
Choisir le modèle Nuages de points
Cliquer sur continuer puis sur terminer

L'avantage de ce procédé est que, si on change les bornes a, b, le pas h ou la fonction f elle-même, puis on clique sur le bouton ajouté à la feuille, le graphique est modifié directement.

Exercices et problèmes

1- Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]-5,+\infty[$ dont le tableau de variations est donné ci-contre.

x	-5		-3		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

Indiquer la réponse exacte parmi les réponses suivantes :

Sur $]-5,+\infty[$, la courbe représentative de f :

- Admet une seule asymptote, la droite d'équation x = -5.
- Admet exactement deux asymptotes, les droites d'équations x = -5 et y = -2.
- Admet exactement deux asymptotes, les droites d'équations y = -5 et x = -5.

2- On désigne par C la courbe représentative dans un repère orthonormé du plan de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-4}$.

Nier ou confirmer chacune des phrases suivantes en donnant une brève justification.

a- la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique à C.
b- la droite d'équation $x = -4$ est asymptote verticale à C.
c- la droite d'équation $x = 4$ est asymptote horizontale à C.

3- Soit f une fonction définie sur un domaine D et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1- Montrer que si C est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées alors la fonction f est paire.

2- Montrer que si C est symétrique par rapport à l'origine du repère alors la fonction f est impaire.

4- a- Tracer une courbe C représentant une fonction f définie sur IR et admettant pour asymptotes horizontales les droites d'équations $y=-1$ en $+\infty$ et $y=3$ en $-\infty$.

b- Tracer une courbe C représentant une fonction f définie sur $IR\setminus\{-1\}$ et admettant une asymptote horizontale d'équation $y=-\dfrac{1}{2}$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

5- Etudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

$x\mapsto\sqrt{x^2+1}$; $x\mapsto x^3-x$; $x\mapsto\dfrac{x^4+2x^2+1}{|x|}$; $x\mapsto\dfrac{\sin^2 x}{x|x|}$.

6- Dans chacun des cas suivants, montrer que la droite D est un axe de symétrie pour la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

a) $f: x\mapsto x^2-2x+2$ $D: x=1$ b) $f: x\mapsto |x^3+3x^2+x-1|$ $D: x=-1$

c) $f: x\mapsto \dfrac{1}{|x+2|}$ $D: x=-2$ d) $f: x\mapsto\sqrt{x(4-x)}$ $D: x=2$

e) $f: x\mapsto\sqrt{x^2-6x}$ $D: x=3$

7- Dans chacun des cas suivants, montrer que le pt I est un centre de symétrie pour la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

a) $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x-3}$ $\quad I(3,2)$; b) $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ $\quad I(1,3)$

c) $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2} - \sqrt{2x-x^2}$ $\quad I(\dfrac{1}{2},0)$

8- Pour chacune des fonctions suivantes :

a- Déterminer l'ensemble de définition.

b- Calculer les limites de f aux bornes de cet ensemble.

c- Déduire l'existence d'asymptotes à la courbe de f, qui soient parallèles aux axes des coordonnées et donner leurs équations.

$f(x) = \dfrac{x-5}{2x+3}$; $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-x-12}$; $f(x) = \dfrac{4x^2-2x-2}{x-1}$; $f(x) = \dfrac{x^2-x-1}{-2x^2+5x-3}$

9- Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x^2+1}$

a- Montrer que la droite D : y = x est asymptote à la courbe C de f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

b- Etudier la position relative de C et D.

10- Soit la fonction f définie sur $]-2,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-4x-10}{2x+4}$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a- Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{2x+4}$ pour tout x de $]-2,+\infty[$.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]$, interpréter graphiquement le résultat.

c- Etudier la position relative de C par rapport à la droite $D : y = ax+b$.

11- Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-2x^3+x^2+2x+1}{x^2-1}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1- Etudiez les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

2- Déterminez les réels a, b et c tels que $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x^2-1}$

3- a- Soit D la droite d'équation $y = -2x+1$. Montrez que D est asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

b- Préciser la position relative de C_f par rapport à la droite D.

4- La courbe C_f admet une deuxième asymptote. Quelle est son équation ?

5- On donne le tableau de variation de la fonction f

x	1		$+\infty$
f'(x)		−	
f(x)		$\searrow$	

a- Compléter le tableau avec les limites trouvées.

b- Montrez que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in [1{,}4\ ;\ 1{,}5]$.

6- Construire la courbe C_f .

12- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-4$.

On note Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1- Vérifier que C_f admet un centre de symétrie dont-on donnera les coordonnées.
2- Etudier les branches infinies de C_f .
3- Dresser le tableau de variations de f.
4- Tracer la courbe C.
5- Montrer que l'équation $f(x)=6$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]3,4[$.

6- a- Tracer dans le même repère la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto |f(x)|$.

b- Justifier que l'équation $(E) : g(x)=6$ admet exactement deux solutions dont l'une est α .

c- Donner une valeur approchée de l'autre solution de (E) au dixième près.

13- Soit f la fonction définie sur $IR \setminus \{-1,1\}$ par $f(x)=\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

On donne le tableau de variations de f

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	0	-	||	-	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	0

1- a- Calculer $f'(x)$ et justifier le signe de $f'(x)$ donné dans le tableau.

b- Justifier la limite de f en $+\infty$. Lire sur le tableau de variation le signe de f(x) selon les valeurs de x.

c- Tracer la courbe représentative de f ainsi que ses asymptotes dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

2- F, G et H sont des primitives de f respectivement sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$.

a- Déterminer le sens de variation de F, de G et de H sur chacun de leurs intervalles de définition.

b- Vérifier que pour tout $x \in IR \setminus \{-1,1\}$ on a $f(x)=\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{1}{2(x+1)^2}$.

c- En déduire l'expression de chacune des fonctions F, G et H sur chacun de leurs intervalles de définition.

d- Dresser le tableau de variation de F, G et de H.

e- Tracer les courbes représentatives de F, G et de H dans le même repère orthonormé.

14- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\left|x^2-3x-4\right|-x$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 4 ; interpréter graphiquement le résultat.
2- Dresser le tableau de variations de f.
3- Tracer la courbe C ainsi que les demi tangentes aux points d'abscisses -1 et 4.

15- Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- Etudier la dérivabilité de f en 1 et préciser les demi tangentes à C au point d'abscisse 1.
2- Déterminer les asymptotes à C.
3- Tracer la courbe C et ses deux asymptotes.

16- Etudier les variations de chacune des fonctions suivantes sur son domaine de définition puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$:

a) $f:x\mapsto x^2-2x+1$ b) $f:x\mapsto \dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x-2$ c) $f:x\mapsto 2x^3+x-1$.

d) $f:x\mapsto x^4-2x^2+1$ e) $f:x\mapsto \dfrac{x-1}{x+2}$ f) $f:x\mapsto \dfrac{x^2-1}{x+2}$.

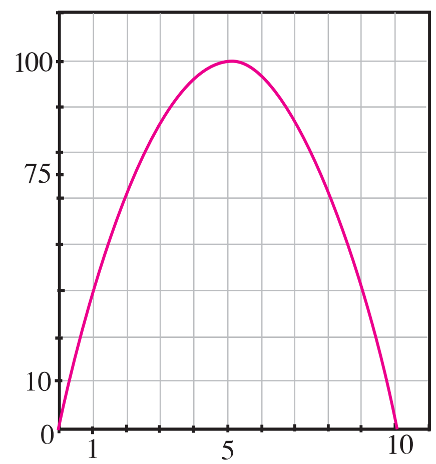
g) $f:x\mapsto \dfrac{1}{x^2+2x}$ h) $f:x\mapsto \dfrac{x}{x^2-2x+1}$ i) $f:x\mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1}$.

17- ***En économie**, on appelle fonction de satisfaction toute fonction S définie sur un intervalle I et à valeurs dans l'intervalle $[0,100]$ et appelle fonction envie la dérivée E de fonction S. On dit qu'il y a **envie** lorsque E est positive et qu'il y a **rejet** lorsque E est négative.*

Situation 1 :

La fonction de satisfaction S est représentée par le graphique ci-contre.

1- Justifier que S est dérivable sur $[0,10]$.
2- Pour quelle valeur de x la satisfaction est-elle maximale ?
3- Sur quel(s) intervalle(s) y'a-t-il envie ? y a-t-il rejet ?
4- Exprimer E(x) en fonction de x sachant que E est une fonction affine définie sur $[0,10]$ et que $E(0)=50$.



Situation 2 :

La fonction envie E pour un salaire dans une petite entreprise est modélisée par

$E(x)=\dfrac{100}{(x+1)^2}$ où $x\geq 0$ et désigne le salaire annuel d'un employé en milliers de dinars.

1- Déterminer la fonction de satisfaction S sachant que S(0) = 0.

2- Représenter graphiquement la fonction S dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (On prendra pour unités : 3cm pour 10 unités sur l'axe des abscisses et 1cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées).

3- Cette entreprise estime qu'un employé est satisfait, si S prend une valeur supérieure ou égale à 75. Que devrait alors être la valeur minimale du salaire d'un employé satisfait?

18- Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- a- Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=a \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x)-ax]=b \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x)-(ax+b)].$$

b- En déduire l'existence d'une droite D asymptote à C au voisinage de $+\infty$

c- Etudier la position relative de C et D.

2- Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 ; interpréter graphiquement le résultat.

3- Dresser le tableau de variation de f.

4- Tracer la courbe C.

19- Etudier les variations de chacune des fonctions suivantes sur l'ensemble I puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) $x \mapsto \sqrt{-x+1}$ $\quad I=]-\infty,1]$; b) $x \mapsto x-\sqrt{x-4}$ $\quad I=[4,+\infty[$

c) $x \mapsto \sqrt{x^2-x}$ $\quad I=]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$; d) $x \mapsto x-\sqrt{x^2-4}$ $\quad I=]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$.

20- Etudier les variations de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) $x \mapsto \sin(2x-\frac{\pi}{4})$ $\quad I=[-\pi,\pi]$; b) $x \mapsto \cos(2\pi x+1)$ $\quad I=[0,3]$

c) $x \mapsto tg(2x)$ $\quad I=\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$; d) $x \mapsto \sin^2(x)$ $\quad I=IR$

21- Un investisseur a versé chaque 1er janvier pendant 5 années consécutives une somme $S=1000$ DT , investie en construction de bâtiments. Il constate qu'au terme des 5 années, son avoir est de $A=6000$ DT . Afin de comparer cette performance avec celle d'un livret classique à intérêts composés annuels, il déterminer le taux de rémunération du livret pour obtenir le même résultat.

Désignons par t le taux (en %) cherché.

A- 1- Quel est le bénéfice total réalisé ?

2- Quel est alors le bénéfice moyen annuel réalisé ?

3- Que serait alors la valeur de t ?

4- Ce résultat est-il réaliste ?

B-1- Augmenter une somme de t%, revient à la multiplier par T. Déterminer T en fonction de t.

2- En supposant que les investissements se soient faits sur un livret à t% annuel, montrer que l'avoir à la fin de la 1ère année serait 1000T et que l'avoir à la fin de la 2ième année serait $1000T + 1000T^2$.

3- Déterminer l'avoir à la fin de la 5ième année.

4- Vérifier alors que le taux est déterminé par résolution de l'équation
$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 6$

C- Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

1- a- Vérifier que $f'(x) > 0$ pour tout x de $[0,+\infty[$

b- Dresser le tableau de variations de f.

c- Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

2- Déterminer le nombre de solutions sur $[0,+\infty[$ de l'équation
$(E) : x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 6$.

3- Encadrer strictement T entre deux entiers consécutifs, en le justifiant.

4- Donner un encadrement de T à 10^{-4} près.

5- En déduire la valeur de t au dixième de points près.

22- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1 + \dfrac{2x-1}{(x^2 - x + 1)^2}$.

1- Vérifier que $f'(x) = \dfrac{-6x(x-1)}{(x^2 - x + 1)^3}$ pour tout x de IR.

2- En déduire le sens de variation de f suivant les valeurs de x. (On déterminera le signe de l'expression $x^2 - x + 1$).

3- Vérifier que la courbe C de f admet une asymptote horizontale dont-on donnera une équation.

4- Dresser le tableau de variations de f.

5- Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6- Soit la fonction $F : x \mapsto x + 1 - \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$.

a- Montrer que F est la primitive de f sur IR, qui s'annule en 0.

b- Dresser le tableau de signe de f ; en déduire les variations de F.

c- Montrer que la droite D d'équation y = x + 1 est une asymptote oblique la courbe C' de F aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$.

d- Etudier la position relative de C' et D.

e- Tracer la droite D et la courbe C' dans un repère orthonormé du plan.

23- *(Prix d'équilibre D'OFFRE ET DE DEMANDE)*

Partie A :

Soit g la fonction définie sur]–5 ;+∞[par : $g(x) = \dfrac{9}{x+5} - 0,05x + 4$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- Calculer la limite de g en – 5. En donner une interprétation graphique.

2- a- Calculer la limite de g en + ∞. Montrer que la droite D d'équation y = – 0,05x + 4 est asymptote oblique à la courbe C au voisinage de + ∞.

b- Etudier la position relative de C par rapport à la droite D.

3- Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
4- Dresser le tableau de variations de g sur $]-5\ ;+\infty[$.
5- Tracer les asymptotes ainsi que la courbe C. *(Prendre pour unités graphiques : 0,5 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées).*

Partie B **:**

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = 4,5 - \dfrac{6x^3 + 24x^2 + 36x + 18}{(x^2 + 2x + 2)^2}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans le même repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. En donner une interprétation graphique.

2- a- Vérifier que $f'(x) = \dfrac{6x(x+2)^3}{(x^2 + 2x + 2)^3}$.

b- Etudier les variations de f sur IR. (on précisera les extremums).

3- Représenter la courbe C_f dans le repère précédent.

x désignant le prix d'une unité de produit, exprimé en dinars. On admet que la quantité offerte sur le marché et la quantité demandée exprimées en milliers d'articles sont modélisées sur l'intervalle [0 ; 20] :

– pour la fonction d'offre par : $f(x) = 4,5 - \dfrac{6x^3 + 24x^2 + 36x + 18}{(x^2 + 2x + 2)^2}$.

– pour la fonction de demande par : $g(x) = \dfrac{9}{x+5} - 0,05x + 4$.

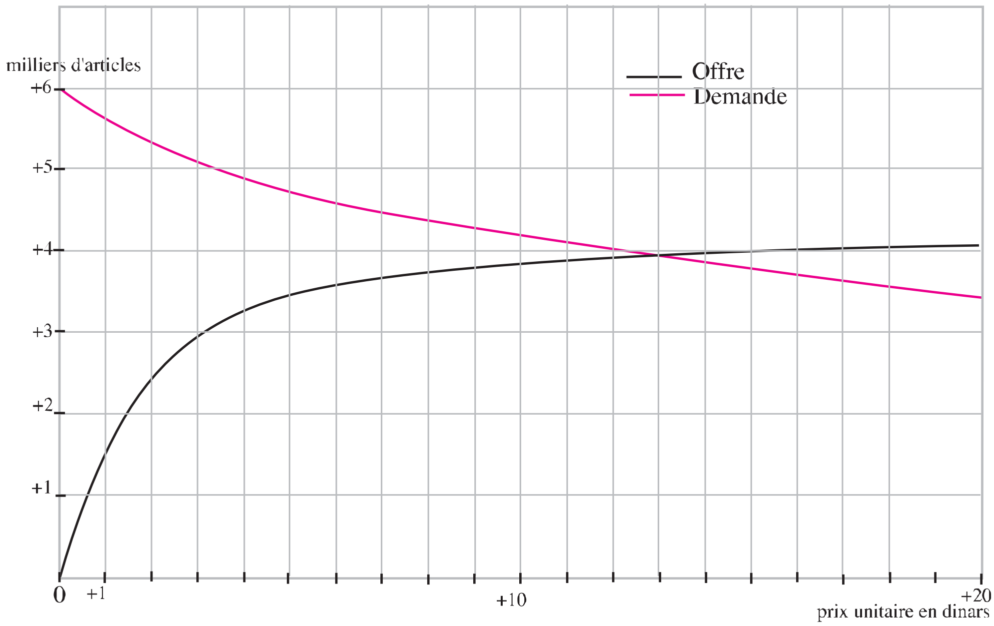
(*Les courbes représentatives des fonctions d'offre et de demande sont données ci-dessous*)

1- Soit la fonction p définie sur [0 ; 20] par $p(x) = f(x) - g(x)$. A l'aide des résultats établis dans les parties A et B.

a) Étudier le sens de variation de p.

b) Prouver que l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution x_0 .

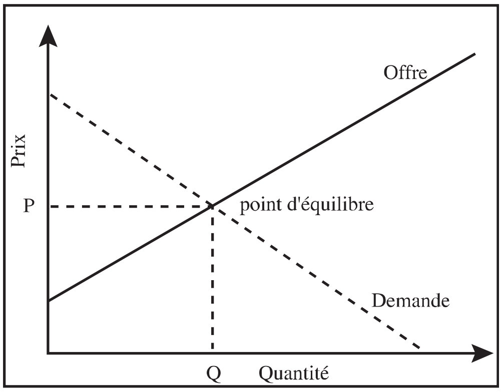
2- Déduire de ce qui précède l'arrondi au 10^{-2} de dinars près du prix d'équilibre, ainsi que le nombre d'objets proposés sur le marché à ce prix.



OFFRE ET DEMANDE

L'offre est la quantité d'un bien économique que les producteurs souhaitent vendre à un prix donné. Ses principaux déterminants sont le prix du marché et les coûts de production. Leurs courbes représentatives sont généralement des courbes croissantes et concaves.

La demande est la quantité voulue d'un bien, à un prix donné, par les consommateurs ayant les moyens de l'acheter. La courbe représentative de la fonction décrit donc cette quantité (en abscisses) en fonction du prix (en ordonnées). Ses principaux déterminants seront donc le prix du bien, le revenu, les goûts, mais aussi l'offre et la demande des biens de substitutions.

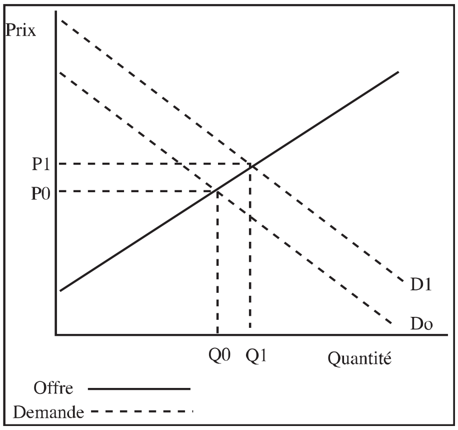


La courbe représentative de la fonction de demande est généralement décroissante et peut être concave ou convexe, selon les cas.

En construisant les deux courbes, ou dans un cas plus simple les deux droites, on obtient la situation du marché. La rencontre de l'offre et de la demande permet de définir le point d'équilibre. Ce point définit le prix pour lequel l'offre égalise la demande, c'est-à-dire le point où se réalise l'échange. On appelle les coordonnées correspondantes **prix d'équilibre** et **quantité d'équilibre**. Tant que ce point n'est pas atteint, l'excédent d'offre provoque la baisse du prix ou bien la trop forte demande provoque sa montée.

Dans la théorie microéconomique, l'offre et la demande sont fonctions du prix (noté en ordonnées par convention) mais n'interagissent pas l'une sur l'autre.

L'évolution de la demande peut-être représentée graphiquement par une translation de la courbe de demande vers la droite. La courbe initiale D_0 est alors remplacée par la courbe D_1. La conséquence de ce changement est la hausse du prix d'équilibre qui passe de P_0 à P_1, tandis que s'accroît également la quantité d'équilibre qui passe de Q_0 à Q_1. Inversement, lorsque la demande diminue, les phénomènes inverses se produisent. La quantité échangée décroît ainsi que le prix.



Chapitre 4

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN
FONCTIONS EXPONENTIELLES

Pour commencer

Fonction Logarithme Népérien

- Définition
- Propriétés
- Etude et représentation graphique

Fonction exponentielle de base e

- Définition
- Propriétés
- Etude et représentation graphique
- Fonction $x \mapsto a^x$ avec $a > 0$

Avec l'ordinateur

Exercices et problèmes

Math culture

Pour commencer

Activité 1

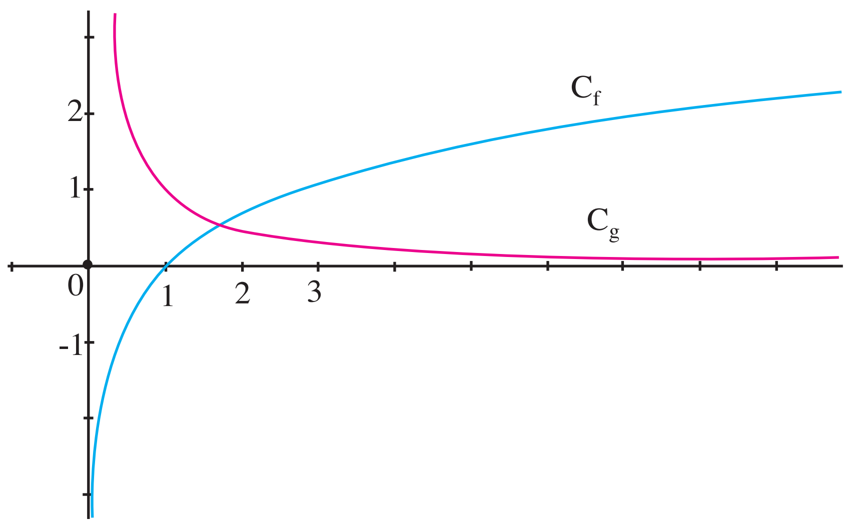
Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

1- Vérifier que la fonction F, définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ est une primitive de f.

2- Donner la primitive G de f qui prend la valeur 2 en 1.

Activité 2

On donne dans le graphique suivant les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$.



1) Déterminer graphiquement selon les valeurs de x le signe de f(x) et de g(x).
2) Sachant que l'une des deux fonctions est une primitive de l'autre, Reconnaître parmi les deux affirmations suivantes, celle qui est vraie
   - f est une primitive de g.
   - g est une primitive de f.

Activité 3

Soient n un entier naturel non nul et f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$

1- Montrer que f possède une primitive sur $]0,+\infty[$.

2- Pour n supérieur ou égal à deux, déterminer la primitive de f qui s'annule en 1.
3- Peut-on faire de même pour n = 1?

A - FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

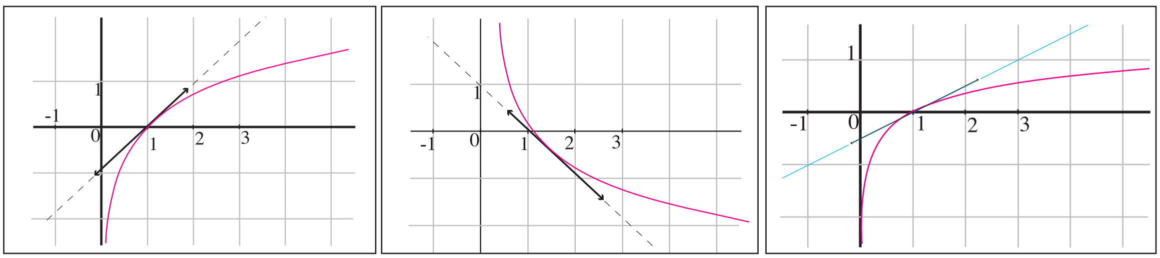
1) Définition

Activité 1

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Parmi les trois courbes ci-dessous, une seule représente une primitive F de f sur $]0,+\infty[$

1- Calculer f(1) et reconnaître la courbe de F.
2- Préciser F(1).
3- Préciser le sens de variation de F.
4- Montrer graphiquement qu'il existe un unique réel x_0 tel que $F(x_0) = 1$.



f est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$ donc elle admet une primitive sur cet intervalle.
La primitive de f qui s'annule en 1 est une nouvelle fonction appelée ***Fonction logarithme népérien***.

Définition

La fonction ***logarithme népérien,*** **notée ln(ou Log)**, est la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Remarque

On adoptera la notation courante **ln**.

$$\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln x$$

Conséquences immédiates:

1) $\ln(1) = 0$
2) La fonction ln est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$

   et pour tout $x > 0$ $\quad (\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$
3) La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

   et on a: $x_1 > x_2 > 0$ équivaut à $\ln(x_1) > \ln(x_2)$

Activité 2

1- Montrer que :

$\ln(x) < 0$ équivaut à $0 < x < 1$

$\ln(x) > 0$ équivaut à $x > 1$

2- Soient x et y deux réels strictement positifs, prouver que :

$\ln(x) = \ln(y)$ équivaut à $x = y$

Activité 3

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes

$f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x+2}$; $g : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)$; $h : x \mapsto \dfrac{1}{\ln\left(x^2+1\right)}$; $k : x \mapsto \ln(x+2) - \ln(x-2)$

Activité 4

1) Soient u et f les fonctions définies sur IR par $u(x) = x^2 - x + 3$ et $f(x) = \ln|u(x)|$

a- Vérifier que pour tout x de IR, $u(x) > 0$

b- Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

2) Soient v et g les fonctions définies sur $]1,+\infty[$ par $v(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ et $g(x) = \ln|v(x)|$

a- Prouver que pour tout x de $]1,+\infty[$ on a $v(x) < 0$.

b- Montrer que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $g'(x) = \dfrac{v'(x)}{v(x)}$.

Théorème (admis)

Si une fonction u est dérivable sur un intervalle ouvert I et si pour tout x de I , $u(x) \neq 0$ alors la fonction $f : x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est définie par:

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Remarque

Lorsque u est une fonction dérivable sur un intervalle I et qui ne s'annule pas sur I, une primitive sur I de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ est la fonction $x \mapsto \ln|u(x)|$.

Activité 5

1- Pour chacun des cas suivants, justifier que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I puis définir sa fonction dérivée f '.

a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$; $I =]0,+\infty[$ b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)$; $I =]-2,1[$

c) $f(x)=\ln\left|\frac{2}{x}+x\right|$; $I=]0,+\infty[$ d) $f(x)=\ln|\ln x|$; $I=]0,1[$

2- Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I

a) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$; $I=\mathbb{R}$ b) $f(x)=\frac{4x^3+2x}{(x^4+x^2)}$; $I=]0,+\infty[$

c) $f(x)=\frac{2+3\sqrt{x}}{x+x\sqrt{x}}$; $I=]0,+\infty[$ d) $f(x)=-\mathrm{tg}(x)$; $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

2) Propriété fondamentale

Activité 1

Soit a un réel strictement positif, on considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(ax)$ et $g(x)=\ln(x)+\ln(a)$.

a- Montrer que f et g sont deux primitives sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$.

b- Calculer f(1) et g(1) .

c- Déduire que : pour tout $x\in]0,+\infty[$ $f(x)=g(x)$

Propriété

Pour tous réels strictement positifs a et b on a : $\ln(a\,b)=\ln(a)+\ln(b)$

Activité 2

1) Soit a,b et c trois réels strictement positifs, montrer que :

ln(abc) = ln(a) + ln(b) + ln(c).

2) Soit a un nombre réel strictement positif, montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $\ln(a^n)=n\ln(a)$.

Activité 3

Parmi les réponses a, b et c retrouver celles qui sont correctes :

	a	b	c
$\ln(2)+\ln(9)=$	$\ln(11)$	$\ln(18)$	$\ln(6)+\ln(3)$
$\ln(27)=$	$3\ln(3)$	$9\ln(3)$	$\ln(9)+\ln(3)$
$\ln(108)+\ln(2)$	$\ln(110)$	$\ln(216)$	$3\ln(6)$
$\ln(24)+2\ln(5)=$	$\ln(600)$	$2\ln(12)+\ln(25)$	$\ln(6)+2\ln(10)$
Pour $x>0$, $\ln x+\ln(\frac{1}{x})=$	$\ln(\frac{x+1}{x})$	0	1
Pour $x>0$, $\ln(x^2+6x+9)=$	$\ln(x^2)+6\ln(x)+\ln(9)$	$\ln(x+3)^2$	$2\ln(x+3)$
Pour $x>0$, $\ln(x)+\ln(x+1)=$	$\ln(x)\,.\,\ln(x+1)$	$\ln(x^2+x)$	$\ln(x^2)+\ln(x)$

Activité 4

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations:
   a) $\ln x + \ln(x+1) = \ln(6)$; b) $\ln(x-1) + \ln(2+x) = \ln(x^2)$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations:
   a) $\ln(2x+2) > \ln(x+5)$; b) $\ln(x-2) \leq \ln(3x+6)$.

Activité 5

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Calculer $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$ et en déduire que $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$.
2. Calculer $\ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln b$ et en déduire que $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$.
3. Sachant que $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ prouver que $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

Propriétés

1- Pour tout réel on a : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

2- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ on a : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

3- Pour tout réel $a > 0$ on a : $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Activité 6

On sait que pour tout entier naturel n et pour tout réel a strictement positif on a :
l'égalité (E) : $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$

On suppose que n est un entier relatif inférieur ou égal à -1, en écrivant $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ vérifier que l'égalité (E) reste vraie.(on remarquera que $(-n) \in \mathbb{N}$).

Ainsi :

Pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$: $\ln(a^n) = n\ln(a)$

Activité 7

1) On donne $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \simeq 0,1$
   Donner une valeur approchée de chacun des réels A et B:
   $A = 4\ln(\frac{1}{2}) + 3\ln(2) + \ln(8)$; $B = \ln(\frac{4}{5}) - 3\ln(3) + \ln(10)$
2) Sans utiliser une calculatrice, comparer les réels x et y dans chacun des cas suivants :
   a) $x = 3\ln(2)$ et $y = 2\ln(3)$; b) $x = \ln(5) - \ln(2)$ et $y = \ln(12) - \ln(5)$

3) a, b et c sont trois réels strictement positifs tels que : $\ln a = \ln(\frac{b}{2}) = 3$ et $\ln c = -2$

Calculer le réel $D = \ln\left(\frac{16a^3c^2}{b^4}\right)$.

3) Etude de la fonction ln

Activité 1

1) Montre que si la fonction ln est majorée alors elle admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers $+\infty$.

2) Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(2x)\right] = \ell$

3) En écrivant $\ln(2x) = \ln x + \ln 2$ déduire que l'hypothèse faite en 1) entraîne $\ln 2 = 0$.
Déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

4) En écrivant $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$, montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Théorème

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

Activité 2

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

1- Vérifier que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$.

2- Déterminer le sens de variation de g sur $]0,+\infty[$.

3- Montrer que pour tout $x > 0$ $\sqrt{x} > \ln x$ et en déduire que :

pour tout $x > 1$ on a : $0 \le \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$

4- En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ (n entier supérieur ou égal à 2).

5- a- Montrer que pour tout réel strictement positif x on a : $x\ln(x) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

b- En déduire que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$ (n entier supérieur ou égal à 2)

Théorème

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$

Activité 3 *(Autres limites)*

a) En considérant le nombre dérivé de la fonction ln en 1, montrer que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Théorème

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Activité 4

On désigne par Γ la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1- a) Etudier le sens de variation de la fonction ln.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction ln.

2- Montrer que la fonction ln réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur IR

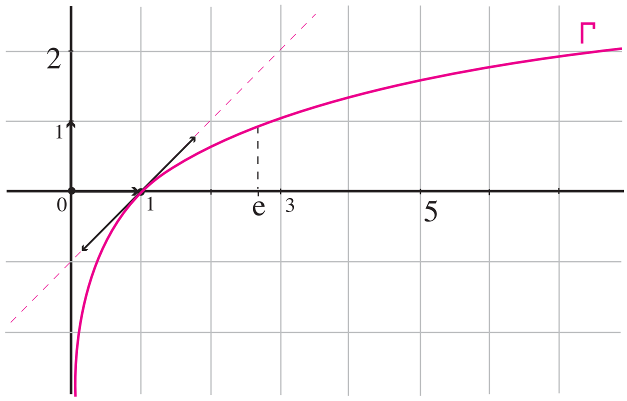
3- Montrer que l'équation $\ln x = 1$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique qu'on notera e
   Vérifier que $e \in]2{,}7\ ;\ 2{,}8[$.

4- Donner une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 1.

5- Vérifier que Γ admet une asymptote verticale dont-on donnera une équation et qu'elle présente une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

6- Tracer la droite T et la courbe Γ.

Représentation graphique



$e \simeq 2{,}71828...$

Activité 5

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 2 - \ln x$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

5) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β telles que $\alpha\in\,]0,1\,;\,0,2[$ et $\beta\in\,]3,1\,;\,3,2[$

6) Tracer la courbe C.

Activité 6

1) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=x^2-8x+17$
   a) Dresser le tableau de variation de g.
   b) En déduire le signe de g(x).

2) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\ln(x^2-8x+17)$.
   a) Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x)=\dfrac{2(x-4)}{g(x)}$.
   b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c) Dresser le tableau de variation de f.

On désigne par C_g et C_f les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

3) Montrer que la droite D d'équation x = 4 est un axe de symétrie pour la courbe C.
4) Tracer les courbes C_g et C_f.
5) Résoudre dans IR, graphiquement puis par le calcul : $f(x)=\ln 5$ et $f(x)\geq \ln 5$.

Activité 7

Soient f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1- Montrer que la fonction f est impaire.

2- a) Calculer $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$
   b) Interpréter graphiquement les résultats.

3- a) Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et que $f'(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$
   b) Déterminer le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
   c) Montrer que le point O est un point d'inflexion pour la courbe C. Donner une équation de la tangente D à la courbe C en ce point.

4- Tracer D et C.

Activité 8

Une étude a permis de modéliser les quantités d'un produit (en milliers d'unités) mis sur le marché par la fonction d'offre g définie sur [1,22] par : $g(x)=0,3x+1$ où x désigne le prix unitaire en dinars.

La fonction de demande des consommateurs est modélisée pour $x \in [1,22]$ par
$q(x) = -0,4x + 5 + \ln(2x+6)$ ($q(x)$ *représente les quantités du produit (en milliers) que les consommateurs sont prêts à acheter pour un prix unitaire* x).
1) Montrer que la fonction $g - q$ est strictement croissante sur [1,22].
2) En déduire qu'il existe sur [1,22] un unique prix d'équilibre x_0 (*l'équilibre est établi lorsque l'offre est égale à la demande*)
Quelle est alors la quantité d'équilibre q_0 ?
3) Tracer dans un même repère orthogonal les courbes représentatives de f et de g (On prendra : 0,5cm pour 1dinar en abscisses et 1cm pour un millier d'unités en ordonnées).
4) Retrouver graphiquement p_0 et q_0 .

B - FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE e

1) Définition

Activité 1

1°) Vérifier que pour tout entier relatif n on a: $\ln(e^n) = n$.
2°) Résoudre dans IR les équations suivantes:
a) $\ln x = 2$; b) $\ln(x+2) = -1$; c) $\ln(x^2+1) = 4$; d) $\ln x = n$ où $n \in \mathbb{Z}$

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.
1- a) Vérifier que f admet une fonction réciproque définie sur IR, que l'on note exp
b) Montrer que : $\begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) = y \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ \exp(y) = x \end{cases}$
c) Calculer exp(0), exp(1) et exp(n) pour n entier relatif.
d) Montrer que pour tout réel x on a : $\exp(x) > 0$
e) Montrer que pour tout réel x on a : $\ln(\exp(x)) = x$
et que pour tout réel x strictement positif on a : $\exp(\ln x) = x$.
2- a) Montrer que g est continue et strictement croissante sur IR.
b) En déduire que pour tous réels x et y on a :
- $\exp(x) = \exp(y)$ si et seulement si $x = y$.
- $\exp(x) > \exp(y)$ si et seulement si $x > y$.

Définition:

On appelle fonction exponentielle de base e et on note **exp** la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Notation:
Du fait que pour tout entier relatif n on a: $\ln(x) = n$ équivaut à $x = e^n$
on en déduit que : pour tout entier relatif n on a : $\exp(n) = e^n$. On convient d'étendre cette écriture à tout réel x et on écrit $\exp(x) = e^x$.

$$\text{Ainsi} \quad \begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to]0;+\infty[\\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

Conséquences:

1) $e^0 = 1$ et pour tout réel x , $e^x > 0$.

2) Les fonctions ln et exp étant des fonctions réciproques, on a :

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) = y \end{cases} \text{ si et seulement si } \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ e^y = x \end{cases}$$

3) Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.

4) Pour tout réel x strictement positif, $e^{\ln(x)} = x$.

5) La fonction exp est comme la fonction ln, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

6) Pour tous réels x et y on a : * $e^x = e^y$ si et seulement si $x = y$

* $e^x > e^y$ si et seulement si $x > y$

Activité 3

1- Calculer :

a) $e^{\ln 1} - e^{\ln 2}$; b) $\ln e^{-2} + 2\ln e$; c) $\dfrac{e^{\ln 2}}{e^{-\ln 3}}$; d) $\dfrac{e^{2\ln 3}}{e^{\ln 8}}$; e) $e^{3\ln 3} - 3\ln(e^7)$

2- Résoudre dans IR chacune des équations suivantes :

a) $e^{2x+1} = e^2$; b) $e^{-4x+1} = 3$; c) $\ln(x-2) = -\dfrac{1}{2}$; d) $e^{2x} = e^{-x}$

2) Propriétés

Activité 1

Soient a et b deux nombres réels

1- Vérifier que $\ln(e^a \times e^b) = a + b$.

2- En déduire que : $e^{a+b} = e^a \times e^b$, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ et $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$,

3- Montrer que pour tout entier relatif n on a: $e^{na} = \left(e^a\right)^n$

Propriétés

Pour tous réels a et b :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{na} = \left(e^a\right)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$

Activité

1- a) Calculer : $A = e^{1+\ln 2}$; $B = e^{1-2\ln 3}$.

b) Simplifier les expressions suivantes :

$A = (e^x + e^{-x})^2$; $B = (e^{-x} - e^x)(e^{-x} + e^x)$; $C = \dfrac{e^{2x}}{e^{3x-2} \times e^{1-x}}$; $D = \ln\left(\dfrac{e^{2x}}{e^{x-1}} \times e^{-x}\right)$

2- Résoudre dans IR :

a) $2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$; b) $2e^{2x} \leq 3e^x - 1$

3- Résoudre dans IR :

a) $e^{(x-4)(2x-1)} = e$; b) $e^x + e^{-x} = 2$; c) $2e^x(e^x - 6e^{-x}) = 5e^x$

4- Démontrer les égalités suivantes :

a) $e^{x}(1+e^{x})=1+e^{2x}$; b) $\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$; c) $\dfrac{1}{1+e^{-x}}=e^{x}-\dfrac{e^{x}}{1+e^{-x}}$

3) Etude de la fonction exp

Activité 1

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=e^{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1- A partir du tableau de variation de la fonction ln vérifier que :
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$.

2- Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3- a) Montrer que f est dérivable en 0 et que f ’(0) = 1.

En déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe C au point d’abscisse nulle.

4- a) A partir de la courbe de la fonction ln, que peut-on conjecturer pour la branche infinie de C au voisinage de $+\infty$?

b) Soit u la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $u(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

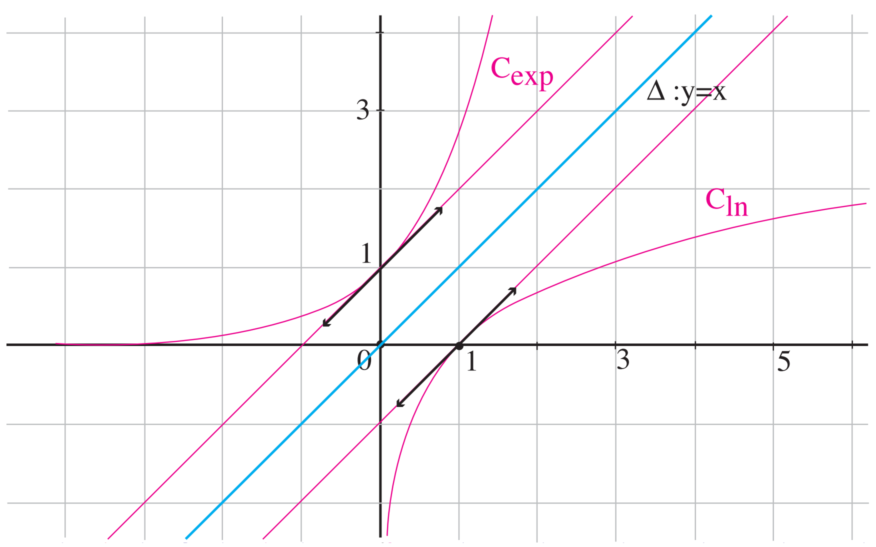
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} u(e^{x})$

c) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

.Théorème

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$

Représentation graphique :



Activité 2

1- Soit u la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $u(x) = x\ln x$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} u(e^x)$

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

2- Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que pour tout réel strictement positif x on a : $\ln\left(\dfrac{e^x}{x^n}\right) = x - n\ln x$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - n\dfrac{\ln x}{x}\right)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - n\ln x)$.

c) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

d) Vérifier que $(-x)^n e^{-x} = (-1)^n \dfrac{x^n}{e^x}$

En déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

Théorème

- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$
- Pour tout entier naturel n non nul on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

Activité 3

1- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x} + e^x - 1)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^x$

2- Calculer:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xe^x}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x} + e^{-x}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-3x}$; f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x-1}$; g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+3}{e^x}$; h) $\lim\limits_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

Activité 4

1- Soit h la fonction définie sur IR par $h(x) = (\ln\circ\exp)(x)$

Calculer de deux manières différentes h’(x) et en déduire que
Pour tout x de IR, $(\exp)'(x) = \exp(x)$

2- Soit g la fonction définie sur IR par $g : x \mapsto e^{-x^2+3x+1}$

Montrer que la fonction g est dérivable sur IR et que $g'(x) = (-2x+3)e^{-x^2+3x+1}$.

3- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de IR

Montrer que la fonction $(\exp\circ u)$ est dérivable sur I et que $(\exp\circ u)'(x) = u'(x).e^{u(x)}$

Théorème

- La fonction exponentielle est dérivable sur IR et est égale à sa fonction dérivée.
  $(\exp)' = \exp$
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de IR

La fonction $(\exp \circ u)$ est dérivable sur I et pour tout x de I on a : $(\exp \circ u)'(x) = u'(x).e^{u(x)}$

Remarque

Lorsque u est une fonction dérivable sur un intervalle I, une primitive sur I de la fonction : $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ est la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$.

Activité 5

1- Pour chacun des cas suivants, justifier que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I puis définir sa fonction dérivée f '.

a) $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$; $I = IR$ b) $f(x) = e^{\frac{1}{x+2}}$; $I =]-\infty, -2[$

c) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$; $I =]0, +\infty[$ d) $f(x) = e^{\sqrt{x^3}}$; $I =]0, +\infty[$

2- Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I

a) $f(x) = 2x\,e^{x^2-1}$; $I = \mathbb{R}$ b) $f(x) = \left(4x^3 + 2x\right)e^{x^4+x^2}$; $I = IR$

c) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}$; $I =]1, +\infty[$ d) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2}$; $I =]-1, +\infty[$

Activité 6

On considère la fonction g définie sur IR par $g(x) = x^2 - 2x$

1- a) Dresser le tableau de variation de g .

b) Tracer la parabole (P) représentant la fonction g .

2- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = e^{x^2-2x}$

a) Montrer que f est continue et dérivable sur IR.

b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3- a) Montrer que pour $x \in IR \setminus \{0, 2\}$ on a $\dfrac{f(x)}{x} = (x-2)\dfrac{e^{x^2-2x}}{x^2-2x}$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ interpréter graphiquement les résultats.

c) Tracer la courbe (C) de f dans le même repère (P).

Activité 7

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2 e^x$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1- Calculer la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

2- Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.
3- Etudier les variations de f.
4- Tracer la courbe C.

Activité 8

Soit f la fonction définie sur IR par

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{x-1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1- Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.

2- a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $\frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{x} = \frac{\frac{(1-\frac{1}{x})e^{1-\frac{1}{x}}}{x}}{x-1}$

   b) Calculer $\lim_{x\to 0^+}(1-\frac{1}{x})$. En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

3- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
4- Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.
5- a) Montrer que f est dérivable et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $[0, +\infty[$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

6- Tracer la tangente T et la courbe C.

Activité 9

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ .On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par g (x) = $e^x - x - 1$.
1. Étudier les variations de la fonction g sur R. En déduire le signe de g.
2. Justifier que pour tout x, $(e^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

1. a. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Interpréter graphiquement tes résultats précédents.
2. a. Calculer $f'(x)$.
   b. Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) la courbe (C) au point d'abscisse 0
   b. À l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).
4. Tracer la droite (T) les asymptotes et la courbe (C).

Fonction $x \mapsto a^x$ (avec $a > 0$)

Activité 1

Un capital de 8000 DT placé durant n années, a une valeur acquise modélisée par la fonction C définie par $C(n) = 8000.(1,055)^n$.

a- Déterminer la valeur acquise après 5 ans.

b- Montrer que pour tout entier naturel n on a $C(n) = 8000.e^{n\ln(1,055)}$

Définition

Soit a un réel strictement positif.
On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction $x \mapsto e^{x\ln a}$ définie sur IR et qu'on note $x \mapsto a^x$

Remarques

- Si a = 1, alors pour tout x de IR $1^x = 1$
- Lorsque a = e, on retrouve la fonction exp.
- Pour tout réel strictement positif a et pour tout réel x, le réel a^x est strictement positif.
- Pour tout réel strictement positif a et pour tout réel x, $\ln(a^x) = x\ln a$

Activité 2

Résoudre dans IR:

a) $2^x = e^{x-1}$; b) $e^{-x} = 5^{2x}$; c) $3^{x^2+4x} = \frac{1}{27}$; d) $3^x = 2^{x-1}$

e) $5^{x+2} = 4^{1-x}$; f) $\left|2^{x^2} - 8\right| = 8$; g) $3^x - e^{x+1} > 0$

Activité 3

Soit $a \in IR_+^*$ et x et y deux nombres réels quelconques.

1- Montrer que $a^x \times a^y = a^{x+y}$

2- En déduire que: $a^{-y} = \frac{1}{a^y}$ et $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

3- Vérifier que pour tout entier relatif n on a $a^{nx} = \left(a^x\right)^n$.

Propriétés

Soit $a > 0$, pour tous réels x et y on a :

$$a^{x+y} = a^x \times a^y \quad ; \quad a^{-y} = \frac{1}{a^y} \quad ; \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad ; \quad a^{nx} = \left(a^x\right)^n \ (n \in \mathbb{Z})$$

Activité 4

1- a) Résoudre dans IR l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$

b) En déduire les solutions de l'équation $2e^{2x} - 5e^x + 3 = 0$.

2- Résoudre dans IR les équations : a) $5^{2x} + 5^x - 4 = 0$; b) $4^x - 2^x + 6 = 0$

3- Simplifier les écritures suivantes :

$\dfrac{3^{n+2} \times 3^{2n}}{3^{n+3}}$; b) $\dfrac{(2\times 3)^n}{(2^{n-1})^2}$; c) $\dfrac{4^n \times 2^{n+1}}{3^n \times 2^{3n+1}}$

Etude des fonctions du type $x \mapsto a^x$

Activité 1

Soient a un nombre réel strictement positif différent de 1 et f la fonction définie sur IR par $f(x) = a^x$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- Montrer que la fonction f est continue et dérivable sur IR et que $f'(x) = \ln a .(a^x)$

2- On suppose que $a \in]0,1[$

a- Vérifier que f est strictement décroissante sur IR.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x$ puis dresser le tableau de variations de f.

c- Donner une équation de la tangente à C au point d'abscisse nulle.

d- Tracer une allure de la courbe C

3- On suppose que $a \in]1,+\infty[$

a- Vérifier que f est strictement croissante sur IR.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x$ puis dresser le tableau de variations de f.

c- Donner une équation de la tangente à C au point d'abscisse nulle.

d- Tracer une allure de la courbe C.

4- Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, vérifier que les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Théorèmes

- Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1.
  La fonction f définie sur IR par $f(x) = a^x$ est dérivable sur IR et $f'(x) = \ln a .(a^x)$
- Si $a \in]0,1[$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$

  Si $a \in]1,+\infty[$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

Activité 2

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 2^x$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1- a) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

b)Vérifier que la courbe C admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote dont-on donnera une équation cartésienne.

c)Montrer que la courbe C admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2- Vérifier que $f'(0) = \ln 2$

Donner une équation de la tangente T à C au point d'abscisse nulle.

4- Tracer la droite T et la courbe C.

Activité 3

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1- a) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty$, interpréter graphiquement le résultat

2- a) Montrer que g réalise une bijection de IR sur $]0,+\infty[$; soit g^{-1} sa fonction réciproque.

b) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $g^{-1}(x) = -\frac{\ln x}{\ln 3}$,

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $\left(g^{-1}\right)'(x)$

3- Tracer les courbes représentatives de g et g^{-1} dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Activité 4

De 2000 à 2007 on a suivi l'évolution de deux populations A et B de deux espèces animales. Ces populations sont données respectivement par : $f(t) = 10 \times 1,2^t$ et $g(t) = 40 \times 0,9^t$

f(t) et g(t) sont exprimées en milliers d'individus et t = 0 à la fin de l'an 2000.

1- Etudier le sens de variation de chacune des fonctions f et g sur $[0,7]$.

2- Dresser les tableaux de variation de f et de g.

3- Représenter graphiquement dans le même repère orthonormé les courbes des fonctions f et g.

4- a- Vérifier graphiquement que la population A dépasse la population B vers la fin de l'an 2004.

b- Montrer que f(t) = g(t) pour $t = \frac{\ln 4}{\ln 4 - \ln 3}$. En déduire que la population A dépasse la population B en septembre 2004.

I- On se propose d'élaborer sous un tableur (tel que Excel), une feuille de calcul qui nous permet ce calculer la valeur acquise d'un capital placé Cp durant n années sur un taux de t% cette valeur acquise est obtenue par : $Cp(1+\frac{t}{100})^n$.

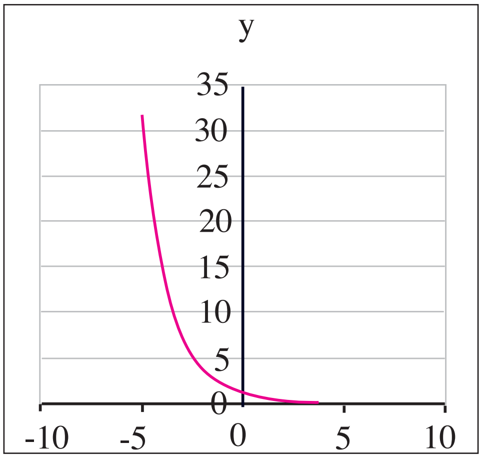
Etape 1 : Donner un nom à chaque cellule de données.
Définir les variables *i* et *aire*
* Sélectionner la cellule B1
Dans le menu : 'Insertion' sélectionner la commande 'nom' puis 'définir'.
Taper la lettre : Cp ; puis valider
* Sélectionner la cellule B2
Dans le menu : 'Insertion' sélectionner la commande 'nom' puis 'définir'.
Taper : t ; puis valider
* Sélectionner la cellule B3
Dans le menu : 'Insertion' sélectionner la commande 'nom' puis 'définir'.
Taper : n ; puis valider

Etape 2 : Recopier le tableau suivant

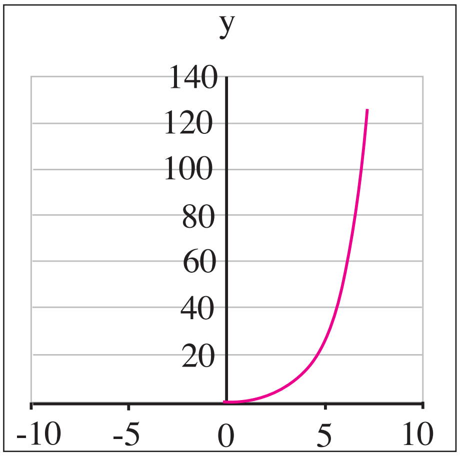
Capital placé (Dt)	100
Taux (%)	4
Nombre d'années	2
Valeur acquise (Dt)	=(Cp*(1+t/100)^n)

Etape 3 : Saisir de différentes valeurs du capital, du taux ou du nombre d'années.

II- En revenant à la rubrique *avec l'ordinateur du chapitre étude de fonctions*, représenter des exemples de fonctions du type $x \mapsto a^x$ où a est un réel strictement positif différent de 1.
On obtient les courbes suivantes pour a = 0,5 et pour a = 2



f = Exp(x * Log(0,5))



f = Exp(x * Log(2))

Reprendre le même travail avec d'autres valeurs de a.

Exercices et problèmes

Logarithme népérien

1- Indiquer les bonnes réponses parmi les réponses a, b, c et d.

	a	b	c	d
$\ln 2 + \ln 3 =$	$\ln 5$	$\ln 6$	$\ln 12 - \ln 2$	$\dfrac{\ln 12}{\ln 2}$
$3.\ln 2 =$	$\ln 6$	$2.\ln 3$	$\ln 8$	$2 \ln 4$
$\ln 4 + 3.\ln 2 - \ln 16 =$	$\ln 2$	$6.\ln 2 - \ln 32$	$\ln 32 - \ln 16$	$\dfrac{\ln 32}{\ln 16}$

2- Ecrire en somme de logarithmes :

a) $\ln\left(\dfrac{3\times 7^2}{24}\right)$; b) $\ln\left(\dfrac{10\,000}{81}\right)$; c) $\ln\left(\dfrac{2a^3\times b^2}{25}\right)$ où a et b dans $]0,+\infty[$

d) $\ln\left(3(x-2)^2\right)$ où $x\in]2,+\infty[$; e) $\ln\left(x^2(x-3)\right)$ où $x\in]3,+\infty[$

3- Ecrire à l'aide d'un seul logarithme :

a) $\ln\dfrac{2}{3}+\ln\dfrac{3}{2}+\ln 2$; b) $2\ln 2+\ln 3-\ln 5$; c) $3\ln 10-\ln 0,02+5\ln 2$

4- Préciser l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes puis l'exprimer à l'aide d'un seul logarithme :

a) $f : x \mapsto \ln x+\ln(x-1)$; b) $g : x\mapsto \ln(3-x)+\ln(3+x)$

c) $h : x\mapsto 2\ln(x^2-1)-3\ln(x+1)$; d) $k : x\mapsto 2\ln(5-x)+\ln 7-\ln x$

5- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((1-x)\ln x\right)$; a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-(\ln x)^2\right)$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x-2+\ln x\right)$; f) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)$; g) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2\ln x+1}{x}\right)$; h) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$

6- Calculer les limites de chacune des fonctions suivantes aux bornes de son ensemble de définition D :

a) $f : x\mapsto 2x^2-\ln x$ $D=]0,+\infty[$; b) $f : x\mapsto -(\ln x)^2+2\ln x-2$ $D=]0,+\infty[$

c) $f : x\mapsto 2x\ln x-x$ $D=]0,+\infty[$; d) $f : x\mapsto\dfrac{2x-\ln x}{x}$ $D=]0,+\infty[$

e) $f : x\mapsto\dfrac{2x+1}{\ln x}$ $D=]1,+\infty[$; g) $f : x\mapsto\dfrac{3x\ln x+2}{x^2}$ $D=]0,+\infty[$

7- Résoudre dans IR

a) $2\ln x=\ln 3$; b) $\ln(2x^2)=0$; c) $\ln(x+2)=2\ln x$; d) $\ln x=-4$

e) $\ln(x-4)=\ln(2x-1)$; f) $2\ln x-\ln(x+1)=2\ln 2$; g) $(\ln x)(1+\ln x)=0$

8- a) le plan P étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \ln x$.
b) En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto -\ln x + 2$ puis celle de la fonction $h : x \mapsto \ln(x-2)+1$.

9- On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = -x + 1 + \ln x$
C désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.
1- a) Calculer la limite de f à droite en 0 ; donner alors l'équation de l'asymptote verticale de la courbe C.
b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x$ et interpréter graphiquement le résultat.
2- Dresser le tableau de variation de f
3- Tracer la courbe C.

10- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2(2\ln x - 1) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
1- a) Etudier la continuité de f à droite en 0.
b) Vérifier que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$.
c) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, interpréter graphiquement le résultat.
d) Dresser le tableau de variation de f.
2- Déterminer l'intersection de la courbe c avec l'axe des abscisses.
3- Tracer la courbe C.

11- On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x + 1}$; On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
a) Justifier que f est définie sur $]0,+\infty[\setminus \{e^{-1}\}$
b) Calculer les limites de f à droite et à gauche en $\dfrac{1}{e}$. Interpréter graphiquement le résultat.
c) Vérifier que la courbe C admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont-on déterminera la direction.
d) Dresser le tableau de variation de f.
e) Tracer la courbe C.

12- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{2\ln x}{x}$
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
1- Déterminer les limites de f à droite en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
2- Dresser le tableau de variation de f.
3- Montrer que la courbe C et la droite D d'équation y = 1 ont un point commun A dont on donnera les coordonnées.
4- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point A.
5- Tracer D et T et la courbe C.

13- Soit f la fonction définie sur $]0,15]$ par $f(x)=3+2\ln x-(\ln x)^2$

On désigne par c sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.

b) Démontrer que f est dérivable sur $]0,15]$ et vérifier que f' a le même signe que $1-\ln x$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2- Déterminer les points d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.

3- Tracer la courbe C.

4- La fonction f est la fonction bénéfice d'une production de x milliers d'objets. (f(x) est exprimé en milliers de dinars).

5- a) Déterminer la plage de production qui permet de réaliser un profit.(On donnera les bornes de l'intervalle en valeur approchée à 0,01 près).

c) Donner une valeur arrondie entière de la quantitéx_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.

Fonctions exponentielles

14- Indiquer les bonnes réponses parmi les réponses a, b, c et d.

	a	b	c	d
$\frac{(e^2)^3}{e^{-1}}=$	e^6	e^7	e^8	e^9
$\frac{e^4\times e^{-2}}{e}=$	e^5	e	$\frac{1}{e^{-1}}$	e^{-1}
$\frac{(2e)^3\times e^3}{5}=$	$\frac{2^3e^9}{5}$	$\frac{2^3e^6}{5^3}$	$\frac{2^3e^6}{5}$	$\frac{1}{5(2e^2)^{-3}}$

15- Résoudre dans IR

a) $e^x(e^x-1)=0$; b) $(e^x-2)(2e^x+4)=0$; c) $e^{-2x+3}=1$

d) $\frac{2e^x+1}{e^x-1}=3$; e) $e^{-x}=e^{\frac{x}{2}}$; f) $2e^{-0,5+7}=1$; g) $e^{0,1x-2}=0$

16-

1- a) Résoudre dans IR l'équation $x^2-4x-5=0$

b) En déduire la résolution dans IR des équations :

- $(\ln x)^2-4\ln x-5=0$; • $e^x-4=5e^{-x}$

2- a) Résoudre dans IR l'équation $x^2-10x+9=0$ puis $(\ln x)^4-10(\ln x)^2+9=0$

b) En déduire les solutions de l'équation : $(\ln x)^4-10(\ln x)^2+9=0$

17- Résoudre dans IR

a) $e^{2x}-4e^x=0$; b) $e^{2x}-2e^x+1=0$; c) $2e^{2x}+e^x=\ln 0,1$

d) $1-e^x>0$; e) $3-2e^{-x}\geq 0$; f) $e^{-x+4}\leq 10^{-2}$.

18- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^x$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$; c) $\lim\limits_{x\to0^+} x^4 \ln x$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^4}$

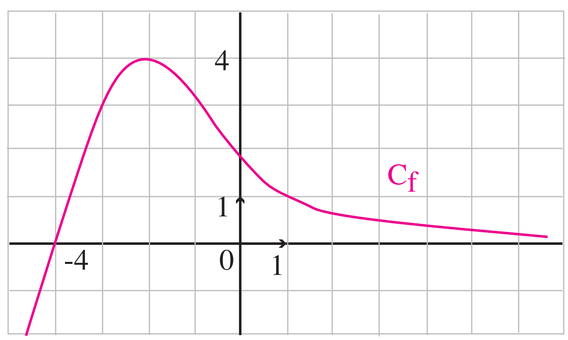
e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$; f) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{e^x}$; g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2^x}$; h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{(0,1)^x}$

19- Déterminer dans chacun des cas suivants les limites de f aux bornes de son ensemble de définition puis dresser son tableau de variations et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

a) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ $D = IR^*$; b) $f : x \mapsto xe^x$ $D = IR$

c) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x + x}$ $D = [0,+\infty[$; d) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+x}$ $D =]-\infty,,-1[\cup]-1,+\infty[$

20- Soit la fonction définie sur IR dont une représentation graphique est la suivante :



1- a) Déterminer graphiquement les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) En déduire les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $g : x \mapsto \exp(f(x))$

2- a) Résoudre graphiquement $f(x) = 0$; puis $f(x) \geq 0$.

b) En déduire les solutions de $\exp(f(x)) = 1$, puis $\exp(f(x)) \geq 1$

3- Dresser le tableau de variation de f puis celui de g.

21- Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; interpréter graphiquement les résultats.

2- Justifier que f est dérivable sur IR et calculer f ’(x).

3- Dresser le tableau de variation de f.

4- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d’abscisse nulle.

5- Tracer la droite T et la courbe C.

6- Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l’on déterminera On notera g sa fonction réciproque.

7- Tracer dans le même repère, la courbe représentative de la fonction g.

8- Expliciter g(x) pour x appartenant à J.

22- f est la fonction définie sur IR par : $f(x) = 2e^x - 2 - xe^x$

On désigne par c sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

a- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b- Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
c- Donner une équation de la droite D asymptote à la courbe C en $-\infty$
d- Etudier la position relative de C et D.
e- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans IR deux solutions dont l'une appartient à l'intervalle $[1,5\ ;\ 1,6]$.
f- Tracer C et D.

23- Résoudre dans $]0,+\infty[$ chacune des équations suivantes :

a) $\left(1+\frac{t}{10}\right)^3 = 125$; b) $12 = 17(1-x)^6$; c) $48(1+x)^{12} = 187$

24- Déterminer le plus petit entier n vérifiant :

a) $0,6^n \le 10^{-3}$; b) $2,02^n \ge 500$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \le 0.01$

25- a) x étant un taux annuel, vérifier que son taux mensuel équivalent x' est tel que

$(1+x')^{12} = 1+x$ c'est à dire $1+x' = (1+x)^{\frac{1}{12}}$

b) Calculer la valeur acquise par un capital de 2000 DT placé à 7% annuel durant
- six ans
- six ans et demi
- six ans et huit mois

c) Déterminer le temps de placement, au mois près pour un capital de 2500 DT, placé au taux annuel de 4,5%, ayant acquis la valeur de 3161,5 DT
d) Calculer le taux mensuel équivalent à un taux annuel de 8,5%
e) calculer le taux journalier équivalent à un taux annuel de 21% (une année étant de 365 jours).

26- Le bureau d'étude d'une société de grande distribution a établi une relation donnant la superficie y (en m^2) de ses magasins en fonction du nombre x de clients (en milliers par jour) :
$\ln y = 0,09x + 7,1$

1- a- Déterminer y en fonction de x sous la forme $y = k.a^x$, où k est un réel dont-on donnera une valeur arrondie à la centaine.
b- calculer la superficie d'un magasin pour une clientèle de 7 milliers.
2- Déterminer à partir de quel nombre de clients la superficie est supérieure à 2000m^2.(on donnera une valeur approchée par défaut à 0,1 millier près.

27- a- La population d'un ville est passée en 5 ans de 20000 habitants à 29000 habitants . calculer le taux annuel de croissance de la population
b- Déterminer à 0,1 millier près la population de cette ville après 10 ans en supposant qu'elle garde le même taux de croissance.

28- a- Un arbre, planté alors que sa taille mesurait 20cm, atteint 2m de hauteur au bout de 5 ans. Calculer le pourcentage moyen annuel d'augmentation de la hauteur de l'arbre.

Problèmes

29 - La fonction f est définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x+1)$$

1- a- Calculer la limite de f en –1. Interpréter graphiquement le résultat.

b- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{(x+1)}{x} = 0$; calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- a- Calculer f’(x) et étudier le sens de variation de f.

b- Dresser le tableau des variations de f. Préciser la valeur exacte du maximum de f.

3- Nommer sur la figure précédente les points O,I et J du repère et ajouter les asymptotes éventuelles à la courbe.

4- a- Montrer qu’il existe deux réels α et β tels que $\alpha < 0 < \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

b- Donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α et de β.

c- En déduire le signe de f(x) sur $]-1,+\infty[$

5- Soit g la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$$

a- Calculer g’(x)

b- En déduire l’expression de la primitive de f s’annulant pour x=0.

30- Une entreprise fabrique un produit en quantité x exprimée en milliers de tonnes.

Le coût total de fabrication est donné par $C_t(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{9}{2}\ln(x+1)$ pour $x \in [0,5]$

Les coûts sont exprimés en millions de dinars.

A- On considère la fonction f définie sur [0,5] par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{9x}{x+1} - 9\ln(x+1)$.

1- Vérifier que : $f'(x) = \dfrac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$ pour tout x de [0,5].

2- Dresser le tableau de variation de f sur [0,5].

3- Montrer que l’équation f(x) = 0 admet dans]0,5] une seule solution c .

4- Déterminer un encadrement à 10^{-3} près de c.

5- Dresser le tableau de signe de la fonction f sur [0,5].

B- La fonction coût moyen C_m est définie sur]0,5] par $C_m(x) = \dfrac{C_t(x)}{x} = \dfrac{x}{4} + \dfrac{9}{2}.\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

1- Calculer $C'_m(x)$ et vérifier que l’on peut écrire $C'_m(x) = \dfrac{f(x)}{2x^2}$.

2- Etudier alors le sens de variation de C_m puis dresser son tableau de variation sur]0,5].

3- Pour quelle production l’entreprise a-t-elle un coût moyen minimal, exprimé en dinars par tonnes ? Déterminer ce coût.

31- Partie A

Soit g la fonction définie sur l’intervalle $]0,+\infty[$ par g (x) = x – 5 + 5lnx.

1- Etudier le sens de variation de g (ne pas étudier les limites).

2- a) Montrer que l'équation g(x) = 0 a une solution unique dans l'intervalle [1 ; 7]. On note α cette solution.
b) Déterminer la valeur décimale arrondie au centième de α.
3- Etudier le signe de g(x), pour x appartenant à $]0,+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{(x-5)\ln x}{x}$.

1- Vérifier que l'on peut écrire : $f(x)=\dfrac{1}{x}(x-5)\ln x=\ln x-\dfrac{5\ln x}{x}$

a- Déterminer la limite de f en 0. Interprétez graphiquement ce résultat.
b- Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2- a- Soit f' la fonction dérivée de f . Calculer f' (x).
b- Montrer que f'(x) et g(x) ont le même signe.
c- Dresser le tableau de variation de la fonction f.

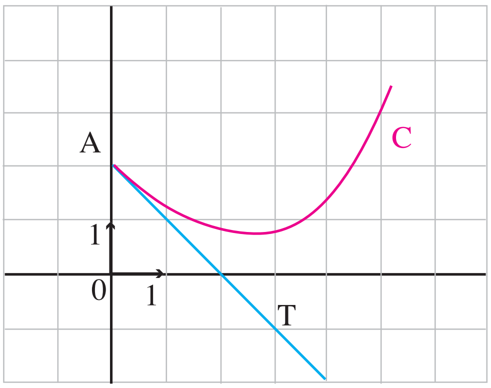
3- On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a- Soit A le point de la courbe (C) d'abscisse 1.
Donner une équation de la droite D, tangente en A à la courbe (C).
Déterminer les coordonnées du point d'intersection de D et de l'axe des ordonnées.
b- Tracer D et (C) (Unités graphiques : 2cm).

32- Le but du problème est d'étudier le coût marginal et le coût total de production d'un produit dans une entreprise.

Partie A

La courbe (C), ci-contre, est la représentation graphique d'une fonction h définie sur [0 ; +∞[.
Le point A a pour coordonnées (0 ; 2).
La droite (T) est tangente à la courbe (C) au point A.



1. Préciser h(0).
Déterminer à l'aide d'une lecture graphique le nombre dérivé h'(0).
Justifier la réponse.
2. La fonction h, définie sur [0 ; +∞[est de la forme :
$h(x) = ax^2 + bx + c + 2\ln(x + 1)$ où a, b et c sont des nombres réels.
On note h' la dérivée de la fonction h, exprimer h'(x) en fonction de a et b.
3. On donne $h'(3)=\dfrac{1}{2}$. En utilisant ce résultat et les résultats de la question 1., déterminer chacune des valeurs a, b et c.

Partie B

Soit f la fonction définie sur I = [0 ; 5] par :

$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 2 + 2\ln(x+1)$.

1. a) Calculer la dérivée f ' de la fonction f.

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle I : $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x+1}$

c) Etudier le signe de la fonction f ' sur l'intervalle I.

d) En déduire les variations de f sur [0 ; 5].

2. Soit g la fonction définie sur I par : $g(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - x$.

a) Calculer la dérivée de la fonction g.

b) En déduire une primitive F de la fonction f sur I.

c) Calculer la valeur exacte, puis la valeur approchée à 10^{-3} près, de la différence F(5) – F(0).

Partie C

Sur l'intervalle [0 ; 5], la fonction f de la partie précédente représente le coût marginal de production d'un liquide conditionné en flacons d'un litre, en fonction de la quantité produite.
On rappelle que le coût marginal de production est assimilé à la dérivée du coût total.
x représente le volume en milliers de litres, x variant sur l'intervalle [0 ; 5].
f(x) représente le coût marginal en milliers de dinars.

1. Quel est le coût marginal, en dinars, du 3000e litre produit ?
2. Pour quelle quantité produite le coût marginal est-il minimum ? (Donner la valeur au litre près.)
3. Les coûts fixes sont de 1000 dinars.

a) Montrer, en utilisant le résultat de la partie B, question 2. b), que le coût total est donné par l'expression définie sur [0 ; 5] par : $C(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2(x+1)\ln(x+1) + 1$.

b) Calculer C(5) – C(0) à un dinar près et interpréter en termes de coût cette différence.
Comparer ce résultat à celui trouvé à la partie B, 2. c) et expliquer cette réponse.

33- **Partie I :**

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 3,2 - 8\ln x$

1- Déterminer la limite de la fonction f en 0.

On peut écrire $f(x) = x^2\left(1 - \frac{3,2}{x^2} - \frac{8\ln x}{x^2}\right)$. Déterminer la limite de f en $+\infty$

2- a) Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$

b) Montrer que l'équation f(x) =0 possède une solution unique α dans [3, 4], puis déterminer une valeur approchée par excès de α à 10^{-1} près.
Dans la suite du problème, on utilisera cette valeur dans les calculs.

c) En déduire le signe de f(x) sur [1, 6].

Partie II : Une application économique

Une entreprise fabrique un solvant pour peinture. x désigne le nombre de m^3 de solvant produit chaque jour ; $x \in [1, 6]$. Le coût total de production de ces x mètres cubes, en milliers de dinars est : $C_t(x) = \frac{x^2}{4} + 2,8 + 2\ln x$.

On cherche à déterminer le prix de vente pour que l'entreprise fasse des bénéfices.

A. Étude de la fonction coût total C_t :

1- Étudier les variations de C_t sur [1, 6].
2- a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$C_t(x)$ à 10^{-1} près											

b) Tracer dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la représentation graphique (C) de la fonction C_t (unités graphiques : 2cm pour 1 m^3 et 1cm pour 1 millier de dinars)

B. Étude de la fonction coût moyen C_m :

Pour une production journalière de x mètres cubes, le coût moyen de production en milliers de dinars de 1 m^3 est : $C_m(x)=\dfrac{C_t(x)}{x}$

1- Montrer que $C_m(x)=\dfrac{x^2+11,2+8\ln x}{4x}$.

2- Démontrer que, pour tout réel x de [1, 6], $C'_m(x)=\dfrac{f(x)}{4x^2}$. (f étant la fonction définie dans la partie I).

3- a. Étudier les variations de la fonction C_m sur [1, 6].
b. Quel est le coût minimum de production de $1m^3$ de solvant ? Pour quelle production ?
c. Comment faut-il choisir le prix de vente de $1m^3$ de solvant pour que l'entreprise puisse faire des bénéfices ?

34- Une entreprise fabrique des objets à l'aide d'une machine à emboutir. On désigne par x, en centaines, le nombre d'objets fabriqués et l'on sait que le coût, exprimé en milliers de dinars, d'utilisation de cette machine en fonction de x est exprimé par : $f(x)=\dfrac{3}{4}x+e^{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}$

1- Etudier le sens de variation de f sur $[0,+\infty[$ puis dresser son tableau de variation.

2- Donner une valeur arrondie entière du nombre d'objets qu'il faut produire pour que le coût soit minimal.

3- Un objet fabriqué par cette machine est vendu 8 Dt. Prouver que le bénéfice, en milliers de dinars, en fonction de x est donné par : $g(x)=\dfrac{1}{20}x-e^{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}$

4- Dresser le tableau de variation de g sur $[0,+\infty[$.

5- a) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α et que $3,13<\alpha<3,14$
b) En déduire le nombre minimal d'objets à fabriquer afin que l'entreprise réalise un bénéfice.

35- **A-** On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x+3+e^{-x+2}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prendra pour unité graphique 1cm).

1- Calculer la limite de f en $+\infty$
2- Montrer que la droite D : y = x + 3 est asymptote à C.
3- Dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$.
4- a) Tracer la courbe C et la droite D.
b) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E) : f(x) = 8.

c) Justifier que dans l'intervalle $[2,6]$, l'équation (E) admet une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

B- Une entreprise industrielle produit chaque jour x centaines d'objets ($1 \leq x \leq 20$). Le coût de fabrication de x centaines d'objets est modélisé par f(x) exprimé en milliers de dinars.

1- Calculer le coût de fabrication de 600 objets, 1000 objets, 1200 objets arrondi au dinar.

2- Quelle quantité d'objets doit-on fabrique pour que le coût de fabrication soit le plus proche possible de 8000DT ?

3- Montrer que le coût de fabrication est minimal lorsque l'entreprise fabrique une quantité q_0 d'objets. Donner une valeur de q_0.

Quel est alors le coût, en dinars, de fabrication d'un objet ?

36- On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x + 2\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et on note c sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm).

1- Justifier que $f(x) = x + 2 - \dfrac{4}{e^x + 1}$ puis calculer la limite de f en $+\infty$.

2- Montrer que la droite d :y = x + 2 est asymptote à C en $+\infty$.
Etudier la position de C par rapport à D.

3- On désigne par M le point de C d'abscisse x et n le point de D de même abscisse x.
La distance entre les points M et N est alors le nombre $MN = \dfrac{4}{e^x + 1}$.
Résoudre l'inéquation $MN < 10^{-1}$.

4- Calculer f '(x) puis dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$.

5- Démontrer que l'équation f(x) = 1 admet dans l'intervalle $[0,1]$ une solution unique x_0 dont on donnera un encadrement à 10^{-1} près.

6- Donner une équation cartésienne de la tangente T à C au point d'abscisse nulle.

7- Tracer D, T et la partie de la courbe C correspondant aux points dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[0,4]$.

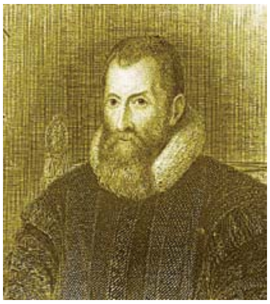
8- Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

a) déterminer une primitive de g sur $[0,+\infty[$.

b) Vérifier que pour tout x de $[0,+\infty[$ on a $\dfrac{1}{e^x + 1} = 1 - g(x)$.

c) en déduire une primitive de f sur $[0,+\infty[$

Math culture



John Napier (1550 ; 1617)

A la fin du XVI^{e} et au début du XVII^{e} siècle, l'astronomie se développe considérablement. L'étude du mouvement des planètes conduit à de longs et pénibles calculs. Les banquiers sont aussi confrontés à des calculs fastidieux car ils calculent les intérêts dans une économie occidentale dopée par l'exploitation des terres découvertes. Il n'est pas étonnant que les mathématiciens cherchent alors les méthodes simplificatrices de calcul, L'idée est simple : remplacer des multiplications par des additions, mais la réalisation est difficile. C'est l'écossais John Napier qui inventa un algorithme par lequel une addition remplaçait une multiplication. Un fait est remarquable, du temps de Napier, On ne connaît ni les limites ni les dérivées, et Neper n'a donc pas inventé la *fonction logarithme.*

Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 ; 1783). C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre. En 1748, Euler explique que :
$e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + ...$
Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes.

Les premières décimales du nombre e sont :e=2,71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759457138217852516642 74…

Les applications du nombre e sont variées. Nous retrouvons la fonction exponentielle en économie (calculs des intérêts versés de façon continue), en biologie (mesure de la multiplication des cellules vivant dans un organisme), en sciences physiques …

Voici un extrait du "Théorème du perroquet" de Denis Guedj qui donne une représentation concrète du nombre e :

« Suppose qu'il y a un an tu aies amassé une épargne qui nous permettra de payer notre voyage pour Manaus. Soit E, cette épargne. Tu l'as placé en attendant. Ton banquier t'a proposé un taux d'intérêt surprenant : 100 % ! Ne rigole pas, ça s'est vu. Rêve ! Calcule ! Au bout d'un an, tu aurais eu E + E = 2E. Tu aurais doublé ton épargne. Si au lieu de toucher les intérêts à la fin de l'année, tu les avais touchés tous les six mois et que tu les aies replacés, au bout d'un an ça t'aurait fait $E(1+\frac{1}{2})^{2}$.

Calcule Tu aurais plus que doublé ton épargne tu aurais 2,25E. Si au lieu de toucher les intérêts tous les six mois, tu les avais touchés tous les trimestres et que tu les aies replacés, au bout de l'année, ça t'aurait fait $E(1+\frac{1}{4})^{4}$. Calcule ! Tu aurais gagné encore plus : 2,441E. Si tu les avais touchés tous les mois et que tu les aies replacés, ça t'aurait fait $E(1+\frac{1}{12})^{12}$.

Calcule ! 2, 596E. Encore plus ! Puis, tous les jours : $E(1+\frac{1}{365})^{365}$. Encore plus toutes les secondes, encore plus. Et puis, tous les riens du tout, « en continu ». Tu n'en peux plus, tu t'envoles, tu planes, tu te dis que c'est Byzance, que ton épargne va doubler, qu'il va quadrupler, décupler, centupler, millionupler, milliardupler, [...] Tes intérêts composés, ils ont beau se décomposer, eh bien, à l'arrivée, tu n'a même pas le triple de ton épargne, ni même 2,9 fois plus, ni même 2,8 fois plus, ni même 2,75 fois plus, ni même 2,72 fois plus... Tu as seulement 2, 71 828 1828 !! ... fois plus. Mon pauvre, après toute cette richesse, te voilà seulement e fois moins pauvre qu'au départ ! ».

Chapitre 5

INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

Pour commencer

Cours

- Définition et propriétés
- Intégration par parties
- Valeur moyenne
- Calcul d'aires planes

Avec l'ordinateur

Exercices et problèmes

Math culture

Pour commencer

Activité 1

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet une primitive sur l'intervalle I et déterminer celle qui s'annule en1 :

a) $f : x \mapsto x^2 - x - 1$ $\quad$ $I = IR$; $\quad$ c) $f : x \mapsto \dfrac{-1}{x^3}$ $\quad$ $I =]0, +\infty[$

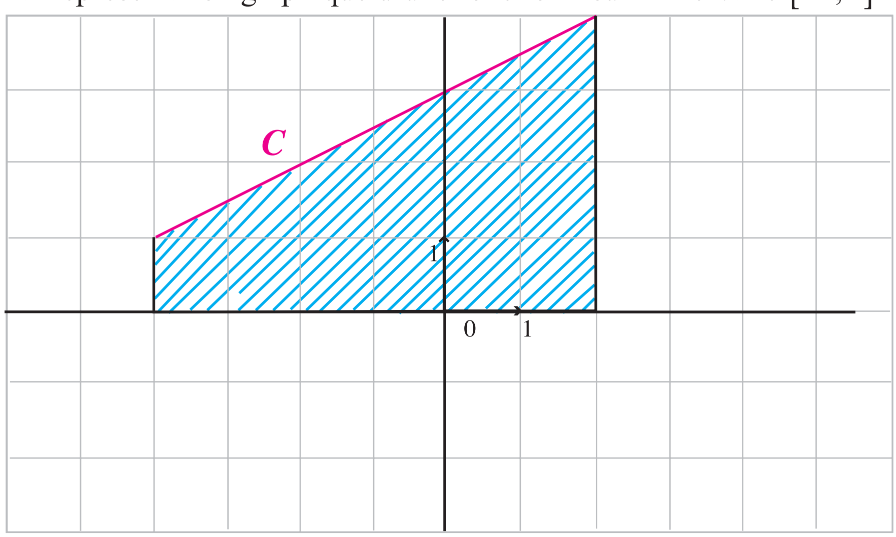
c) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ $\quad$ $I = IR$; $\quad$ d) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ $\quad$ $I = IR$

Activité 2

Le coût marginal d'un produit exprimé en centaines de dinars par tonne, est modélisé par la fonction: $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 50$, lorsque la quantité de production x est comprise entre 0 et 5 tonnes.
Déterminer le coût total de production de x tonnes sachant que les coûts fixes s'élèvent à 1000 dinars.

Activité 3

On donne la représentation graphique d'une fonction f sur l'intervalle $[-4, 2]$



1- Justifier que f admet une primitive F sur $[-4, 2]$.

2- Expliciter f(x) pour x dans $[-4, 2]$.

3- Donner une primitive F de f sur $[-4, 2]$, puis calculer $F(2) - F(-4)$

4- Déterminer l'aire A de la région hachurée (en unités d'aire).

5- Comparer A et $(F(2) - F(-4))$.

I- Définition et propriétés

1) Définition :

Activité 1

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2 - x + 1$

1- Montrer que f admet au moins une primitive sur IR.
2- Déterminer la primitive F de f sur IR qui prend pour valeur 1 en -2.
3- Donner une autre primitive G de f sur IR.
4- Comparer $F(b) - F(a)$ et $G(b) - G(a)$.

Activité 2

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, F et G deux primitives de f sur I.

1- Montrer que pour tous réels a et b de I, $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$.

2- En déduire que le réel $J = F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive de f sur l'intervalle I.

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant deux réels a et b.
On appelle intégrale de f entre a et b et on note $\int_a^b f(t)\,dt$, le réel défini

par $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

Remarques:

1) L'écriture $\int_a^b f(t)dt$ se lit « Intégrale (ou somme) de a à b de f(t) dt »

2) Dans l'écriture $\int_a^b f(t)\,dt$, on peut remplacer la lettre t par toute autre lettre autre que a et b, par exemple : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \dots.$

3) On écrit $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$ (On lit F(t) pris entre a et b)

$= F(b) - F(a)$

4) Lorsque $a < b$, le réel $\int_a^b f(t)dt$ est appelé intégrale de f sur $[a,b]$.

Activité 3

Calculer les intégrales suivantes :

$\int_{-1}^{3} a\,dt \quad (a \in IR)$; $\int_{0}^{2} 2t\,dt$; $\int_{0}^{1} x^3 dx$

$\int_{-1}^{1} 2e^{2x+1}\,dx$; $\int_{1}^{2} \frac{x+1}{x^2+x}dx$; $\int_{1}^{2} \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}dx$

Activité 4

1- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

a- Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b- En déduire $\int_{1}^{e} \frac{\ln(t)}{t}dt$.

2- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

a- Justifier que f admet au moins une primitive sur IR.

b- Calculer $\int_{0}^{1} f(t)\,dt$.

2) Propriétés :

Relation de Chasles :

Activité 1

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

1- Vérifier que pour tous réels a, b et c de I on a : $\int_{a}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{b} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$.

2- En déduire que $\int_{a}^{a} f(t)\,dt = 0$ et que $\int_{a}^{b} f(t)\,dt = -\int_{b}^{a} f(t)\,dt$.

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I

Pour tous réels a, b et c de I on a $\int_{a}^{b} f(t)\,dt = \int_{a}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{b} f(t)\,dt$ (*Relation de Chasles*)

Pour tout réel a de I on a $\int_{a}^{a} f(t)\,dt = 0$

Pour tous réels a et b de I on a $\int_{a}^{b} f(t)\,dt = -\int_{b}^{a} f(t)\,dt$. (*inversion des bornes*)

Activité 2

1- On considère la fonction f définie sur IR $f(x)=|x-1|$

a) Calculer les intégrales : $\int_0^1 f(t)\,dt$ et $\int_1^3 f(t)\,dt$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^3 |t-1|\,dt$

2- Calculer de même les intégrales suivantes :

$\int_1^3 \left(|x-2|+x^2\right)dx$; $\int_1^e \left|1-\frac{2}{t}\right|dt$.

Linéarité de l'intégrale

Activité 1

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b.
F et G deux primitives respectives de f et de g sur I.

1- Montrer que $\int_a^b \left(f(t)+g(t)\right)dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt$.

2- Soit $k\in$ IR, montrer que $\int_a^b k.f(t)\,dt=k\int_a^b f(t)\,dt$.

3- En déduire que pour tous réels α et β,

$\int_a^b \left(\alpha f(t)+\beta g(t)\right)dt=\alpha\int_a^b f(t)\,dt+\beta\int_a^b g(t)\,dt$.

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b.

* $\int_a^b \left(f(t)+g(t)\right)dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt$.
* Pour tout réel k on a $\int_a^b k.f(t)\,dt=k\int_a^b f(t)\,dt$

Activité 2

Soit f une fonction continue sur l'intervalle [-1, 2]

Sachant que : $\int_{-1}^2 f(t)\,dt=\frac{1}{2}$, calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-1}^2 4f(t)\,dt$; b) $\int_{-1}^2 \left(f(t)-e^t\right)dt$; c) $\int_{-1}^2 \left(3e^t-2f(t)\right)dt$

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(t) = t\ln t - t$.

a- Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(t) = \ln t$.

b- Calculer $I = \int_1^e \ln t\,dt$.

c- En déduire $J = \int_1^e \ln 3t\,dt$ et $K = \int_1^e \ln(t^2)\,dt$.

Intégrales et ordre :

Activité 1

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
On suppose que pour tout x de I on a $f(x) \geq 0$.

1- a) Justifier que la fonction F est croissante sur I.

b) En déduire que si a et b sont deux éléments de I tels que $a \leq b$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

2- Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle [a,b]

Montrer que : si pour tout x de [a,b] $u(x) \leq v(x)$ alors $\int_a^b u(x)dx \leq \int_a^b v(x)dx$.

Propriétés :(*Positivité et comparaison d'intégrales*)

1)Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.

Si pour tout réel x de $[a,b]$ on a $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

2) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$.

Si pour tout réel x de $[a,b]$ on a $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

a- Montrer que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

b- En déduire que pour tout x de $[2,3]$ on a $1,39 \leq f(x) \leq 1,64$.

c- Donner alors un encadrement de $I = \int_2^3 e^{\frac{1}{x}}\,dx$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x-1-\ln x$

1- a- Déterminer le sens de variation de f sur $]0,+\infty[$.

b- Calculer $f(1)$ et en déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$, on a $f(x)\geq 0$.

2- Prouver que $0\leq \int_1^2 \ln x\,dx \leq \frac{1}{2}$.

Activité 4

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x^2-1$.

a- Calculer $\int_0^2 f(t)dt$.

b- Déterminer le signe de f sur $[0,2]$.

c- Est il vrai que si $\left(a\leq b \text{ et } \int_a^b f(t)dt\geq 0\right)$ alors f est positive sur $[a,b]$.

II- Intégration par parties :

Activité 1

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de IR

1- a) Déterminer une primitive sur I de la fonction : $u'v+uv'$.

b) En déduire une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x\mapsto x\ln x+\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}$

c) Calculer $\int_1^e\left(x\ln x+\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)dx$ puis $\int_1^e x\ln x\,dx$.

2- En s'inspirant de la question 1-, calculer les intégrales $\int_0^1 xe^x\,dx$ puis $\int_0^1 x^2e^x\,dx$.

Théorème

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle [a,b] dont les dérivées u' et v' sont
continues sur [a,b].

On a $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)\,dx$

Remarque

On utilise la méthode d'intégration par parties, chaque fois que l'on veut calculer une intégrale de la forme $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$, dont le calcul direct n'est pas simple alors que celui de l'intégrale $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx$ l'est .

Activité 2

1- Calculer chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

a) $I = \int_2^0 (2t-1)e^t dt$ b) $J = \int_1^e (x+1)\ln x dx$ c) $\int_0^{\pi} t\cos t dt$

2- A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer les intégrales

$I = \int_0^{\pi} t^2 \sin t\, dt$ et $J = \int_2^0 (x^2 - x)e^x\, dx$.

III- Valeur moyenne :

Activité 1

Une entreprise fabrique un produit en quantité x, avec $x \in [0, 700]$

Le coût total de fabrication exprimé en dinars est donné par $C(x) = 0.02x^2 + 2500x$

1- Déterminer le coût marginal C'(x) pour $x \in [0, 700]$.

2- Calculer le coût moyen m pour 700 objets fabriqués.

3- Calculer $I = \dfrac{1}{700}\int_0^{700} C'(x)\, dx$

On obtient m = I, nous dirons que dans **ce cas** que le coût moyen de fabrication de 700 objets est égal à la moyenne du coût marginal entre 0 et 700 objets fabriqués.

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a , b]

On appelle valeur moyenne de f sur [a , b] et on note $\bar{f}$ le réel $\bar{f} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, dt$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $[-2, 3]$ par $f(x) = 3x^2 - 2x$.

Calculer la valeur moyenne $\bar{f}$ de f sur $[-2, 3]$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = e^{1-x}$

1- Calculer la valeur moyenne m_1 de f sur l'intervalle $[1, 4]$, puis la valeur moyenne m_2 de f sur l'intervalle $[4, 8]$.

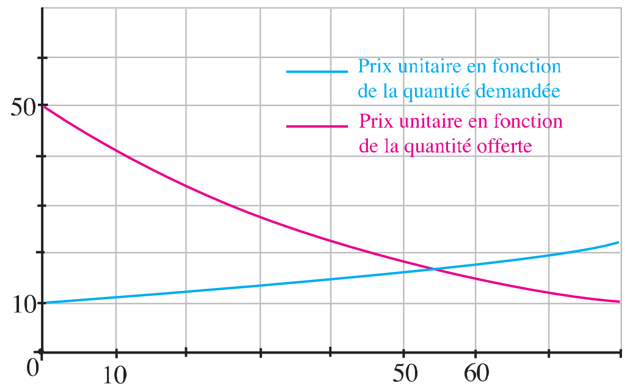
2- Soit m la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1, 8]$

Vérifier que $m = \dfrac{3m_1 + 4m_2}{7}$.

Activité 4

La courbe d'offre d'un produit est définie par la relation liant quantité offerte q (en tonnes) et prix unitaire p (en dinars par kilogramme) : $p_O = 10\times(1{,}01)^q$.

La courbe de demande est définie par la relation liant quantité demandée et prix unitaire : $p_d = 50\times(0{,}98)^q$.



1- Déterminer une valeur arrondie entière q_e de la quantité d'équilibre.

(la quantité d'équilibre correspond à l'égalité du prix d'offre et du prix de la demande).

2- Déterminer alors la valeur arrondie entière du prix d'équilibre p_e.

3- On admet que la valeur moyenne du prix d'offre des producteurs pour une quantité de a tonnes à b tonnes est égale à $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b p_O(q)\,dq$.

a) Calculer la valeur moyenne du prix d'offre des producteurs pour une quantité de 50t à 60t.

b) Comparer cette valeur moyenne avec le prix d'équilibre p_0.

IV- Calcul d'aires planes

Activité 1

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\left|\dfrac{1}{2}x+1\right|$.

1- Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.(l'unité étant 1cm)

2- Calculer en cm^2, l'aire A de la région du plan limitée par la courbe C de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -4 et x = 2.

3- Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_{-4}^{2}\left|\dfrac{1}{2}x+1\right|dx$.

4- Vérifier que A = I.

Activité 2

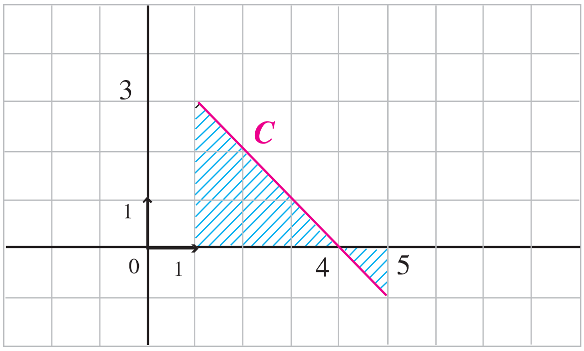
On donne le graphique suivant :

1- Vérifier que C est la représentation graphique de la fonction f définie sur [1 , 5] par f(x) = –x + 4

2- Calculer l'aire A de la région hachurée sur le graphique.

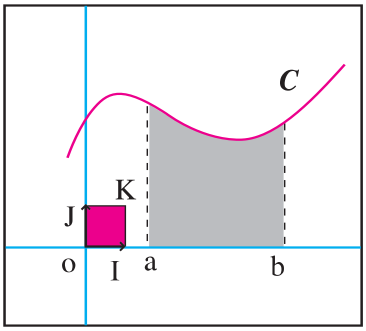
3- Calculer $\int_1^5 |f(x)|\,dx$.

4- Vérifier que $\int_1^5 |f(x)|\,dx = A$.



Théorème

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$, f une fonction continue sur l'intervalle [a ; b], et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.
(l'unité d'aire notée u.a. , est l'aire du rectangle OIJK)
$\int_a^b |f(x)|\,dx$ est l'aire, en u.a. , du domaine plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b.



Activité 3

Soit f la fonction définie sur $[-2,1]$ par

$f(x) = x^3 - 3x + 3$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan

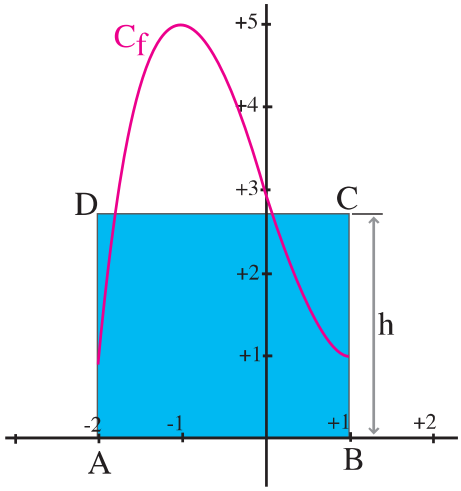
1- Calculer l'aire A en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -2 et x = 1.

2- Calculer la valeur moyenne $\overline{f}$ de f sur l'intervalle [-2,1].

3- On considère le rectangle ABCD de la figure (tel que A(-2,0) et B(1,0)).

a) Déterminer la largeur h du rectangle ABCD pour que son aire soit égale à A.

b) Vérifier que $h = \overline{f}$.

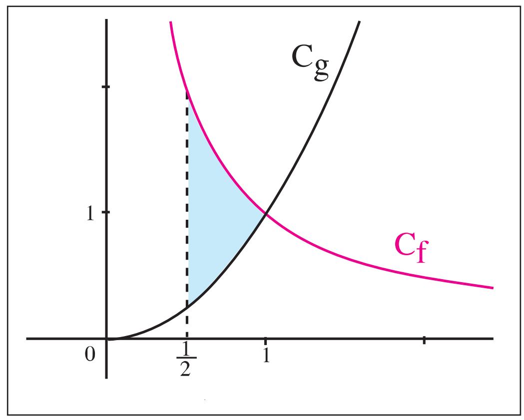


Activité 4

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = e^{-x}$

1- Dresser le tableau de variation de f.
2- Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.(l'unité graphique étant 1 cm).
3- Calculer l'aire en cm^2 de la région du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = 2.
4- a- Soit $\lambda > 1$, calculer en fonction de λ, l'aire $A(\lambda)$ de la région du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et $x = \lambda$.
   b- Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

Activité 5



Dans le graphique ci-contre, C_f et C_g représentent respectivement les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x^2$.

On se propose de calculer l'aire A de la partie du plan limitée par les courbes C_f, C_g et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

1- Colorier la région du plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

2- Colorier (par une autre couleur)la région du plan limitée par la courbe C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

3- En déduire la valeur de A et la comparer à $\int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(t) - g(t)| dt$.

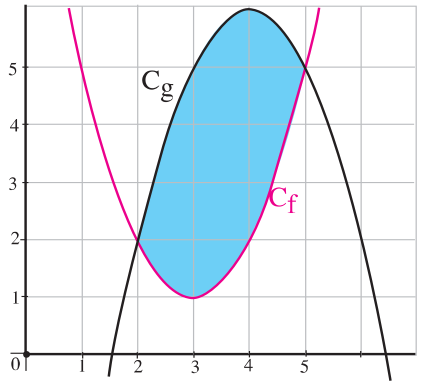
Théorème :

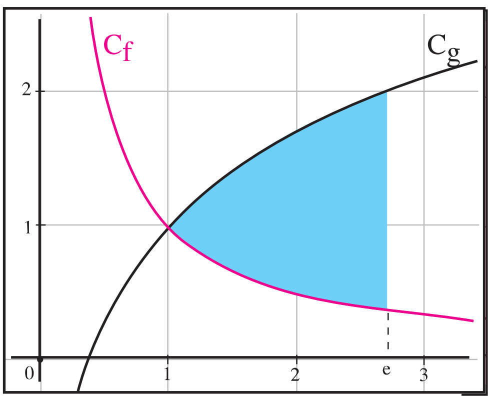
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a,b]
L'intégrale $\int_a^b |f(t) - g(t)| dt$ est l'aire, en unités d'aire, de la région du plan limitée par les courbes représentatives de f et de g et des droites d'équations x = a et x = b.

Activité 6

Dans chacun des cas suivants, on donne deux fonctions f et g ainsi que leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé du plan.
Calculer dans chacun des cas suivants l'aire (en unité d'aire) du domaine colorié.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 10$ et $g(x) = -x^2 + 8x - 10$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \ln(x) + 1$





Activité 7

Soient les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{15}{4}$ et $g(x) = x - 2$.
On désigne par C et C') les courbes représentatives respectives de f et de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (L'unité graphique étant 2cm).

1- a- Montrer que pour tout $x > 0$ on a $f(x) - g(x) = \dfrac{(x-2)(4x^2 + x + 2)}{4x^2}$.

b- En déduire les positions relatives de C et C'.

2- Calculer l'aire (en cm^2) du domaine compris entre C, C' et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

On se propose de compléter les travaux pratiques du chapitre étude de fonctions en calculant l'intégrale de f entre a et b d'une part, et l'aire de la région du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = a et x = b d'autre part.

Etape 1 : Définition des variables :

* Les cellules A3, A4, A5, B3, B4, B5, B7 et C7 sont définies dans le chapitre étude de fonctions .

* Dans la cellule D3 taper : « Intégrale de f »
Dans la cellule D4 taper : « Aire A »

Définir les variables i et aire

* Sélectionner la cellule B3
Dans le menu : 'Insertion' sélectionner la commande 'nom' puis 'définir'.
Taper la lettre : i ; puis valider

* Sélectionner la cellule B4
Dans le menu : 'Insertion' sélectionner la commande 'nom' puis 'définir'.
Taper : aire ; puis valider.

Etape 2 : Programmation de la fonction et de la procédure de remplissage du tableau de valeurs.

* Afficher l'éditeur de code de Visual Basic et taper les lignes suivantes :

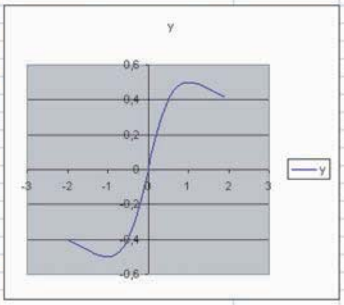
```
Function f(x)
   On Error GoTo Erreur
   f = x / (x ^2 + 1)                ' On peut considérer toute autre fonction'
   Exit Function
Erreur:
   f = ""
   Resume Next
End Function
Function Intégrale(a, b)
    i = 0                                    'calcul de l'intégrale de f(x)dx de a jusqu'à b
   aire =                                    'le calcul reste correct même si b<a
   x = a
   dx = (b - a) / 100 'dx est négatif lorsque a>b      ' pour plus de précision on peut
diviser par
  Do                                          '1000 au lieu de 100
     i = i + f(x) * dx                        ' valeur cumulée de l'intégrale
     aire = aire + Abs(f(x)) * dx             ' valeur cumulée de l'aire
     x = x + dx
   Loop While (dx > 0 And x < b) Or (dx < 0 And x > b)    ' cette condition tient compte
    Cells(4, 5) = aire                 '   des 2cas possibles a<b et b<a
   Intégrale = i
End Function                           'Reprise de la procédure considérée dans le chapitre
Sub calculs()                          ' étude de fonctions
```

```
    a = Cells(3, 2)
    b = Cells(4, 2)
    h = Cells(5, 2)
    i = 8
    x = a
    Do While i <= 100
        Cells(i, 2) = ""
        Cells(i, 3) = ""
        i = i + 1
    Loop
    i = 8
    Do While x <= b
        Cells(i, 2) = x
        Cells(i, 3) = f(x)
        x = x + h
        i = i + 1
    Loop
    Cells(3, 5) = Intégrale(a, b)          ' appel de la fonction intégrale
End Sub
```

Etape 3 : Remplissage du tableau de valeurs et traçage de la courbe (étapes décrites dans le chapitre étude de fonctions.

Cliquer sur le bouton ajouté (ici libellé Graphisme) et le tableau se remplit en fonction des valeurs et de la fonction choisies.

	A	B	C	D	E	F
1	f(x) = 4/(1+x²)					
2						
3	a =	-2		Intégrale de f	-0,016	
4	b =	2		Aire A	1,609139203	
5	h =	0,1				
6						
7		x	y	Graphisme		
8		-2	-0,4			
9		-1,9	-0,41215			
10		-1,8	-0,42453			
11		-1,7	-0,43702			
12		-1,6	-0,44944			
13		-1,5	-0,46154			
14		-1,4	-0,47297			
15		-1,3	-0,48327			
16		-1,2	-0,4918			
17		-1,1	-0,49774			
18		-1	-0,5			
19		-0,9	-0,49724			
20		-0,8	-0,4878			
21		-0,7	-0,4698			
22		-0,6	-0,44118			
23		-0,5	-0,4			
24		-0,4	-0,34483			
25		-0,3	-0,27523			
26		-0,2	-0,19231			
27		-0,1	-0,09901			



On peut traiter une autre fonction, pour cela il faut activer l'éditeur visual basic (menu outils, macro, éditeur visual basic) ou simplement à l'aide du raccourci clavier Alt+F11, puis modifier la fonction ou éventuellement ajouter de nouvelles procédures.

1- Cocher la ou les bonne(s) réponse(s) :

QUESTIONS	REPONSES	QUESTIONS	REPONSES
a) $\int_3^6 x^2\,dx =$	☐ 189 ☐ 27 ☐ 63	e) Si $\int_{-1}^2 f(t)\,dt = -3$ et si $\int_4^2 f(t)\,dt = 5$ alors $\int_{-1}^4 f(t)\,dt$ vaut :	☐ 2 ☐ -8 ☐ 8
b) $\int_{-1}^1 e^{-x}\,dx =$	☐ $e-\frac{1}{e}$ ☐ $\frac{1}{e}-e$ ☐ 0	f) Si $\int_0^2 f(t)\,dt = -1$ et si $\int_0^2 g(t)\,dt = 3$ alors $\int_0^2 (2f(t)-3g(t))\,dt$ vaut :	☐ -11 ☐ 7 ☐ -7
c) $\int_1^e \ln x\,dx$ est un nombre	☐ Positif ☐ Négatif ☐ Nul	g) Soit f la fonction définie sur $[1,2]$ par $f(x)=\frac{1}{x}$. La valeur moyenne de f sur $[1,2]$ est	☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ $-\ln\frac{1}{2}$ ☐ $\ln 2$
d) $\int_0^{-1} x^2\,dx$ est un nombre	☐ Positif ☐ Négatif ☐ Nul	h) Si pour tout $t\in[-1,2]$ on a $0{,}1\le f(t)\le 1$ et $I=\int_{-1}^2 f(t)\,dt$ Alors :	☐ $0{,}1\le I\le 1$ ☐ $-0{,}1\le I\le 2$ ☐ $0{,}3\le I\le 3$

2- Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = -(x+1)e^{-x}$.

a- Calculer f '(x).

b- En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$.

3- Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = (1+\ln x)^2$.

a- Calculer f '(x).

b- En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$.

4- Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

a- Montrer que la fonction $F : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est une primitive de f sur IR.

b- En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^e f(x)\,dx$.

5- Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^2 (t+1)\,dt$; b) $\int_{-1}^1 (3x^2 - x)\,dx$; c) $\int_{-1}^1 \left(4x(x^2-1)\right)dx$

d) $\int_{-1}^1 e^x\,dx$; e) $\int_1^2 \left(t+\frac{1}{t}\right)dt$; f) $\int_e^1 \frac{t+1}{t}\,dt$

g) $\int_{-1}^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}\right)dx$; h) $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4t+1}}\,dt$; i) $\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx$

j) $\int_e^1 \frac{\ln t}{t}\,dt$; k) $\int_1^e \frac{3}{x}(\ln x)^2\,dx$; l) $\int_2^1 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\,dx$

6- a- Calculer $\int_{-1}^4 \frac{1}{x+2}\,dx$.

b- Montrer que pour tout x de $]-2,+\infty[$ on a $\frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$.

c- En déduire la valeur de $I = \int_{-1}^2 \frac{x}{x+2}\,dx$.

7- a- Montrer que pour tout x de $]-2,2[$ on a $\frac{4}{4-x^2} = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}$.

b- En déduire la valeur de $I = \int_{-1}^1 \frac{4}{4-x^2}\,dx$.

8- Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2+x}$.

a- Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$ on a $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$.

b- En déduire la valeur de $I = \int_1^2 f(x)\,dx$.

9- Soit la fonction f définie sur $IR \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{x^2-2x+5}{x-2}$.

a- Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de $IR \setminus \{2\}$ on a :

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.

b- En déduire l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.

10- a- Montrer que pour tout réel x on a $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$.

b- En déduire la valeur de $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$ et de $J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{-x}+1}\,dx$.

11- On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=(x^2+2x-3)e^x$

a- Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction F définie sur IR par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ soit une primitive de f sur IR.

b- En déduire la valeur de l'intégrale $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

12- a- A l'aide d'un intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1 (2x-1)e^{3x}\,dx \quad ; \quad J=\int_1^e (1-x)\ln x\,dx$$

b- En déduire les valeurs des intégrales

$$K=\int_0^1 (x^2-x)e^{3x}dx \quad ; \quad L=\int_1^e (2x-x^2)\ln x\,dx$$

c- Soit n un entier naturel non nul, on pose $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dt$

Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$

13- Le débit en $m^3\times h^{-1}$ d'une pompe à arrosage qui fonctionne en été de 6 heures à 20 heures, est modélisé par $f(x)=5e^{0,002x}$ où x est l'heure considérée $(6\le x\le 20)$.

a- Vérifier que la fonction F définie sur IR par $F(x)=2500e^{0,002x}$ est une primitive de la fonction f sur IR.

b- Le volume V d'eau débité par cette pompe entre 6 et 20 heures est égal à : $\int_6^{20} f(x)dx$

Vérifier que V est environ $71,85\ m^3$.

c- Montrer que le débit moyen de cette pompe entre 6 et 20 heures est environ $5,13m^3.h^{-1}$

14- *(Valeur moyenne du coût marginal*

Une entreprise fabrique des objets dont le nombre $x\in[0\,;3,5]$ est exprimé en milliers.

Le coût de fabrication C(x) est exprimé en milliers de dinars et le coût marginal $C_m(x)=C'(x)$ est modélisé par $C_m(x)=1+\dfrac{x-3}{8}e^x \quad ; \quad x\in[0\,;3,5]$

1- a- Dresser le tableau de variation de la fonction C_m

b- En déduire que $C_m(x)\ge 0$ pour tout x de $[0\,;3,5]$.

2- Soit u la fonction définie sur $[0\,;3,5]$ par $u(x)=\dfrac{x-4}{8}e^x$

a- Calculer $u'(x)$ pour x de $[0\,;3,5]$.

b- En déduire la primitive de C_m qui s'annule en 0.

3- Calculer la valeur moyenne $\overline{C_m}$ de C_m sur $[0\,;3,5]$.

Exercices et problèmes

15- Soient f une fonction définie sur [a,b] et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Dans chacun des cas suivants, calculer l'aire de la région du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b :

a) $f(x)=x^2+x+1 \quad a=0$ et $b=1$; b) $f(x)=\dfrac{2}{x} \quad a=2$ et $b=3$

c) $f(x)=e^{1-x} \quad a=-2$ et $b=2$; d) $f(x)=\dfrac{2}{x+1}\ln(x+1) \quad a=0$ et $b=1$

16- Soient f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan (l'unité graphique : 3cm).

a- Démontrer que la droite D :y = x est asymptote à C en $+\infty$

b- Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$, on a $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.

c- Tracer la courbe représentative de f et la droite D.

d- Calculer l'aire (en cm^2) du domaine compris entre la courbe C, la droite D et les droites d'équations x = 1 et x = 3.

17- Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$(l'unité étant 2cm).

1- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2- Dresser le tableau de variations de f.

3- Construire la courbe C.

a- Soit $\alpha\in\,]0,+\infty[$, montrer que l'aire $A(\alpha)$ de la région du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = α est égale à $4\left(1-e^{-\alpha}(1+\alpha+\dfrac{\alpha^2}{2})\right)$ cm² . (On utilisera deux intégrations par parties successives).

b- Calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)$.

18- On considère la fonction f définie sur [0,6] par : $f(x)=\dfrac{1}{36}(6x-x^2)$

1- a- Dresser le tableau de variations de f .

b- Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

c- Calculer $\int_0^6 f(x)dx$. Interpréter graphiquement cette intégrale.

d- Soient a et b deux réels de [0,6] tels que $a \leq b$. Montrer que $0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq 1$

2- Une entreprise fabrique un produit et vend chaque semaine x milliers d'unités tel que $0 \leq x \leq 6$.
Soient a et b deux réels de [0,6] tels que $a \leq b$. On estime que la probabilité de vendre entre a et b milliers d'unités pour une semaine choisie au hasard est $\int_a^b f(x)dx$.

Déterminer la probabilité de vendre :
a- Moins de 2000 unités ; b- Entre 2000 et 4000 unités ; c- Plus de 4000 unités.

19- On considère les fonctions f et g définies sur $[1,+\infty[$ par

$f(x) = 1,1x + \ln x - \ln(x+1)$ et $g(x) = 1,1x + \dfrac{1}{x}$

On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan (l'unité graphique est 2cm).

A- 1- a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b- Dresser le tableau de variation de f.

2- a- Montrer que la droite D d'équation $y = 1,1x$ est une asymptote à C_f

b- Etudier la position relative de C_f par rapport à D

3- Tracer C_f et D.

B- 1- Dresser le tableau de variation de g

2- Vérifier que la droite D est asymptote à C_g et préciser la position relative de C_g par rapport à la droite D.

3- Tracer C_g dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4- On pose pour tout x de $[1,+\infty[$, $H(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln x$

a- Calculer $H'(x)$ pour $x \in [1,+\infty[$

b- En déduire une primitive sur $[1,+\infty[$ de la fonction $h : x \mapsto g(x) - f(x)$

c- Calculer l'intégrale $\int_1^5 \big(g(x) - f(x)\big)dx$.

En donner une interprétation graphique.

C- Les fonctions f et g modélisent respectivement la quantité d'objets produits par une entreprise et la quantité d'objets commandés à cette entreprise.
Plus précisément, si t est la date exprimée en semaines, f(t) est la quantité en milliers d'objets produits à la date t et g(t) est la quantité d'objets commandés à cette même date en milliers.

1- Lorsque $f(t) \geq g(t)$, on dit que « *la demande est satisfaite* à la date t »
Démontrer que la demande n'est jamais satisfaite.

2- On admet que le nombre total d'objets en milliers dont la demande n'est pas satisfaite entre les dates n et n', avec $n' > n$ est donné par : $\int_{n}^{n'} (g(t) - f(t))\,dt$

Donner à un objet près, le nombre total d'objets dont la demande n'est pas satisfaite entre les dates 1 et 5.

3- On considère que « *le niveau de fabrication est suffisant* » lorsque moins de 20 demandes ne sont pas satisfaites c'est-à-dire lorsque l'on a : $g(t) - f(t) \leq 0,02$

En admettant que $(g - f)$ est une fonction strictement décroissante sur $[1,+\infty[$, à partir de quelle date le niveau de fabrication est-il suffisant ?

20-

1) g est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = -x^2 - 4 + \ln x$.

Dresser le tableau de variations de g et en déduire le signe de g(x) pour tout $x > 0$.

2) f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = -x + 2 - \dfrac{4\ln x}{x}$

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées). Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

a) Etudier le sens de variation de f.

b) Etudier la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Calculer la limite de f en $+\infty$.

d) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

e) Etudier la position relative de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$.

f) Dresser le tableau de variation de f.

g) Déterminer les points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à $\mathscr{D}$.

h) Représenter $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

3) h est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x) = -x + 2 - \dfrac{4}{x}$.

On appelle $\mathscr{H}$ sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Etudier les variations de h.

b) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{H}$. Déterminer l'autre asymptote à $\mathscr{H}$.

c) Etudier les intersections de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{H}$, et étudier la position relative des deux courbes.

4) Calculer $\int_{a}^{b} (f(x) - h(x))\,dx$ .Interpréter graphiquement le résultat.

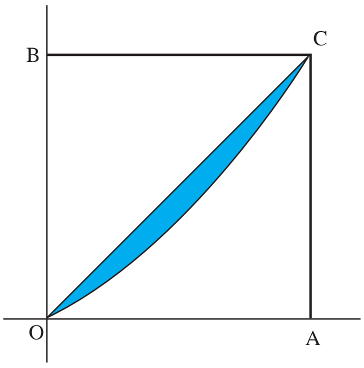
21- A- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$(unité graphique : 5 cm).

Les points C et A ont respectivement pour coordonnées (1 ; 1) et (1 ; 0), et $\mathscr{D}$ est la droite d'équation $y = x$.

1- Soit g la fonction définie sur [0 ; 1] par : $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e - 1}$.

a) Etudier les variations de g et vérifier que sa courbe représentative $\mathscr{C}$ passe par les points O et C.
b) Déterminer des équations des tangentes à $\mathscr{C}$ en O et C.
c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.
d) Calculer l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
2- Dans cette question, on se propose de généraliser les résultats obtenus à la première question et d'en donner une interprétation économique.
On considère une fonction F définie et continue sur [0 ; 1] satisfaisant aux conditions (C) suivantes : F est croissante, F(0) = 0 et F(1) = 1.

B- Une fonction F satisfaisant aux conditions (C) décrit la distribution de la masse salariale d'une entreprise entre ses salariés, que l'on classe par salaires croissants : F(x) représente le pourcentage des salaires perçus par le pourcentage x de salariés (par exemple, si 50% des salariés perçoivent 30% de la masse salariale, alors F(0,5) = 0,3).
La courbe $\mathscr{C}$ correspondante est appelée **courbe de Lorentz**Le coefficient γ égal au rapport de l'aire coloriée sur le dessin à l'aire du triangle OAC, appelé **indicateur de Gini**, est alors un indicateur d'inégalité de répartition salariale.



a) Vérifier que la fonction g étudiée à la première question satisfait aussi aux conditions (C) et donner la valeur γ_i de γ correspondante.
b) Mêmes questions pour les fonctions h et k définies sur [0 ; 1] par : $h(x) = x^2$ et

$$k(x) = \frac{x^3 + x}{2}.$$

Les fonctions g, h et k représentent trois entreprises G, K et L.
Classer ces trois entreprises de la plus égalitaire au moins égalitaire.

PID ou proportionnel, intégral, dérivée

Pâte à papier, pâtisserie ou pétrole, en usine le problème est le même : éviter à tout prix que la cuve ne déborde et garde le tout à la bonne température lors de la fabrication. Il faut donc jouer du thermostat et de la vanne pour réguler l'ensemble.

L'une des méthodes les plus courantes de régulation des processus de fabrication industriels est le contrôle PID. Le principe est simple :

Si le niveau d'une cuve est N_0 et que le niveau mesuré à l'instant t est n(t), la commande à envoyer à la vanne pour qu'elle fasse elle-même les régulations nécessaires est représentée par la somme de trois termes.

Le premier est proportionnel à l'écart $N(t)–N_0$, le deuxième à la dérivée de ce même écart et le troisième est sa primitive. Ces deux derniers termes jouent un rôle primordial. La dérivée permet de contrebalancer les variations brutales liées au premier écart, l'intégrale entre deux instants aide à supprimer les éventuelles oscillations de niveau autour de la valeur fixée N_0

D'où le nom de régulation par « contrôle PID », qui signifie tout simplement **P**roportionnel, **I**ntégral, **D**érivée.

Chapitre 6

SUITES REELLES

Pour commencer
Cours

- Revoir
- Suites minorées, suites majorées
- Variation d'une suite
- Opérations sur les suites
- Suites convergentes - suites divergentes
- Opérations sur les limites des suites
- Limites et ordre
- Exemples de suites récurrentes

Avec l'ordinateur
Exercices et problèmes
Math culture

Pour commencer

Activité 1

Cocher la ou les réponse(s) correcte(s).

1) Soit u la suite définie sur IN par : $u_n = 3 - 2n$ u_2 est égal à :	-1	
	1	
2) Soit u la suite définie par $u_n = \dfrac{2n+5}{n^2 - 2n}$	u_0 n'existe pas	
	$u_1 = 7$	
	$u_1 = -7$	
3) u étant une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Le terme général de la suite u est :	$u_n = u_{n-1} + r$	
	$u_n = u_0 + nr$	
	$u_n = nu_0 + r$	
4) Soit u la suite définie sur IN par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$ u_{20} est égal à :	7,5	
	21	
	41	
5) La suite définie sur IN par : $u_n = \dfrac{n+30}{4}$ est une suite arithmétique de raison	7,5	
	$\dfrac{1}{4}$	
	$\dfrac{n}{4}$	
6) u étant une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. le terme général de la suite u est	$u_n = q^n u_0$	
	$u_n = q^{n+1} u_0$	
	$u_n = q\, u_{n-1}$	
7) La suite définie sur IN par : $u_n = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ est Une suite géométrique de raison	n	
	$\dfrac{1}{3}$	
	2	

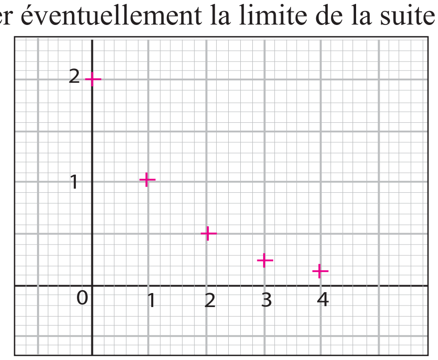
Activité 2

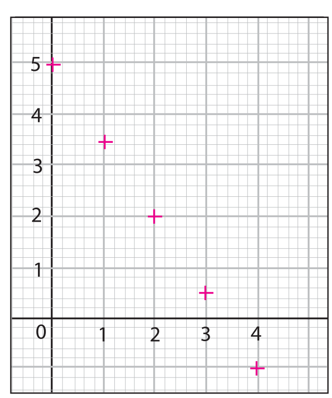
Dans chacun des cas suivants, on représente graphiquement les premiers termes d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ arithmétique ou géométrique.

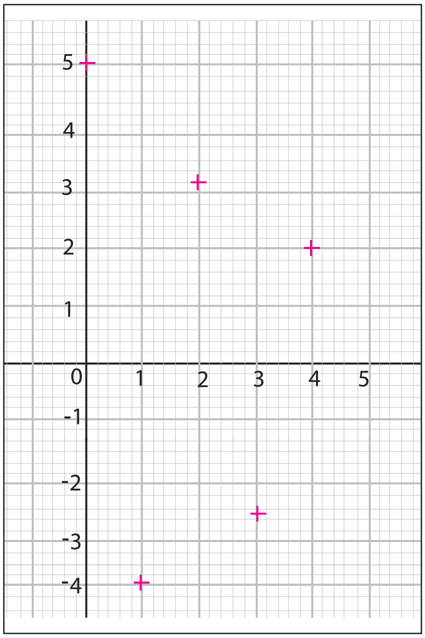
1- Indiquer la nature de la suite et sa raison.

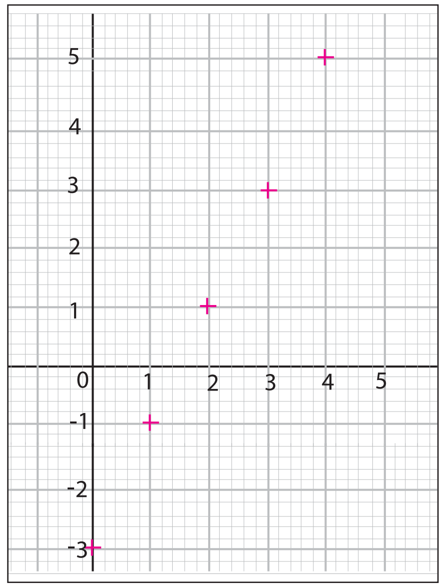
2- Donner une expression de u_n en fonction de n

3- Déterminer éventuellement la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.









Activité 3

1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 4$.

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

c) Soit $n \in IN^*$, exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$ en fonction de n .

2) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -3$.

a) Calculer v_1, v_2 et v_3.

b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

c) Soit $n \in IN^*$, exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$ en fonction de n .

Activité 4

1- Démontrer par récurrence chacune des propriétés suivantes :

a) Pour tout entier naturel n , $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

b) Pour tout entier naturel n , $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n - 1}$

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \le 0$.

Cours

1) Revoir :

Activité 1

Soit u la suite définie sur IN par
$u_0 = -1$ et $u_{n+1} = 2 + u_n$

1) Vérifier que la suite u est arithmétique et déterminer sa raison.
2) Exprimer u_n en fonction de n.
3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
4) Soit $n \in IN^*$, exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$ en fonction de n .

Soit u une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r non nul
- Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Activité 2

Un marteau frappe toutes les 5 secondes une pièce métallique dont l'épaisseur initiale est 1cm. A chaque coup, l'épaisseur du métal diminue de 1%.
Soit u_n l'épaisseur en cm de la pièce après n coups.

1- Calculer u_1, u_2 et u_3 .
2- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $u_n = (0,99)^n$
3- En déduire que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q.
4- Déterminer le nombre de coups minimal pour que l'épaisseur de la pièce soit inférieur à 5mm.
5- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Activité 3

Calculer la limite, lorsqu'elle existe, de chacune des suites $(u_n)_{n\in IN}$, $(v_n)_{n\in IN}$ et $(w_n)_{n\in IN}$:

a) $u_n = (1-\sqrt{3})^n$.
b) $v_n = (-2)^{n+1}$.
c) $w_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $3w_{n+1} - 4w_n = 0$.

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison $q \neq 1$
- Si $q \leq -1$ alors la suite (u_n) n'admet pas de limite.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q > 1$ alors la limite de la suite (u_n) est $+\infty$ ou $-\infty$, selon que u_0 est strictement positif ou strictement négatif.

Activité 4

Soit u la suite définie sur IN par $u_0 = -2$ et $u_n = \frac{3}{2}u_{n+1}$.

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3
2) Dans le plan muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, représenter les points $A_n(n, u_n)$ pour $n \in \{0,1,2,3\}$.
3) Exprimer u_n en fonction de n, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4) Soit $n \in IN^*$, exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$ en fonction de n .

Activité 5

Dans chacun des cas suivants, préciser la nature puis déterminer la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \frac{2-n}{3}$; b) $u_n = \frac{n(1-3n)}{3} + n^2$

c) $u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n$; d) $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$

2) Suites minorées, suites majorées :

Activité 1

1- On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 3$.

2- Soit $(v_n)_{n\in IN}$ la suite définie par $v_n = e^n + 2n + 3$

Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n \geq 4$.

Activité 2

Soit la suite définie par : $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{n^2+1}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n on a: $-\frac{1}{2} \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{2}$ et que $0 \leq \frac{1}{n^2+1} \leq 1$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n $-\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$.

Définitions

Soient n_0 un entier naturel et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle

- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n \leq M$.
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $m \leq u_n$.
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

Vocabulaire

M et m désignent deux réels donnés.

La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite majorée par M (respectivement minorée par m), si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n \leq M$ (respectivement $u_n \geq m$).

Activité 3

On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\frac{1}{2^n}\right)-n$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $s_n = 2-n-\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) Calculer s_0, s_1 et s_2 puis prouver que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.

Activité 4

Soit u la suite définie sur IN par $u_n = \sqrt{3+e^n}$.
Montrer que la suite u est minorée par 2.

Activité 5

On considère les suites u , v et w définies sur IN par leurs termes généraux suivants :
$u_n = 1+3e^{-n}$, $v_n = \frac{n+1}{n!}$ et $w_n = \frac{\cos(n)}{n^2+1}+1$.
Prouver que les suites u ,v et w sont bornées.

3) Variation d'une suite :

Activité 1

1- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n\in$ IN $u_n = 2(u_{n+1}-1)$.

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.

2- Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = 1+e^n$.

Prouver que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \geq v_n$.

Définitions

Soient n_0 un entier naturel et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.

- (u_n) est dite croissante (respectivement strictement croissante) si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$ (respectivement $u_{n+1} > u_n$).
- (u_n) est dite décroissante (respectivement strictement décroissante) si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$ (respectivement $u_{n+1} < u_n$).
- (u_n) est dite constante si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.
- (u_n) est dite monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.

Activité 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \alpha \ ; \ \alpha \in IR \\ 3u_{n+1} = 2u_n - 6 \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2- Montrer que si $\alpha = -6$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

3- On suppose que $\alpha = 1$.

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq -6$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4- On suppose que $\alpha = -8$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq -6$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Activité 3

1- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = (\frac{1}{4})^n - 2$

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2- Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 2$ et pour tout $n \in IN$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x-1)$.

a) Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.

b) En déduire que f est croissante sur $[2,+\infty[$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_n = f(n)$ est croissante.

Théorème (admis)

Soient n_0 un entier naturel, f une fonction définie sur $[n_0,+\infty[$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ la suite définie par $u_n = f(n)$.

- Si f est croissante sur $[n_0,+\infty[$ alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante.
- Si f est décroissante sur $[n_0,+\infty[$ alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante.

Activité 5

Etudier la monotonie de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = n^2 + n - 1$; b) $u_n = \dfrac{n}{n+2}$; c) $u_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$.

d) $u_n = \ln(n+2) - \ln n$; e) $u_n = e^{-2n} - n$.

4) Opérations sur les suites :

Définition

Soit p un entier naturel , u et v deux suites réelles définies pour $n \geq p$.

- La somme des deux suites u et v est une suite, notée u+v, de terme général $u_n + v_n$.
- Le produit des deux suites u et v est une suite, notée uv, de terme général $u_n \times v_n$.
- Le produit de la suite u par un réel λ est une suite, notée $\lambda.u$, de terme général: $\lambda.u_n$.
- La valeur absolue de la suite u est une suite, notée $|u|$, de terme général: $|u_n|$.
- Si de plus pour tout entier $n \geq p$, $v_n \neq 0$,l'inverse de v et le quotient de u par v sont des suites, notées respectivement $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$, de termes généraux respectifs $\frac{1}{v_n}$ et $\frac{u_n}{v_n}$.

Activité 1

On considère les suites u et v définies sur IN^* par $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

et $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$.

Prouver que les termes généraux des suites $h = \frac{2}{3}u$, $k = u + v$ et $w = \frac{k}{u}$ sont respectivement : $h_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $k_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right)$ et $w_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Activité 2

Soit u une suite géométrique de raison $q \in IR \setminus \{0,1\}$ et de premier terme $u_0 \in IR^*$.

Montrer que la suite $\frac{1}{u}$ est aussi une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme .

5) Suites convergentes – suites divergentes :

Activité 1

Soient f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x) = 2x-1$ et $g(x) = -3e^{-x}$.

1) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur IN par $u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$.

a) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique puis déterminer sa limite ℓ.

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique puis déterminer sa limite ℓ'.

3) Comparer ℓ et ℓ' respectivement à $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

Théorème (admis)

Soient n_0 un entier naturel, f une fonction définie sur $[n_0,+\infty[$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ la suite définie par $u_n = f(n)$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. ($\ell$ étant fini ou infini).

Remarques:

- On admet que: si une suite admet une limite, alors cette limite est **unique**.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ (ℓ étant fini ou infini), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1}$.

1- Calculer la limite de f en $+\infty$.

2- On considère la suite u définie sur IN par $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

a) Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Activité 3

Calculer la limite de (u_n) dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = \dfrac{1}{n}$; b) $u_n = \sqrt{n}$; c) $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$.

d) $u_n = \dfrac{n^2+2}{n^3-n+1}$; e) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$; f) $u_n = \ln\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)$.

Définition :

Soient n_0 un entier naturel et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.

- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite **convergente** lorsqu'elle admet une limite finie .
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite **divergente** lorsque sa limite est infinie ou elle n'admet pas de limite.

Activité 4

Dire dans chacun des cas suivants si la suite u est convergente ou divergente.

a) $u_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{2n}$; b) $u_n = 2 - \dfrac{n}{5}$; c) $u_n = (-1)^n$

d) $u_n = 1 - 2^{-n}$; e) $u_n = n\ln(1 + \dfrac{1}{n})$; f) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Activité 5

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$.

1) Montrer que la suite u est croissante.
2) Montrer que la suite u est majorée par 4.
3) Construire dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les droites $D : y = x$ et $D' : y = \dfrac{1}{4}x + 3$.

4) Placer sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite u ; la suite semble-t-elle converger ? Si oui, vers quelle limite ?

5) a) Montrer que la suite v définie sur IN par $v_n = u_n - 4$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) en déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 4(1-e^{-n\ln 4})$.

6) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Théorème (admis):

Toute suite croissante et majorée est convergente.
Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Activité 6

Soient u et v les suites définies sur IN^* par :

$$u_n = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

1) Montrer que u est croissante et que v est décroissante.

2) Montrer que u est majorée par v_1 et que v est minorée par u_1.

3) En déduire que les suites u et v sont convergentes.

Activité 7

On considère la suite (u_n) définie sur IN^* par $u_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}$

1- Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2- a) Soit $n \in IN^*$, vérifier que pour tout $k \in IN^*$, $\dfrac{1}{n+k} \le \dfrac{1}{n}$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $u_n \le 1$.

3- En déduire que la suite (u_n) est convergente.

6) Opérations sur les limites des suites:

Comme dans le cas des fonctions, les règles de calcul de la limite de la somme, du produit, de l'inverse et du quotient de deux fonctions s'étendent pour les suites.

Théorème (admis)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' et soit λ un réel.

- Les suites $(u+v)$, (uv), $(\lambda+u)$ et (λu) sont convergentes et on a :

  $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = \ell+\ell'$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = \ell.\ell'$.

  $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda+u_n) = \lambda+\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda u_n) = \lambda.\ell$.

- Si de plus les termes v_n sont non nuls et si $\ell' \neq 0$ alors les suites

  $\left(\dfrac{1}{v}\right)$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)$ convergent et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{\ell'}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

Activité 1

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans chacun des cas suivants:

a) $u_n = \frac{3n-1}{n^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$; b) $u_n = \left(-\frac{2n+1}{3n+2}\right)\left(\frac{n+1}{e^n}+3\right)$.

c) $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\ln(1+\frac{1}{n})}$; d) $u_n = \dfrac{1}{2+n\sin(\frac{1}{n})}$.

Activité 2

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{5^n+4^n}{3^n-5^n}$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = \dfrac{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Les théorèmes suivants donnent les règles de calcul de la limite de la somme, du produit et du quotient de deux suites dont la limite de l'une, au moins, est infinie.

Théorèmes (admis)

ℓ étant un réel non nul et u et v sont deux suites réelles.

limite de u	limite de v	limite de u+v	limite de u v	limite de $\frac{u}{v}$
$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Pas de conclusion
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Pas de conclusion
$+\infty$	$-\infty$	Pas de conclusion	$-\infty$	Pas de conclusion
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	Pas de conclusion	0
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	Pas de conclusion	$\pm\infty$

Activité 3

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants:

a) $u_n = 2^n + (1-\frac{1}{n})$; b) $u_n = 1+2+\ldots 2^n$.

c) $u_n = \frac{n^2+1}{2n-1} + \frac{e^{2n}}{n^2}$; d) $u_n = \left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\left[1-\ln(n)\right]$.

7) Limites et ordre :

Activité 1

On considère les suites u , v et w définies sur IN^* par :

$$u_n = \frac{3n+(-1)^n}{n} \quad ; \; v_n = \frac{3n-1}{n} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{3n+1}{n}.$$

1) Montrer que par tout $n \in IN$, $v_n \le u_n \le w_n$.

2) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

3) Que peut-on conjecturer à propos du comportement de u_n quand n tend vers $+\infty$?

Activité 2

On considère les suites (u_n) et (v_n) et définie sur IN par :

$u_n = 3n + \sin(n)$ et $v_n = -n^2 + (-1)^n$.

1) a - Montrer que pour tout $n \in IN$, $v_n \ge 3n-1$.

b- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n-1)$.

c- Que peut-on conjecturer à propos du comportement de u_n quand n tend vers $+\infty$?

2) a – Montrer que pour tout $n \in IN$, $v_n \le -n^2+1$.

b- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n^2+1)$.

c- Que peut-on conjecturer à propos du comportement de u_n quand n tend vers $+\infty$?

Théorème (admis)

Soient $(u_n)_{n\ge p}$, $(v_n)_{n\ge p}$ et $(w_n)_{n\ge p}$ trois suites

- S'il existe un entier $n_0 \ge p$ tel que pour tout $n \ge n_0$, $u_n \ge 0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $\ell \ge 0$
- S'il existe un entier $n_0 \ge p$ tel que pour tout $n \ge n_0$, $v_n \le u_n \le w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$

  alors : la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$
- S'il existe un entier $n_0 \ge p$ tel que pour tout $n \ge n_0$, $u_n \ge v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

  alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- S'il existe un entier $n_0 \ge p$ tel que pour tout $n \ge n_0$, $u_n \le v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

  alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Conséquence:

Soient $(u_n)_{n\ge p}$ et $(v_n)_{n\ge p}$ deux suites .

S'il existe un entier $n_0 \ge p$ tel que pour tout $n \ge n_0$, $|u_n| \le v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Activité 3

Déterminer les limites de chacune des suites : (u_n), (v_n), (w_n), (t_n) et (h_n) définies sur IN par :

a) $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cos(n)$; b) $v_n = \frac{\sin(n)}{n^2+1}$; c) $w_n = \frac{(-1)^n}{2n^2+n+3}$.

d) $t_n = -5 + \left(\sqrt{2}\right)^n$; e) $h_n = 1+2+2^2+...+2^n$.

Activité 4

Soit u et v les suites définies sur IN par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et

$v_n = -2u_n + (\frac{1}{2})^n$

1- Vérifier que pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} \geq 2u_n$.

2- a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$, $u_n \geq 2^n$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3- a) Vérifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $n \in IN$, $v_n \leq -2^{n+1} + (\frac{1}{2})^n$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

8) Exemples de suites récurrentes :

Suites de la forme $u_{n+1} = au_n + b$

Activité 1

On considère la fonction f définie sur IR par : f(x) = 0,75x + 2. Soit D sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Soit D' la droite d'équation : y = x.

1- Représenter les droites D et D'. Déterminez leur point d'intersection I.

2- On définit la suite (v_n) par : $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

a) Placer, sur l'axe des abscisses, les points A_n d'abscisses v_n où $n \in \{0,1,2,..,8\}$.

b) Que peut on conjecturer pour la limite de la suite (v_n)

3-a) Montrer que la suite (w_n) définie sur IN par $w_n = v_n - 8$, est une suite géométrique et déterminer sa raison.

b) Exprimer v_n en fonction de w_n.

c) Calculer la limite de la suite (w_n) et en déduire la limite de la suite (v_n).

Activité 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2u_n + 6}{3}$

1- a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - \alpha$

a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n

b) En déduire que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n.

d) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)

e) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Suites homographiques

Activité 1

On suppose que dans une période, la population d'un pays est constante et égale à 60 millions d'habitants, dont 40 millions vivent en zone rurale et 20 millions en ville.
On constate que les mouvements de population sont décrits par la règle suivante : « chaque année 20% des ruraux émigrent à la ville et 10% des citadins émigrent en zone rurale ».
On note respectivement v_n et r_n les effectifs (en millions) des citadins et des ruraux au bout de n années.

1- a) On considère la suite (p_n) définie par $p_n = \dfrac{v_n}{r_n}$.

Montrer qu'elle vérifie: $p_0 = 0,5$ et pour tout n de IN, $p_{n+1} = \dfrac{9p_n + 2}{p_n + 8}$.

b) On pose pour tout entier naturel n, $q_n = \dfrac{p_n - 2}{p_n + 1}$.

2- a) Montrer que la suite (q_n) est géométrique et exprimer q_n et p_n en fonction de n.

b) Calculer la limite de la suite (p_n) .

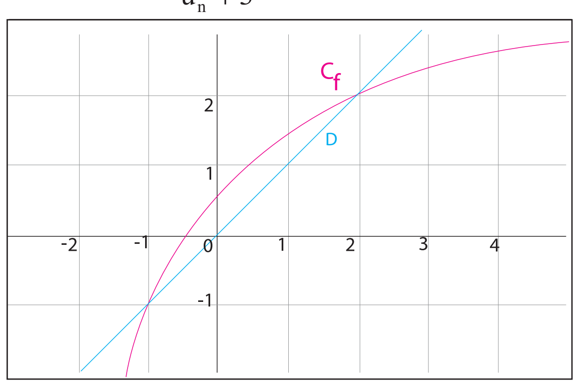
Commentaire :

La suite (p_n) est du type: $u_{n+1} = \dfrac{a\,u_n + b}{cu_n + d}$, elle est dite ***suite homographique***

Activité 2

On considère la suite (u_n) définie sur IN par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 2}{u_n + 3}$.

Dans le graphique ci-contre, on donne la courbe représentative C_f de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x+2}{x+3}$ pour $x \in]-1, +\infty[$ et la droite D d'équation $y = x$.



1-a) Déterminer graphiquement les abscisses α et β ; $(\alpha < \beta)$ des points d'intersection de la courbe C_f et la droite D .

b) Placer sur l'axe des abscisses, les points $A_n(u_n, 0)$ pour $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

c) Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la limite de la suite (u_n) ?.

2- Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$.

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et que sa limite ℓ vérifie : $\ell = f(\ell)$.

c) Prouver que $\ell \geq 2$ puis donner sa valeur.

3- Soit (v_n) la suite définie sur IN par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

b) Exprimer u_n en fonction de v_n.

c) Calculer la limite de la suite (v_n), puis retrouver la limite de la suite (u_n).

Activité 3

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{4u_n - 3}$.

1- Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty, \dfrac{3}{4}\right[$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{4x-3}$.

a) Construire la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

b) Montrer que la droite $D : y = x$ est tangente à la courbe C et déterminer l'abscisse α de leur point de contact.

c) Placer, sur l'axe des abscisses, les trois premiers termes de la suite (u_n).

d)Que peut on conjecturer pour la limite de la suite (u_n) ?

2- Soit (v_n) la suite définie sur IN par $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite est arithmétique de raison -4 et de premier terme $v_0 = -\dfrac{2}{3}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite (v_n), puis retrouver la limite de la suite (u_n).

Si une suite (u_n) de la forme $u_{n+1} = \dfrac{a u_n + b}{cu_n + d}$ converge alors sa limite ℓ vérifie: $\ell = \dfrac{a\ell + b}{c\ell + d}$.

Activité 4

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n - 4}$.

1- Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 4[$ par $f(x) = \dfrac{x+6}{x-4}$.

a) Construire la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C et la droite $D : y = x$.

c) Placer, sur l'axe des abscisses, les quatre premiers termes de la suite (u_n).

d) Justifier que la suite (u_n) n'est pas monotone.

e) Que peut on conjecturer pour la limite de la suite (u_n) ?

2- Soit (v_n) la suite définie sur IN par $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 6}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.

b) Calculer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n).

Activité 5

Soit (u_n) la suite définie sur IN par : $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = 4\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right)$.

1- a) Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} = 4\left(1 - \frac{1}{u_n}\right)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n > 2$.

c) Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 2)^2}{u_n}$.

d) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite ℓ.

2- Soit (v_n) la suite définie sur IN par $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite (v_n), puis retrouver la limite de la suite (u_n).

Activité 6

On considère la suite (u_n) définie sur IN par $u_0 = -5$ et $u_{n+1} = \frac{-8u_n + 9}{2u_n - 11}$

1- a) Vérifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} + \frac{3}{2} = \frac{-5}{2u_n - 11}\left(u_n + \frac{3}{2}\right)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq -\frac{3}{2}$.

c) Prouver que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)(-2u_n - 3)}{2u_n - 11}$ et déduire que la suite (u_n) est croissante.

d) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite ℓ..

3- On considère la suite (v_n) définie sur IN par $v_n = \frac{u_n + \frac{3}{2}}{u_n - 3}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Activité 7

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = \frac{5}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n}$.

1- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2}, 3\right]$ par $f(x) = \frac{x+2}{x}$.

a) Montrer que f est dérivable sur I et que $f(I) \subset I$.

b) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans I une solution unique ℓ que l'on précisera.

c) Montrer que pour tout x de I , $\left|f'(x)\right| \leq \frac{8}{9}$.

d) Prouver que pour tout $x \in \left]\frac{3}{2}, 3\right[$ on a : $\left|f(x) - \ell\right| \leq \frac{8}{9}\left|x - \ell\right|$.

2- a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $\left|u_{n+1} - \ell\right| \leq \frac{8}{9}\left|u_n - \ell\right|$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\left|u_n - \ell\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n$.

c) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Activité 8

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+2}$.

a) Construire la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

b) Vérifier que la courbe C et la droite $D : y = x$ n'ont pas de point commun.

c) Placer, sur l'axe des abscisses, les sept premiers termes de la suite (u_n).

d) Montrer par l'absurde que la suite (u_n) est divergente.

On se propose de d'utiliser un tableur pour calculer les termes d'une suite définie par récurrence

1ère situation :

On considère la suite U définie sur IN par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{n+1}{n^2+1} U_n$

Dans la colonne A on placera les valeurs de n et dans la colonne B les valeurs correspondantes de U_n.

Ainsi on place 0 dans la cellule A2, 1 dans A3, 10 dans B2 et dans la cellule B3 la formule calculant son contenu en fonction du contenu de A2 et celui de B2.

B3 | =(A2+1)*B2/(A2*A2+1)

	A	B	C	D	E
1	n	Un			
2	0	10			
3	1	10			
4	2	10			
5	3	6			
6	4	2,4			
7	5	0,705882			
8	6	0,162896			
9	7	0,030818			
10	8	0,004931			
11	9	0,000683			
12	10	8,33E-05			
13	11	9,07E-06			
14	12	8,92E-07			

La formule étant :
=(A2+1)*B2/(A2*A2+1)
Remplir les cellules de la colonne A par des valeurs croissantes de n
Copier la formule et la coller dans les cellules correspondantes de la colonne B

Quelle conjecture peut on faire sur la limite de la suite U ?

2ème situation :

On considère la suite U définie sur IN par : $U_0 = 2$, $U_1 = 10$ et $U_{n+2} = 1{,}5\,U_{n+1} - 0{,}5U_n$

On procèdera de la même manière que précédemment, sauf que
On deux lignes de données initiales U_0 et U_1.
On introduit la formule dans la cellule B4 :
=(1,5*B3-0,5*B2)

B4 | =(1,5*B3-0,5*B2)

	A	B	C	D
1	n	Un		
2	0	2		
3	1	10		
4	2	14		
5	3	16		
6	4	17		
7	5	17,5		
8	6	17,75		
9	7	17,875		
10	8	17,9375		
11	9	17,96875		
12	10	17,98438		
13	11	17,99219		
14	12	17,99609		

1- Soit u la suite géométrique de raison 0,1 et de premier terme $u_0 = 5$.

a) Exprimer u_n en fonction de n.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$

c) Montrer que la suite définie sur IN par $v_n = \ln(u_n)$, est arithmétique ; donner sa raison

2- Soit u la suite arithmétique de raison ln2 et de premier terme $u_0 = \ln 3$.

a) Exprimer u_n en fonction de n.

b) Montrer que la suite définie sur IN par $v_n = e^{u_n}$, est géométrique ; donner sa raison.

3- On place le 1er de chaque mois (du 1er janvier 2006 au 1er Décembre 2006 inclus) un montant de 300DT sur un compte rémunéré à intérêts simples à 0,4% par mois.
On retire le capital acquis le 1 janvier 2007.
a) Calculer le montant de l'intérêt rapporté par chacun des quatre premiers mois.
b) u_n est l'intérêt rapporté par le montant placé le n-ième mois
Montrer que la suite (u_n) est arithmétique et donner sa raison.
c) En déduire le montant total des intérêts acquis, puis le capital acquis.

Un capital est dit placé à intérêts simples lorsque les intérêts ne s'ajoutent pas au capital pour porter eux-mêmes intérêts. Les intérêts versés à la fin du placement sont calculés proportionnellement à la durée du placement.
$K_{n+1} = K_n + i \times K_n$; *(* i *est le taux du placement)*

4- On place un capital initial C_0 de 10 000DT à intérêts composés au taux annuel de 8%.
Soit C_n le capital dont on dispose au bout de n années.
1- Montrer que C est une suite géométrique dont on donnera la raison. Calculer C_5.
2- Au bout de combien d'années de placement, le capital acquis dépassera-t-il le double du capital initial ?
Le résultat dépend-t-il du capital C_0 ?

Un capital est dit placé à intérêts composés lorsque à l'issue de chaque période de placement, les intérêts s'ajoutent au capital et portent eux-mêmes intérêts au taux i de placement. $C_{n+1} = C_n + i \times C_0$

5- On place le 2 janvier de chaque année, de 2007 à 2012 inclus, un montant de 1 000DT à intérêts composés au taux annuel de 5,5%
a) De quel capital acquis C disposera-t-on le 2 janvier 2010 juste après le dernier versement ?
b) Exprimer en fonction de n, le capital acquis C_n après n versements annuels de 1 000DT (au 2 janvier de chaque année à partir de 2007).

6- On considère les suite u et v définies pour tout entier naturel n, par
$u_n = e^{an+b}$ et $v_n = \ln(u_n)$ où $a \in IR^*$ et $b \in IR$.
1- Montrer que u est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2- Montrer que v est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

7- On considère les suites u et v définies sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3U_n \end{cases}$ et $v_n = \ln(u_n)$

1- Vérifier que u est une suite géométrique.
Exprimer son terme général en fonction de n.

2- a) Montrer que v est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

3- a) Soit n un entier naturel non nul, calculer $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}$ en fonction de n

b) En déduire en fonction de n, le produit : $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1}$.

8- Soit u la suite définie sur IN par: $u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2^n} - 1$

a) Prouver que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{2+(-1)^n}{2^n} \geq 0$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq -1$

c) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $2+(-1)^n \leq 3$ et $0 < \dfrac{1}{2^n} \leq 1$.

d) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 2$.

9- Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par son terme général u_n :

a) $u_n = \dfrac{n-1}{2n+1}$; b) $u_n = n^2 + 2n + 5$; c) $u_n = \dfrac{2}{n^2 + 2n + 5}$

d) $u_n = 2^n - 1$; e) $u_n = (-2)^n$; f) $u_n = 3 - 1{,}1^n$

g) $u_n = \ln(1 + \dfrac{2}{n})$; h) $u_n = e^{3-n}$; i) $u_n = \sqrt{1+n+n^2}$

j) $u_n = \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$; k) $u_n = \dfrac{1}{2}e^{0{,}1n+2} - 3$

10- On considère la suite u définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{4-n^2}{n}$

1- a) Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

b) En déduire le sens de variation de la suite u

2- a) Déterminer la fonction f telle que $u_n = f(n)$.

b) Retrouver le sens de variation de la suite U à l'aide de la fonction f.

11- On considère la suite u de terme général $u_n = \dfrac{1-n}{5-2n}$ pour tout entier $n \geq 3$

et la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{2x-5}$ définie sur $[3, +\infty[$.

a) Etudier les variations de f et en déduire que $f(x) \leq 2$ pour tout réel x de $[3, +\infty[$.

b) Déterminer la limite ℓ de f en $+\infty$. Exprimer $f(x)-\ell$ en fonction de x et en déduire que pour tout réel x de $[3,+\infty[$, $f(x)\geq \ell$

c) Construire la courbe C représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

d) Représenter la suite U dans le même repère.

e) Déduire de l'étude de la fonction f un encadrement du terme général u_n pour $n\geq 3$.

f) A partir de quel entier p peut-on affirmer que $u_n-\frac{1}{2}\leq 10^{-3}$?

12- Soit la suite u définie sur IN^* par : $u_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}...+\frac{1}{\sqrt{n}}$

a) Vérifier que pour tout $k\in IN^*$, $\frac{1}{\sqrt{k}}\geq\frac{1}{\sqrt{n}}$.

b) En déduire que pour tout $n\in IN^*$, $u_n\geq\sqrt{n}$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

13- On considère la suite (u_n) définie sur IN^* par $u_n=\int_0^1 t^n e^t dt$.

a) Vérifier que pour tout $t\in[0,1]$ on a $t^n\leq t^n e^t\leq et^n$.

b) En déduire que pour tout $n\in IN^*$, $\frac{1}{2n+1}\leq u_n\leq\frac{e}{2n+1}$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

14- On considère la suite u définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=3u_n-1$ pour tout entier naturel n.

1- Calculer les trois premiers termes de la suite u.

2- On pose pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-\frac{1}{2}$

a) Montrer que la suite v est géométrique et donner sa raison et son premier terme.

b) En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

c) En déduire la limite de la suite u.

15- On considère la suite u définie sur IN par : $u_0=e$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$

On pose $v_n=\ln(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1- Montrer que v est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. En déduire son terme général en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

2- pour tout entier naturel n, on pose :

$S_n=v_0+v_1+v_2+...+v_n$ et $P_n=u_0\times u_1\times u_2\times...\times u_n$

a) Exprimer S_n en fonction de n. En déduire P_n en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

16- On considère la suite U définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 0,8u_n + 2 \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1- Calculez u_1, u_2 et u_3.

2- Déterminez un réel a tel que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par: $v_n = u_n + a$ soit une suite géométrique.

On suppose dans la suite que pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 10$.

3- a) Calculer v_0 puis donnez l'expression de v_n en fonction de n.

b) Quelle est l'expression de u_n en fonction de n? Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$..

4- Pour n entier naturel, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ et $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

a) Quelle est l'expression de T_n en fonction de n? Calculer $\lim_{n\to+\infty} T_n$.

b) Quelle est l'expression de S_n en fonction de n? Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

17- On considère la suite u définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 8$ pour tout entier naturel n.

1- a) Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, placer sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

b) Que peut on conjecturer pour la convergence de la suite u ?

2- On considère la suite v définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n.

a) Calculer les trois premiers termes de la suite v.

b) Montrer que v est une suite géométrique, préciser sa raison.

c) Exprimer v_n en fonction de n.

3- Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $u_n = u_0 + (v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1})$.

4- En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 5 + 5(1 - 0,2^n)$.

5- Montrer que la suite u converge et préciser sa limite.

18- Soit u la suite définie sur IN par : $u_o = 2$ et pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$, $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{3}|u_n - 1|$

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n \in IN$, $|u_{n+1} - 1| \leq (\frac{1}{3})^n$

c) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

19- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 3u_n}$

1- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

2- On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{u_n}$.

a) Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on donnera la raison et le premier terme v_0.

b) En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

c) En déduire le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

20- On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{3u_n - 2}$ pour tout entier naturel n.

1- Prouver que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+6}{3x-2}$ est décroissante sur $\left]-\infty, \dfrac{2}{3}\right[$.

2- En déduire par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $-3 \le u_n \le 0$.

Soit v la suite définie par $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 2}$ pour tout entier naturel n.

a) Exprimer u_n en fonction de v_n

b) Montrer que v est une suite géométrique de raison $-\dfrac{4}{5}$

c) En déduire la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$, puis la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

21- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 12}{u_n + 1}$.

1- Etudier les variations de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+12}{x+1}$.

2- tracer dans un même repère orthonormé, la représentation graphique C de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.

3- En utilisant C et D, placer les points de coordonnées $(u_0, 0)$, $(u_1, 0)$, $(u_2, 0)$ et $(u_3, 0)$.

4- Que peut-on conjecturer pour la limite de la suite (u_n).

5- Soit (v_n) et (w_n) les suites définies sur IN par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $1 \le u_n \le 7$

b) Montrer que (v_n) est une suite croissante et que (w_n) est une suite décroissante.

c) En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes.

6- On considère (t_n) la suite définie sur IN par $t_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n + 3}$

a) Montrer que (t_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

b) Calculer la limite de la suite (t_n) et en déduire celle de la suite (u_n).

22- On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{u_n + 2}$.

1- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [3, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x+3}{x+2}$.

a) Montrer que f est dérivable sur I et que $f(I) \subset I$.

b) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans I une solution unique ℓ que l'on précisera.

c) Montrer que pour tout x de I, $|f'(x)| \le \dfrac{1}{5}$.

d) Prouver que pour tout $x \in]3,+\infty[$ on a : $|f(x)-\ell| \leq \frac{1}{5}|x-\ell|$.

2- a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $|u_{n+1}-\ell| \leq \frac{1}{5}|u_n-\ell|$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $|u_n-\ell| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

c) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

23- On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0=-1$ et $u_{n+1}=\frac{u_n}{3-u_n}$.

1- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=]-\infty,0]$ par : $f(x)=\frac{x}{3-x}$.

a) Montrer que f est dérivable sur I et que $f(I)\subset I$.

b) Résoudre dans I l'équation f(x) = x .

c) Montrer que pour tout x de I , $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

d) Prouver que pour tout $x \in]-\infty,0[$ on a : $|f(x)| \leq \frac{1}{3}|x|$.

2- a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{3}|u_n|$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $|u_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

c) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

24- Soient a, b et c trois réels tels que $ac-b\neq 0$.

On considère la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1}=\frac{a\,u_n+b}{u_n+c}$ et $u_0\neq -c$

1- Montrer que la suite u est constante si et seulement si u_0 est solution de l'équation

$(E) : x^2+(c-a)x-b=0$

2- Dans cette question on prend $a=4$, $b=3$, $c=6$ et $u_0=2$

a) Montrer que (E) admet deux racines distinctes α et β $(\beta<\alpha)$, que l'on précisera.

b) On considère la suite v définie sur IN par $v_n=\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$

Montrer que la suite v est géométrique de raison $q=\frac{3}{7}$.

c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

25- Le président d'une association sportive constate que chaque année, l'association garde les trois quarts de ses anciens adhérents et qu'il y a 800 nouveaux adhérents.
On suppose que l'évolution du nombre des adhérents reste le même au fil des ans et on se propose d'étudier cette évolution. On suppose que l'association a commencé ses activités

avec un nombre d'adhérents égal à 1600 et on désigne par u_n le nombre d'adhérents au bout de n années.

1- Calculer u_1, u_2 et u_3.

2- Exprimer u_{n+1} et fonction de u_n.

3- On pose $v_n = 3200 - u_n$.

a) Montrer que la suite v est géométrique ; déterminer sa raison et son premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que pour tout entier naturel n on a

$u_n = 3200 - 1600 \times (0,75)^n$

c) Calculer la limite de la suite u. Interpréter le résultat.

26- Une usine produit des machines et les vend à un prix de P_n l'année n.
Les quantités offertes O_n sont fonction du prix P_{n-1} de l'année précédente.
Les quantités demandées D_n sur le marché sont fonction du prix P_n de l'année n.
Les fabricants recherchent l'équilibre du marché, c'est-à-dire qu'à chaque année n, on ait $O_n = D_n$.On a vérifié que : $\begin{cases} O_n = 2P_{n-1} - 10 & \text{pour } n > 1 \\ D_n = -3P_n + 140 & \text{pour } n > 0 \end{cases}$

1- a) Représenter sur le même graphique, les droites d'équations respectives $y = 2x - 10$ et $y = -3x + 140$ puis déterminer leur point d'intersection.

b) On suppose que $P_0 = 15$, calculer O_1 puis représenter sur le graphique O_1 et P_1.

c) Calculer et représenter de même P_2 et P_3.

d) Que peut on conjecturer pour la limite de la suite (P_n) ?

2- A l'équilibre du marché, on a $O_n = D_n$

a) Démontrer que pour tout entier naturel $n > 1$, $P_n = -\frac{2}{3}P_{n-1} + 50$.

b) On pose pour tout entier naturel n, $U_n = P_n - 30$; montrer que la suite (U_n) est géométrique. Exprimer alors U_n puis P_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite p de la suite (P_n).

d) Quelles sont alors les quantités offertes et demandées à ce prix p ?

27- Un club de sport propose deux types d'abonnements non permutables.

Formule A:

Une cotisation annuelle de 50DT à laquelle s'ajoute la première année seulement un droit d'entrée de 100DT.

Formule B:

Une cotisation annuelle initiale de 10DT qui augmente de 10% par an. Dès la seconde année, pour fidéliser la clientèle, on effectue une réduction de 0,5DT sur la cotisation annuelle. Si C_n est le montant, exprimé en DT, de la cotisation annuelle de la nième année, on a $C_1 = 10$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , $C_{n+1} = 1,1C_n - 0,5$

1- Déterminez la somme T_n versée au club de sport par membre pendant n années avec la formule A.

2- Soit (D_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $D_n = C_n + a$ où a est un réel.

a) Déterminer le réel a pour que la suite (D_n) soit une suite géométrique de raison 1,1 et préciser son premier terme.
b) Exprimer D_n puis C_n en fonction de n.
c) Déterminer la somme S_n versée au club par un membre pendant n années avec la formule B.
d) Quel nombre minimum d'années un membre doit-il cotiser pour que la formule A soit plus avantageuse que la formule B?

28- Soit a un réel strictement positif, on considère la suite arithmétique V de raison a et de premier terme 0.

1- On définit sur IN les suites A et I par $A_n = \int_{a^n}^{a^{n+1}} \frac{1}{x}dx$ et $I_n = \int_{V_n}^{V_{n+1}} 3^x\,dx$

a) Montrer que la suite A est constante dont précisera la valeur en fonction de a. Interpréter graphiquement chacun des termes de cette suite.
b) Montrer que la suite I est géométrique dont on précisera la raison en fonction de a. Calculer la somme $I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_{10}$ par deux méthodes.

2- On considère l'intégrale $B_n = \int_n^{n+1} 3e^{0,1t}\,dt$ où n est un entier naturel.

a) Exprimer cette intégrale en fonction de n.
b) Démontrer que B_n est le terme général d'une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme (on donnera les valeurs exactes).
c) Calculer par deux méthodes la somme $S_n = B_0 + B_1 + ... + B_{11}$.

29- a est un nombre réel tel que $0 < a < \frac{\pi}{4}$

(u_n) est la suite réelle définie pour n entier naturel non nul par les relations:

$u_1 = 1 + \frac{1}{2(\sin a)^2}$ et pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = \cos(2a)u_n + 1$

1- Démontrer que: $u_n > 1$ pour tout naturel n non nul

2- On pose pour n entier naturel non nul: $v_n = u_n - \frac{1}{2(\sin a)^2}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
b) Exprimer v_n en fonction de n et de a, puis u_n en fonction de n et de a.
c) Les suites (v_n) et (u_n) sont-elles convergentes ? Justifiez la réponse.

3- Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n .$$

a) Quelle est l'expression de S_n en fonction de n ?
b) Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

30- 1- Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $e^{n+1} > 2\,e^n$

2- Soit (u_n) la suite définie par: $u_n = \int_n^{n+1} (e^x + 1)dx$, pour tout entier naturel n.

a) Préciser le sens de variation de la suite (u_n).
b) En déduire que $u_n > e$, pour tout entier naturel n non nul.
c) Calculer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$

3- On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par:

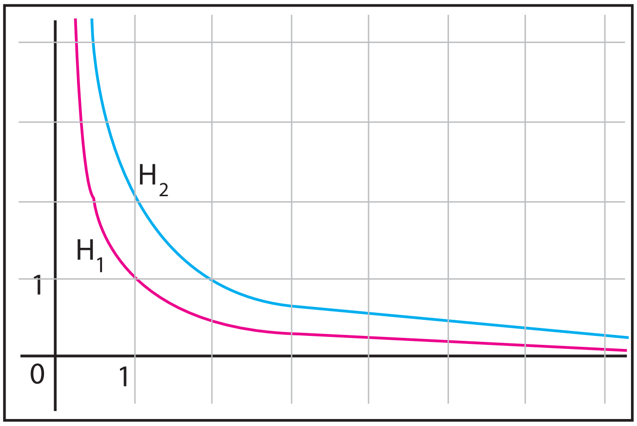
$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n - n$.

a) Démontrer que la suite (S_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison

. b) Déterminer les entiers naturels tels que: $S_n > 23$

31- Les courbes H_1 et H_2 représentées dans le repère orthonormé ci-contre ont respectivement pour équation

$y = \frac{1}{x}$ et $y = \frac{2}{x}$.



On note D_2 le domaine délimité par les courbes H_1 et H_2 et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

On note D'_2 le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe H_1 et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

1- Colorier les domaines D_2 et D'_2 d'une couleur différente et montrer qu'ils ont la même aire.

Soit n un entier naturel strictement positif. On note u_n l'aire du domaine D_n délimité par les courbes H_1 et H_2 et les droites d'équation $x = n$ et $x = n +1$.

2- Exprimer un en fonction de n.

3- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

On pourra comparer les nombres $n(n +2)$ et $(n +1)^2$.

4- Étudier la convergence de la suite (u_n).

5- Déterminer la plus grande valeur de n telle que l'aire du domaine D_n reste supérieure à 1/10 d'unité d'aire. Soit N cette valeur.

6- Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes H_1 et H_2 et les droites d'équation $x =1$ et $x = N$.

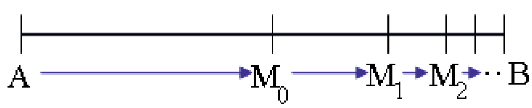
La flèche toujours sans cible !!

Un maître archer tire une flèche vers une cible située à vingt mètres.

On admettra que la flèche conserve une vitesse constante de dix mètres par seconde lors du trajet. Zénon d'Elée, mathématicien grec du cinquième siècle avant Jésus-Christ, avait proposé un paradoxe qui ne fut complètement résolu qu'au dix-huitième siècle, soit vingt-deux siècles plus tard.

Partant du principe qu'on ne peut pas effectuer réellement une infinité d'étapes, il concluait à l'impossibilité de tous les mouvements !!

Zénon observe que, la flèche étant tirée depuis un point A vers un point B, passera d'abord par le milieu M_0 de [AB], puis de même, elle passera par le milieu M_1 de $[M_0B]$ … ainsi de suite, la flèche devra passer par une infinité de milieux !!



Résolution du paradoxe :

La distance parcourue est la limite lorsque n tend vers l'infini, de la distance d_n égale à : $20\times\frac{1}{2}+20\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+20\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+20\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c'est-à-dire de $d_n=20\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, en un temps total en secondes égal à la limite lorsque n tend vers l'infini de $t_n=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

On vérifie que les suite (d_n) et (t_n) sont convergentes et que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n=20$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=2$.

On peut donc imaginer que la flèche parcourt une infinité de milieux, mais l'ensemble se produit bien en un temps fini et notre flèche atteint bien sa cible en un temps fini égal à 2 secondes !!

Chapitre 7

MATRICES ET SYSTEMES

Pour commencer

Activité 1

Donner le nombre de solutions dans IR² de chacun des systèmes suivants (les solutions ne sont pas demandées).

$\begin{cases} 3x-y=2 \\ x+5y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 6x+9y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x+2y=2 \\ 10x+4y=4 \end{cases}$

Activité 2

1- Résoudre dans IR^2 les systèmes suivants :

$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=10 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x-y=8 \\ -3x+7y=8 \end{cases}$

2- Résoudre dans IR^3 les systèmes suivants :

$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ x-2y+2z=1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-y+3z=5 \\ x+2y-z=-1 \\ x+7y-6z=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ 2x+y-3z=2 \end{cases}$

Activité 3

Le coût total de production d'une quantité x d'un produit est modélisé par la fonction C (x) = a x² + b x + c où a, b et c sont trois réels. Le coût est exprimé en milliers de dinars et la quantité x en kilogrammes.

On sait que les coûts fixes sont de cinq milles dinar; le coût total de 1 kg est de 6000 DT et le coût total de 2 kg est de 9000 DT.

Déterminer l'expression de C(x).

Activité 4

Les employés d'une entreprise sont partagés en 3 groupes de travail :

- Le 1^er^ groupe comporte un cadre, 2 agents techniques et 3 ouvriers.
- Le second groupe comporte : 2 cadres, 3 agents techniques et 5 ouvriers.
- Le 3^ème^ groupe comporte : 3 cadres, 2 agents techniques et 7 ouvriers.

Les masses salariales en DT du premier, du second et du troisième groupe sont respectivement : 3100, 5300 et 6300.

Déterminer les salaires moyens respectifs d'un cadre, d'un agent technique et d'un ouvrier.

I- Matrices

1) Notion de matrice

Activité 1

Le tableau ci-dessous donne l'état du stock concernant deux produits de beauté B_1 et B_2 sur trois points de vente P_1, P_2 et P_3.

	B_1	B_2
P_1	70	35
P_2	30	27
P_3	27	24

1- Donner la colonne représentant l'état du stock du produit B_1 sur les trois points de ventes.

2- Donner la ligne représentant l'état du stock en B_1 et B_2 sur le point de vente P_3.

3- Que représente le nombre 24 situé à l'intersection de la troisième ligne et la deuxième colonne du tableau ?

➢ Les informations précédentes peuvent être résumées dans le tableau à trois lignes et deux colonnes suivant : $\begin{pmatrix} 70 & 35 \\ 30 & 27 \\ 27 & 24 \end{pmatrix}$ appelé **matrice d'ordre 3×2**

Définition

n et p étant deux entiers naturels non nuls, une **matrice** d'ordre $n \times p$ est un tableau de nombres réels formé de n lignes et de p colonnes. Ces nombres sont appelés coefficients ou termes de la matrice.

Notation

● Soit M une matrice d'ordre $n \times p$. Le coefficient situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne est noté a_{ij}.

● Toute matrice M de coefficients a_{ij} avec i et j des entiers vérifiant : $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le p$. est notée (a_{ij}) et représentée comme ci-dessous.

$$\begin{array}{cc} & \text{Colonnes} \to \quad \begin{array}{ccccc} 1 & & j & & p \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ . & & . & & . \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ . & & . & & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & & a_{np} \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ . \\ i \\ . \\ . \\ n \end{array} \end{array}$$

Lignes

Activité 2

1) Soit A une matrice d'ordre 3×3 dont voici certains termes : $a_{21}=4$, $a_{32}=5$, $a_{23}=1$, $a_{13}=-5$, $a_{12}=7$, $a_{31}=3$

Recopier et compléter $A=\begin{pmatrix} 6 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 0 \end{pmatrix}$

2) Soit la matrice $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & . \\ . & . & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ dont les termes manquants sont : $b_{21}=4$, $b_{22}=-1$ et $b_{13}=5$.

a) Recopier et compléter B.
b) Quel est l'ordre de B ?
c) Déterminer $b_{2\,3}$ .Peut – on parler de $b_{3\,2}$? Pourquoi ?

Activité 3

Dans la matrice ci- dessous sont rangées les notes de trois élèves e_1, e_2 et e_3 de la manière suivante :pour $i\in\{1,2,3\}$, la colonne i indique les notes de l'élève e_i respectivement en mathématiques , en économie et en gestion .

$$M=\begin{pmatrix} 10 & 12 & 9 \\ 10 & 15 & 13 \\ 15 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

1- Donner l'ordre de M. Que représente la troisième colonne de M ?
   Que représente la première ligne de M ?
2- Quelle est la note obtenue en économie pour l'élève e_3 ?
3- On pose $M=(a_{i\,j})$ Donner les valeurs de a_{11}, a_{23}, a_{33} et a_{32}.

Vocabulaire.

● Une matrice formée d'une seule ligne et de p colonnes s'appelle une **matrice ligne** d'ordre p.

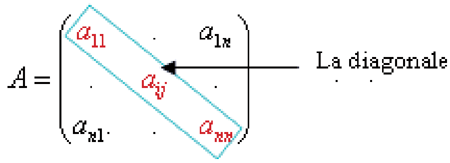
$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$ est une matrice ligne d'ordre 3

● Une matrice formée d'une seule colonne et de n lignes s'appelle une **matrice colonne** d'ordre n.

$B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne d'ordre 2.

● Une matrice ayant le même nombre n de lignes et de colonnes est une **matrice carrée** d'ordre n.

● La diagonale d'une matrice carrée $A=(a_{ij})$ d'ordre n est la rangée formée des coefficients a_{ii} .



● La **matrice unité d'ordre n**, notée $\boldsymbol{I_n}$, est une matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale valent 1.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

● Une matrice d'ordre $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls est dite **matrice nulle** d'ordre $n \times p$ cette matrice est notée **O**.

$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle d'ordre 3.

Activité 4

Soit A= $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ .Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) A est une matrice d'ordre 2x3.
b) a_{22} = -1.
c) a_{32} = -5.

Propriété

Deux matrices sont égales si et seulement si, elles sont de même ordre et leurs coefficients de mêmes indices sont égaux deux à deux.

Activité 5

1) Compléter les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \dots \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & \dots \\ \dots & -2 & 6 \end{pmatrix}$ pour qu'elles soient égales.

2) Déterminer le réel a pour que la matrice $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} a^2 & a^2 - 1 \\ 2a+2 & a^2 \end{bmatrix}$ soit égale à la matrice unité d'ordre 2.

2) Opérations sur les matrices:

Addition

Activité 1

Sur trois de ses points de vente, un gestionnaire de stock d'une chaîne de magasins suit l'état du stock de trois articles de confection : des séries de chemises (c), des séries de pantalons (p) et des séries de vestes (v). Les matrices I, E et S ci- dessous indiquent respectivement l'état initial du stock (I), Les entrées du stock (E) et les sorties du stock (S)

$$\mathrm{I}=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 5 & 10 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\mathrm{c}\\ \mathrm{p}\\ \mathrm{v}\end{array}\end{array},\qquad E=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}20 & 10 & 20\\ 10 & 15 & 25\\ 25 & 30 & 30\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\mathrm{c}\\ \mathrm{p}\\ \mathrm{v}\end{array}\end{array}\qquad \text{et } S=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}18 & 9 & 5\\ 20 & 4 & 3\\ 25 & 10 & 10\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\mathrm{c}\\ \mathrm{p}\\ \mathrm{v}\end{array}\end{array}$$

1- Donner la matrice S_1 représentant le stock total avant les sorties.
2- Donner la matrice S_2 représentant le nouvel état des stocks après les sorties.

Définition

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même ordre $n\times p$.

- La somme des deux matrices A et B, notée A + B, est la matrice $C = (a_{ij}+b_{ij})$ de même ordre $n\times p$.
- La différence des deux matrices A et B, notée A – B, est la matrice $D = (a_{ij}-b_{ij})$ de même ordre $n\times p$.

Activité 2

1-Vérifier que $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & \sqrt{5}\\ 1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & \sqrt{5}\\ 2 & -2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$ et que $\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -2 & 5 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 5 & -2\\ -3 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -5 & 4\\ 1 & 5 & 0\end{pmatrix}$

2- Calculer

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2 & \frac{2}{3}\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -2\\ -5\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}20 & 1 & 0\\ 10 & -5 & 25\\ -2 & 30 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 10 & 20\\ 10 & 15 & 5\\ 5 & 30 & 3\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\ -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & -\frac{1}{6}\\ \sqrt{5} & 5 & -\sqrt{5}\\ 11 & 2 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -3 & \frac{5}{6}\\ 0 & 5 & -\sqrt{5}\\ 9 & -2 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

3- Soient $A=\begin{pmatrix}x & 5\\ 0 & 2x\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}y & 7\\ -1 & 3y\end{pmatrix}$ où x et y sont deux réels, déterminer x et y pour que : $A+B=\begin{pmatrix}4 & 12\\ -1 & 17\end{pmatrix}$.

Propriétés

A, B , C trois matrices d'ordre $n\times p$ (n et p deux entiers naturels non nuls) et **O** la matrice nulle d'ordre $n\times p$.

- A+ **O= O +** A=A
- A+ B= B +A.
- (A+B) + C = A + (B + C) .

Activité 3

Calculer :

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 7 & -1\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 4 & -3\\ -1 & 6 & -3\\ 2 & 8 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -3\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}1 & -5 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & \frac{-1}{5} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{15} & 4 & 7\end{pmatrix}$$

Multiplication d'une matrice par un réel

Activité 1

Soit A = $\begin{pmatrix}6 & -4\\ -1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}$, calculer A+ A qu'on note 2A puis calculer 2.A + A qu'on note 3A

Définition

Le produit d'une matrice A par un réel *k* est la matrice notée *k*A obtenue en multipliant chaque coefficient de A par le réel *k*.

Remarque

- k.A et A sont deux matrices de même ordre.
- (-1).A = -A (la matrice opposée de A).

Activité 2

1- Dans chacun des cas suivants calculer 3A ; 4B ; 3A - 4B.

i) $A=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 7 & \frac{5}{3}\end{pmatrix}$ *ii)* $A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 5 & 1\\ 0 & -8\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 5\sqrt{2} & -1\\ 0 & -18\end{pmatrix}$

iii) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 6\end{pmatrix}$

2- Dans chacun des cas suivants calculer A - 5B.

i) A = (2) et B= (10) .

ii) $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -3\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}10 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -5\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$

Activité 3

1-Dans chacun des cas suivants comparer $\frac{2}{3}A+\frac{2}{3}B$ et $\frac{2}{3}(A+B)$:

i) $A=\begin{pmatrix} 2 & -15 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

ii) $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 5\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$

iii) $A=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2- Soient $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux matrices d'ordre n x p et k un réel quelconque.
Comparer k.(A + B) et k.A + k.B.

Propriété

A et B, deux matrices d'ordre $n\times p$ (n et p deux entiers naturels non nuls).
Pour tout réel k on a : k.(A +B) = kA+kB.

Activité 4

1) Soit x un réel différent de 1 et -1 et soient $A=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ et $B=\dfrac{2(x^2-1)}{x+1}A+\dfrac{3(x^2-1)}{x-1}A$

a) Vérifier que B = (5x+1)A

b) Existe-t-il une valeur de x pour la quelle $B=\begin{pmatrix} 36 & -12 \\ 42 & -6 \end{pmatrix}$?

2) Calculer : $C=-2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

3) Déterminer le réel x tel que : $x\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{31}{4} \\ \frac{5}{2} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$

Activité 5

Pour les trois premiers mois de l'année 2008, on donne l'évolution du prix hors taxes(HT) en DT de deux portables A et B par la matrice P ci-contre :

$$P=\begin{array}{c} \begin{matrix} A & B \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 120 & 100 \\ 100 & 90 \\ 80 & 70 \end{pmatrix} \end{array}$$

1- Quel est le prix HT du portable B au mois de Mars 2008 ?

2- La TVA sur ces produits est 19,6%. Que représente la matrice T = 0,196 P.

3- a)Vérifier que la matrice représentant les prix TTC est P'= 1,196P.Donner cette matrice.
b) Quel est le prix TTC du portable B au mois de Mars 2008 ?

3) Produit de deux matrices

Activité 1

Un fleuriste vend des bouquets de fleurs. Chaque bouquet se compose de 4 roses, 5 tulipes et 3 branches de marguerite. Une rose coûte 2 DT, une tulipe coûte 1,5 DT et une branche de marguerite coûte 1 DT.

1) Donner la matrice ligne $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ représentant la composition d'un bouquet et la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ représentant les prix unitaires respectifs de chaque type de fleurs.

2) Vérifier que le prix p d'un bouquet est : p = $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

➢ Le calcul du prix p peut être schématisé comme suivant :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\times 2 + 5\times 1,5 + 3\times 1 = 18,5.$$

On dit qu'on a effectué le produit de la matrice ligne $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ par la matrice colonne

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Définition

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix}$ étant une matrice ligne d'ordre p

et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne de même ordre p.

Le produit des deux matrices A et B, noté A.B, est le réel $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_pb_p$.

On pose ce produit comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 \dots + a_pb_p .$$

Activité 2

1) Vérifier que $\begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{-44}{5}$ et que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 3.$

2) Calculer $(2 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$; $(2 \quad 11 \quad 0)\begin{pmatrix}-2\\12\\-3\end{pmatrix}$; $(\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{4}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $(0 \quad 5)\begin{pmatrix}10\\-1\end{pmatrix}$.

3) Déterminer les réels x tels que : $(2 \quad x \quad -1)\begin{pmatrix}2\\x-1\\4\end{pmatrix} = 0$.

Activité 3

Dans a matrice $A = \begin{pmatrix}07 & 10 & 11\\10 & 12 & 13\\11 & 09 & 12\end{pmatrix}$ sont organisées les notes obtenues, lors d'un concours, par trois élèves e_1 , e_2 et e_3 en français, en mathématiques et en économie.(La ligne N_i précise les notes de l'élève e_i respectivement en français, en mathématiques et en économie).

La matrice $C = \begin{pmatrix}2\\2.5\\4\end{pmatrix}$ donne les coefficients respectifs de français, des mathématiques et d'économie.

1) Donner les matrices lignes N_1, N_2 et N_3 représentant successivement les notes obtenues par les élèves e_1,e_2 et e_3 dans ce concours .

2) a) Pour $i \in \{ 1,2,3\}$ calculer le réel $t_i = N_iC$.

b) Que représente la matrice colonne $T = \begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix}$?

La matrice colonne T peut être schématisé comme suit :

$$A\times C = \begin{pmatrix}7 & 10 & 11\\10 & 12 & 13\\11 & 9 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2.5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\times2+10\times2.5+11\times4\\10\times2+12\times2.5+13\times4\\11\times2+9\times2.5+12\times4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}83\\102\\92.5\end{pmatrix}$$

On dit qu'on a effectué le produit de la matrice A par la matrice colonne C.

Définition

A est une matrice d'ordre $n\times p$ et B une matrice colonne d'ordre p. Le produit AB de ces deux matrices est la matrice colonne d'ordre n obtenue en appliquant le principe suivant : Le premier coefficient de AB est le produit de la première ligne de A par la matrice colonne B : le deuxième coefficient de AB est le produit de la deuxième ligne de A par la matrice colonne B et ainsi de suite jusqu'au $n^{\text{ième}}$ coefficient du produit A.B.

Activité 4

1) Vérifier que $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2) Calculer les produits de matrices suivants :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$. c. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3) Trouver les réels x et y tels que : $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Activité 5

Une entreprise commercialise 3 produits P_1, P_2, et P_3. A la fin d'une période de 3 semaines, les quantités vendues par semaines sont données par la matrice Q suivante :

$$Q = \begin{array}{c} \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 45 & 120 & 10 \\ 50 & 90 & 15 \\ 40 & 98 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Durant la période de 3 semaines, le prix unitaire hors taxe du produit P_1 est 2 DT, pour le produit P_2 de 1 DT et pour le produit P_3 de 3 DT.

1- Ecrire la matrice colonne P des prix unitaires puis déterminer la matrice V des prix de vente hors taxe pour ces trois semaines.

2- calculer le montant TTC que l'entreprise a encaissé pour la vente du produit P_2 durant la période étudiée avec un taux de TVA de 19,6% sur ces produits.

Activité 6

L'inventaire des calculatrices de type A et de type B, en stock dans trois points de ventes d'une grande surface, est donné par la matrice : $M = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 17 & 5 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$ où les lignes indiquent les stocks de calculatrices disponibles dans chacun des trois points de ventes.

Le prix de vente en DT des calculatrices de type A et de type B est donné par la matrice à une colonne $N = \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $M \times N$.

2) Que représentent les nombres obtenus dans la matrice $M \times N$?

Activité 7

Dans une entreprise,les services : secrétariat, comptabilité et ateliers ont estimé leurs besoins pour un trimestre en crayons, stylos et surligneurs :

	Crayons à papier	Stylos à billes	Surligneurs
secrétariat	100	200	500
comptabilité	200	300	300
atelier secrétariat	100	180	120

Les prix HT par unité, en DT, proposés par deux fournisseurs F_1 et F_2 sont les suivantes :

	F_1	F_2
Crayon à papier	0.25	0.28
Stylos à billes	0.12	0.11
Surligneurs	0.5	0.45

1) Dans cette question on suppose que chaque service est responsable de sa commande.
   a) A l'aide du produit de deux matrices convenablement choisies, présenter les dépenses estimées de chacun des services suivant le fournisseur qu'il aura choisi.
   b) Quel sera le choix le plus économique pour le secrétariat ? pour les ateliers ?
2) Dans cette question on suppose que les trois services choisissent le même fournisseur
   a) A l'aide d'un produit de deux matrices, présenter sous forme de deux matrices colonnes C_1 et C_2 les dépenses estimées pour chaque service par l'entreprise suivant le fournisseur choisi.
   b) Les trois services ont-ils intérêt à faire une commande commune ? Chez quel fournisseur ?

➢La matrice R peut être schématisée par :

$$\begin{pmatrix} 100 & 200 & 500 \\ 200 & 300 & 300 \\ 100 & 180 & 120 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,25 & 0,28 \\ 0,12 & 0,11 \\ 0,5 & 0,45 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 100\times0,25+200\times0,12+500\times0,5 & 100\times0,28+200\times0,11+500\times0,45 \\ 200\times0,25+300\times0,12+300\times0,5 & 200\times0,28+300\times0,11+300\times0,45 \\ 100\times0,25+180\times0,12+120\times0,5 & 100\times0,28+180\times0,11+120\times0,45 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 299 & 275 \\ 236 & 224 \\ 106,6 & 101,8 \end{pmatrix}$$

On dit qu'on a effectué le produit de la matrice $\begin{pmatrix} 100 & 200 & 500 \\ 200 & 300 & 300 \\ 100 & 180 & 120 \end{pmatrix}$ par la matrice $\begin{pmatrix} 0,25 & 0,28 \\ 0,12 & 0,11 \\ 0,5 & 0,45 \end{pmatrix}$

Définition

Soit $A=(a_{ik})$ une matrice à n lignes et p colonnes et $B=(b_{kj})$ une matrice à p lignes et q colonnes. Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice, notée $A\times B=(c_{ij})$ à n lignes et q colonnes, définies par

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots a_{ik}b_{kj} + \dots a_{ip}b_{pj}$.

Remarques

- La multiplication de deux matrices n'est possible que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la deuxième.
- Le produit d'une matrice d'ordre n×p par une matrice p×m est une matrice d'ordre n×m.

Activité 8

1) Vérifier que $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 17 \\ 13 & -1 \end{pmatrix}$ et que $\begin{pmatrix} 4\sqrt{3} & 8 & -1 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\sqrt{3} & -8\sqrt{3} \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

2) Calculer les produits de matrices suivants :

a. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \frac{2}{3} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

3) Calculer A^2 puis A^3 pour :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ puis pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Activité 9

1- Calculer A×B , B×A , A×(B×C) et (A ×B) ×C dans chacun des deux cas suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \frac{2}{3} & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

c) A- t- on A×B = B×A ?

.

2- Soient M et N les matrices suivantes :

$M = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{7} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{11} \\ \sqrt{5} & -7 & 2 \end{pmatrix}$..

Calculer $I_2 \times M$, $M \times I_2$, $I_3 \times N$ et $N \times I_3$.

- Soient A, B et C trois matrices, tels que les produits ci-dessous sont possibles on a : $A\times(B\times C) = (A\times B)\times C$.
- Pour toute matrice carrée M d'ordre 2 on a : $I_2 \times M = M \times I_2 = M$.
- Pour toute matrice carrée N d'ordre 3 on a : $I_3 \times N = N\times I_3 = N$.

Activité 10

Dans une chaîne de restauration rapide, on sert chaque jour : 800 hamburgers, 600 cheeseburgers et 1000 cafés. Les prix unitaires PU de revient et des bénéfices unitaires BU sont donnés, en DT, par le tableau :

	hamburger	cheeseburger	café
PU de revient	0,8	0,6	0,4
BU	1	1	0,7

1) Ecrire les quantités des produits vendus dans une matrice ligne Q, les PU de revient dans une matrice colonne R, les bénéfices unitaires BU dans une matrice colonne B.
2) a- Calculer le coût total à l'aide d'un produit d'une matrice ligne par une matrice colonne.
   b- Même question pour les bénéfices totaux.
   c- En déduire le prix de vente total.
3) a- Ecrire les prix de vente unitaires dans une matrice colonne notée V
   b- Retrouver le résultat de la question 2)-c
4) a- Exprimer V en fonction de B et R.
   b- Comparer alors $Q\times R + Q\times B$ et $Q\times(R + B)$.

Soient A, B et C trois matrices, tels que les produits et les sommes ci-dessous sont possibles on a : $A\times(B + C) = A\times B + A\times C$

Activité11

Soient $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 5 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

1) Calculer $A\times B$ puis $B\times A$.
2) a) Calculer $A\times B + B$
   c) En déduire $A^2\times B + A\times B$.

II- Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3.

Activité1

1) $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2 .

Le réel $4\times\frac{5}{2} - 3\times(-1)$ s'appelle le **déterminant de la matrice M .**

On le note $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & \frac{5}{2} \end{vmatrix}$ et on écrit **dét (M) =** $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 4\times\frac{5}{2} - 3\times(-1)$ **.**

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer dét (A) ; dét (B) et dét (C) .

2) $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ est une la matrice carrée d'ordre 3.

On désigne par Δ_{ij} le déterminant de la matrice carrée d'ordre 2 obtenue à partir de la matrice N en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne .Exemple : $\Delta_{21} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

a) Donner Δ_{11} et Δ_{31} sans les calculer .

Le réel $+1.\Delta_{11} - 3.\Delta_{21} + (-4).\Delta_{31}$ (1, 3 et (-4) sont les coefficient qui forment la première colonne de la matrice N) est **le déterminant de la matrice N.**

On le note $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ et on écrit

dét (N) = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = +1.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-4).\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

b)On donne la matrice $D = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

Vérifier que dét (D) = -5.

Définition

Soit M = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 . Le déterminant de M est le réel, noté *dét* (M), défini par : *dét* (M) = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Soit N = $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3. Le déterminant de N est le réel défini par : *dét* (N) = $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

Conséquence

dét(I_2) = 1 et dét (I_3) = 1

Activité 2

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

A= $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; D = $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; E = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et

F = $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Activité 3

Soit N = $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3

Vérifier que dét(N)= $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$.

Soit N = $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3 .Le déterminant de N peut être calculé en développant par rapport à la première ligne et on obtient :

dét(N) = $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$.

Activité 4

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -2 & 3 & -4\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2 & 0 & -4\\ 2 & -1 & 5\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}2 & 2 & -4\\ 2 & 2 & 5\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

III- Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3

Activité 1

On donne $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

1) a) Déterminer x et y pour que $A'=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & y\\ x & 1\end{pmatrix}$ vérifie $A\times A'=I_2$.

b) Pour les valeurs de x et y trouvées, vérifier que $A'\times A=I_2$.

2) a) Déterminer les réels a, b et c pour que $B'=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}a & -5 & 4\\ 3 & b & 1\\ -1 & 5 & c\end{pmatrix}$ vérifie $B\times B'=I_3$.

b) Pour les valeurs de a, b et c trouvées, vérifier que $B'\times B=I_3$.

- On dit que A est **inversible** et que A' est **la matrice inverse** de A ou que A'est **l'inverse** de A. De même pour la matrice B elle est inversible et son inverse est B'.

Définition

Soit $M=(a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre *n*. On dit que M est inversible si et seulement s'il existe une matrice M' de même ordre n vérifiant : $M\times M'=M'\times M=I_n$, où I_n est la matrice unité .
M'est appelée dans ce cas l'inverse de M, noté M^{-1}.

Remarques

On admet que :
- Si une matrice carrée est inversible alors sa matrice inverse est unique.
- Si M est une matrice carrée d'ordre n et s'il existe une matrice carrée M' d'ordre n vérifiant $M\times M'=I_n$ **ou** $M'\times M=I_n$ alors M est inversible et son inverse est la matrice M'.

Activité 2

1) Soit A= $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.Vérifier que $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{-3}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$.

2) Soit $B = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Activité 3

1- Soit la matrice A = $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $A^2 = I_2$.

b) A est-elle inversible ? si oui déterminer son inverse.

2- Soit la matrice B = $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Montre que $B^2 - 2B - I_2 = \mathbf{O}$.

b) En déduire que B est inversible et déterminer son inverse.

Théorème(admis)

Soit M une matrice carrée d'ordre 2 ou 3.
M est inversible si et seulement si, *dét* (M) $\neq 0$.

Activité 4

1- Soit la matrice A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer dét (A) et en déduire que A est inversible.

b) Vérifier que la matrice A' = $\frac{1}{dét(A)}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de A.

2- On donne la matrice B = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

En utilisant le même procédé qu'en 1) ,montrer que B est inversible et déterminer son inverse.

3- Soit M = $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

On suppose que dét (M) $\neq 0$, montrer que la matrice $M' = \frac{1}{dét(M)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de M.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 telle que dét (M) $\neq$ 0.

L'inverse de M est la matrice $M^{-1} = \dfrac{1}{dét(M)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

Activité 5

Soient $a \in IR$, $A = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Donner la condition sur a pour que A soit inversible.
2) Trouver les réels a pour lesquels la matrice B - $a\,I_3$ n'est pas inversible.

Activité 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

1- Vérifier que A est inversible.
2- Pour i et j des entiers variant de 1 à 3, on désigne par A_{ij} la matrice obtenue à partir de A en supprimant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne et par $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}$ dét(A_{ij}).
Par exemple :

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_{12}=(-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

3- Soit B=(Δ_{ij}), i=1,2,3 j=1,2,3.compléter : $B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & .. \\ .. & .. & .. \\ 9 & .. & 3 \end{pmatrix}$

4- a- Donner la matrice C obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de B.

b- Donner la matrice $D = \dfrac{1}{\det A} \times C$ .Vérifier que $A^{-1} = D$.

Les étapes de l'activité précédente constituent un algorithme permettant de calculer l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 3 à déterminant non nul.

Activité7

Déterminer les inverses des matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

IV- Résolution des systèmes linéaires de premier degré à deux ou trois inconnues

1) Revoir

Activité 1

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre dans IR^3 les systèmes suivants

$(S_1)\begin{cases} x+y+3z=10 \\ 2x-y+z=-3 \\ 3x+2y-5z=33 \end{cases}$ $(S_2)\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=1 \\ 2x+3y+z=4 \end{cases}$ $(S_3): x-y=y-z=z-x=1$

Activité 2

Résoudre dans IR^3 les systèmes suivants

a) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+2y+3=3y-z+4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y-z=-2 \\ x+2y+3z=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-2y=0 \\ x-y+5t=9 \end{cases}$

d) $x-2y+z=3x+z=2y-z+2$

Activité 3

Dans un magasin, on vend deux produits concurrents : un mélange de céréales courant et le même mélange en produit bio .Le produit bio est 40% plus cher, mais le magasin fait une réduction de 0,1DT pour l'achat d'un paquet.(des deux types de produits)

Le produit courant est proposé en paquet de 200g, alors que le produit bio est en paquet de 150g.On achète trois paquets de produit courant et deux paquets de produits bio pour un total de 2,7DT.

1) Calculer le prix de chaque paquet.

2) Calculer le prix au kilogramme en tenant compte de la réduction.

Activité 4

Résoudre dans IR^2 les systèmes suivants

$(S_1)\begin{cases} x+y=10 \\ 2x-y=-1 \\ 3x+2y=23 \end{cases}$ $(S_2)\begin{cases} x+3y=15 \\ 2x-y=-3 \\ 3x+2y=33 \end{cases}$ $(S_3)\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-6y=2 \\ 3x-9y=3 \end{cases}$

2) Résolution d'un système en utilisant l'inverse d'une matrice

Activité 1

Le système **(S)** $\begin{cases} -5x+3y=2 \\ -x+y=5 \end{cases}$ peut être représenté sous la forme $A \times X = B$ avec

$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

- A est dite **la matrice du système**.
- l'égalité A×X=B est dite **l'écriture matricielle** du système.
- La matrice colonne B est dite **la matrice des constantes.**

1- Donner l'écriture matricielle de chacun des deux systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2,23x-5,5y=12 \\ 0,2x+y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y+2z=7 \\ 5x+y-z=8 \\ -x+3y+7z=-22 \end{cases}$

Lorsque A est une matrice carrée le système est dit **système carré.**

Activité 2

Une petite entreprise artisanale s'est spécialisée dans la fabrication de deux jeux en bois : des toupies et des bilboquets.
La fabrication, à l'aide d'un tour à bois, demande 2 minutes pour une toupie et 7 minutes pour un bilboquet. La vente d'une toupie rapporte un bénéfice de 0,5 DT et celle d'un bilboquet 2DT. Cette entreprise désire obtenir un bénéfice de 80 DT en utilisant le tour à bois durant 5h.
On désigne par x : le nombre des toupies et y bilboquets à fabriquer.

1- Montrer que le couple (x, y) vérifie le système (S)$\begin{cases} 2x+7y=300 \\ \frac{1}{2}x+2y=80 \end{cases}$

2- Résoudre le système (S) et écrire la solution sous la forme d'une matrice colonne qu'on note C.

3- a) Déterminer la matrice A du système (S) et la matrice B des constantes.
b) En déduire l'écriture matricielle de ce système.

4- Déterminer A^{-1} puis $A^{-1} \times B$.

5- Comparer $A^{-1} \times B$ et C.

Activité 3

En Janvier 2007, Ahmed achète des actions de trois sociétés : X(5 DT l'action), Y(4 DT l'action) et Z(10 DT l'action).
Au total il achète 10 actions pour un montant de 63 DT. En juillet 2007, par rapport à janvier 2007, l'action X a doublé, l'action Y a augmenté de 25% et l'action Z a chuté de 40%. Le portefeuille d'année vaut alors en juillet 78 DT.
On désigne par x, y et z les nombres d'actions d'Ahmed respectivement des sociétés X, Y

et Z.

1- Montrer que le triplet (x, y,z) vérifie le système:

$$S\begin{cases} x+y+z=10 \\ 5x+4y+10z=63 \\ 10x+5y+6z=78 \end{cases}$$

2- Résoudre le système (S) et écrire la solution sous la forme d'une matrice colonne qu'on note C.

3- a) Déterminer la matrice A du système (S) et la matrice B des constantes.
b) En déduire l'écriture matricielle de ce système.

4- Vérifier que $A^{-1}=\frac{1}{29}\times\begin{pmatrix} -26 & -1 & 6 \\ 70 & -4 & -5 \\ -15 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ puis calculer $A^{-1}\times B$.

5- Comparer $A^{-1}\times B$ et C.

Théorème

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 ou 3 telle que $dét(A)\neq 0$.
tout système, d'écriture matricielle : $A\times X=B$, a une solution et une seule et l'on a $X=A^{-1}\times B$, où A^{-1} est l'inverse de A.

Remarque

Si A est une matrice carrée non inversible alors le système $A\times X=B$ n'a pas de solution ou a une infinité de solutions

Activité 4

Pour chacun des deux systèmes suivants

a) Donner l'écriture matricielle du système.
b) Déterminer l'inverse de la matrice du système.
c) En déduire la solution de chacun des systèmes

$$\begin{cases} 3x-10y=4 \\ -2x+8y=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sqrt{3}x-2y=-1 \\ 4x-\sqrt{3}y=4 \end{cases}$$

Activité 5

Soit la matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que $M^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2) Résoudre alors les deux systèmes (S) et (S') suivants :

$$(S)\begin{cases} x-y=10 \\ 2x+y+z=2 \\ -x+z=3 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S')\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+y+z=-1 \\ -x+z=3 \end{cases}$$

Activité 6

Considérons le système $(S)\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y-z=10 \\ 3x+2y-z=3 \end{cases}$

1) Montrer que le système (S) est équivalent au système $(S')\begin{cases} z=3-x-y \\ 3x+2y=13 \\ 4x+3y=11 \end{cases}$.

2) Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Donner la matrice inverse A^{-1}, puis résoudre le système $(S'')\begin{cases} 3x+2y=13 \\ 4x+3y=11 \end{cases}$.

b) En déduire la solution du système (S).

Activité 7

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

1) donner la matrice inverse A^{-1} (mettre les coefficients sous forme fractionnaire)

2) En déduire la solution du système (S) $\begin{cases} 3x-10y-z=4 \\ -2x+8y+2z=7 \\ 2x-4y-2z=5 \end{cases}$

Activité 8

Une entreprise de confection de vêtements fabrique des jupes, des robes et pantalons. Pour fabriquer une jupe, il faut 0,75 m de tissu, 4 boutons et une fermeture ; la confection d'une robe nécessite 1,50 m de tissu, 6 boutons et une fermeture ; pour confectionner un pantalon, on utilise 1,25 m de tissu, 2 boutons et une fermeture.
On appelle x, y et z les quantités respectives de jupes, de robes et de pantalons confectionnés et a, b et c les quantités de tissu (en mètres), de boutons et de fermetures utilisés pour leur fabrication.

On appelle $M=\begin{pmatrix} 0,75 & 1,50 & 1,25 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

1) a) Vérifier que $B = M \times A$.

b) Déterminer a, b et c pour la fabrication de 200 jupes, 120 robes et 320 pantalons.

2) On considère la matrice $M'=\begin{pmatrix} -1,6 & 0,1 & 1,8 \\ 0,8 & 0,2 & -1,4 \\ 0,8 & -0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $M' \times M$.

b) Ecrire la matrice A en fonction de B et de M'.

c) En déduire x, y et z quand on a utilisé 735 mètres de tissu, 2400 boutons et 620 fermetures.

Activité 1

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On se propose de calculer le produit A×B à l'aide d'Excel :

1) Dans les cellules de A_1 à C_3, entrer les coefficients de la matrice À et dans les cellules de E_1 à F_3, entrer les coefficients de B.

2) AB étant une matrice d'ordre 3×2, sélectionner donc sa place, à titre d'exemple les cellules de B6 à C8.

3) Dans la barre des formules écrire la formule ci-contre : fx {=PRODUITMAT(A1:C3;E1:F3)}

Valider en appuyant en même temps sur les touches de clavier ci-dessous :

Ctrl ⇧ **Entrée**

Des accolades apparaissent alors autour de la formule.

➢ La matrice obtenue est A×B.

	A	B	C	D	E	F	G
1	2	3	0		2	9	
2	5	1	-1		-7	4	
3	-1	-3	7		1	0	
4							
5							
6		-17	30				
7		2	49				
8		26	-21				
9							

Activité 2

On donne les matrices $A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $A' \times B' = \begin{pmatrix} -6 & 31 & 44 \\ 5 & \frac{19}{2} & -1 \\ 11 & 4 & -12 \end{pmatrix}$.

Activité 3

On donne la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Il est facile de vérifier que C est inversible on se propose de déterminer A^{-1} à l'aide d'Excel.

1) Dans les cellules de A_1 à C_3, entrer les coefficients de la matrice C.

2) Sélectionner la place de C^{-1}, à titre d'exemple les cellules de E_1 à G_3.
3) Dans la barre des formules écrire la formule ci-contre : fx {=INVERSEMAT(A1:C3)}

Valider en appuyant en même temps sur les touches de clavier ci-dessous :

Ctrl **⇧** **Entrée**

4) Aller dans la barre de menu et choisir Format puis aller à l'onglet : Format de cellule

5) Choisir le mot fraction (de deux ou de trois chiffres selon la valeur de dét (A)).

➤ La matrice obtenue est A^{-1}.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	2	3		2/5	-1	4/5	
2	1	0	2		3/5	-1	1/5	
3	2	-1	1		- 1/5	1	- 2/5	
4								

Activité 4

On donne la matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vérifier que la matrice D est inversible et que $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{-26}{73} & \frac{7}{24} \\ \frac{-2}{63} & \frac{19}{71} & \frac{-5}{36} \\ \frac{5}{91} & \frac{-23}{97} & \frac{4}{29} \end{pmatrix}$.

1- Une seule des réponses proposées est exacte :

	a	*b*	*C*
Q1. Soit A= $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .L'ordre de A est :	2×3	3×2	3×3
Q2. Pour la matrice A ci-dessus ,a_{21} est égale à :	5	-2	1
Q3. On donne A= $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et B= $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ A+B est égale à :	$\begin{pmatrix} 5 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 0 & -3 \end{pmatrix}$
Q4 .On donne les matrices A= $\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 9 \\ -7 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 0 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -7 & 12 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$. Donc C est égale à :	2A+B	A+2B	A-2B
Q5. A= $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 9 \\ -7 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et C = A×B. Donc c_{11} est égale à:	$-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}+27$	$-2\sqrt{2}-23$
Q7. Soit A= $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$; $a\in\mathbb{R}$.	Pour tout réel a. A est inversible	A est inversible si et seulement si $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.	Pour tout réel a on a : A est non inversible
Q8. Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	A est non inversible	$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$	$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-5}{29} & \frac{8}{29} & \frac{1}{29} \\ \frac{13}{29} & -\frac{16}{87} & \frac{-2}{87} \\ \frac{-12}{29} & \frac{17}{87} & \frac{13}{87} \end{pmatrix}$

2- Soit $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \sqrt{3} \\ -2 & -1 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

1) Donner l'ordre de A.
2) Préciser les valeurs des coefficients a_{31}, a_{22} et a_{32} de la matrice A.

3- Dans une menuiserie on utilise des matières première M_1, M_2 et M_3 pour fabriquer trois types de chaises C_1, C_2 et C_3
Le coefficient a_{ij} de la matrice A ci-dessous représente le coût HT en DT, de matière première M_i nécessaire pour une chaise C_j.

$$A = \begin{pmatrix} 23 & 20 & 18 \\ 20 & 17 & 15 \\ 19 & 18 & 14 \end{pmatrix}$$

1) Donner le coût en matière première M_3 d'une chaise de type C_2 ? en matière première M_2 d'une chaise de type C_3 ?
2) Que représente le coefficient inscrit à l'intersection de la troisième ligne et de la première colonne de A?

4- Calculer, si c'est possible, les sommes suivantes. Lorsque c'est impossible, expliquer pourquoi ?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0,1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0,3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0,8 & -1 \\ -0,1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0,4 \\ 2 & 0,6 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 0,3 & 10 \\ -0,1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0,4 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 0,3 & 10 & 1 \\ -0,1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0,4 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

5- Soit I_3 la matrice unité d'ordre 3. Calculer : $A - I_3$; $A - 2I_3$ et $A - \frac{2}{3} I_3$ dans chacun des cas suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 15 & 10 & 0 \\ 1 & 11 & 3 \end{pmatrix}$

6- Calculer A-B; (A-B)-C ; A-(B-C) .

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7- Dans chacun des cas suivant calculer 3A, $\frac{2}{3}B$ et $3A - \frac{2}{3}B$.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{9}{4} \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{3}}{2} & 15 \\ \frac{1}{3} & 3 & 0 \end{pmatrix}$

8- On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2x \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A + xA + x^2A + x^3A$ avec x un réel différent de 1.

a) Vérifier que $B = \dfrac{x^4-1}{x-1}A$.
b) Calculer B pour x = 2.
c) Trouver la valeur de x pour la quelle $B = I_3$.

9- Un gestionnaire de distributeurs automatiques de boissons a noté l'état des stocks en début de journée dans 3 distributeurs $\mathbf{d_1}$, $\mathbf{d_2}$ et $\mathbf{d_3}$ pour les boissons de type $\mathbf{b_1}$, les boissons de type $\mathbf{b_2}$ et les boissons de type $\mathbf{b_3}$.
Le coefficient a_{ij} de la matrice A ci-dessous représente le nombre des boissons de type $\mathbf{b_j}$ dans le distributeur $\mathbf{d_i}$: $A = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 15 & 10 & 8 \\ 18 & 11 & 7 \end{pmatrix}$

Les entrées des stocks de la journée et l'état des stocks en fin de journée sont données respectivement par les matrices B et C ci-dessous :

$$B = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 10 \\ 12 & 12 & 10 \\ 12 & 12 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 23 & 19 & 15 \\ 20 & 12 & 12 \\ 22 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

1) Donner la matrice des ventes de la journée
2) Quelle est la vente la plus importante ?

10- Une usine fabrique trois types de bicyclettes dans deux ateliers .le tableau ci-dessous donne le nombre de chaque type produit dans chacun des ateliers A et B au mois d'Avril.

	type 1	type 2	type 3
Atelier A	150	120	100
Atelier B	180	90	130

1- Ecrire une matrice A d'ordre 2×3 représentant les informations fournies par le tableau ci-dessus.
2- Le constructeur a augmenté la production de l'usine 20% au mois de Mai par rapport à celle d'Avril .Donner une matrice M représentant la production de l'usine au mois de Mai.
3- Que représente la matrice A+M ?
4- Reprendre la deuxième et la troisième question en supposant que la production de l'usine diminue 10% au moi de Mai par rapport à celle d'Avril.

11-Calculer A×B dans chacun des cas suivant :

a) A= (-1   3) et $B=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ b) $A=\left(\frac{5}{3}\quad 1\quad 5\right)$ et $B=\begin{pmatrix}2\\-3\\\frac{-2}{3}\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}-3&0\\5&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.

d) $A=\begin{pmatrix}1&-4\\\sqrt{2}&0\\1&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&9\end{pmatrix}$ e) $A=\begin{pmatrix}-2&\frac{1}{3}&-5\\0&0&-1\\2&1&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-2&1&1\\3&2&-2\\-1&1&3\end{pmatrix}$.

12- Youssef étudie les prix des pains au chocolat et des croissants dans trois boulangeries. Il constate que les prix des pains au chocolat sont supérieurs ou égaux à ceux des croissants. Les prix en DT, sont donnés par la matrice :

$A=\begin{pmatrix}0,85&0,78&0,85\\0,8&0,78&0,83\end{pmatrix}$ .Il achète x pains au chocolat et y croissants de l'une des trois boulangeries. On note $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ la matrice des quantités achetées.

1) A l'aide d'un calcul matriciel, déterminer en fonction de x et y la dépense de Youssef dans chacune des boulangeries.

2) Youssef doit acheter 2 pains et 1 croissant de l'une des trois boulangeries. Comparer les prix payés par Youssef suivant la boulangerie qu'il choisit.

13- Les résultats à un examen de trois élèves 1,2 et 3 sont donnés par la matrice A, où la i^{ème} ligne donne les notes sur 20 de l'élève i en Economie, maths, et gestion

La matrice B donne trois simulations possibles des trois coefficients de ces matières.

$$A=\begin{pmatrix}11&10&9\\10&11&7\\8&16&5\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B=\begin{pmatrix}7&5&4\\4&4&7\\4&5&4\end{pmatrix}$$

1) Effectuer le produit $A \times B$.

2) Pour chacun des trois élèves quel choix de coefficients qui lui conviendra le mieux ?

14-Un catalogue de vente par correspondance propose des lots de linge de maison.
La parure « enfants » contient une taie, un drap housse et une housse de couette.
La parure « toucher soyeux » contient deux taies, un drap housse et une housse de couette.
La parure « prix minis » contient deux taies, deux draps housse et une housse de couette.

1) Présenter toutes ces données dans une matrice.
2) a- On note x, y et z le nombre de parures de chaque sorte, vendues par jour. Exprimer les nombres de taies, de draps et de housses de couette vendus à l'aide de x, y et z

   b- Le prix d'une parure « enfants » est 70DT celui d'une parure « toucher soyeux » est 99 DT et celui d'une parure « prix minis » est 42 DT.

Traduire ces informations par une matrice colonne.

c- La recette totale de la journée pour ces trois lots est 4869DT Traduire ce résultat par une relation entre x, y et z.

15- Le nombre d'entrées, la même semaine, dans trois cinémas $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$ et $\mathbf{C_3}$ qui présentent les mêmes films: $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ et $\mathbf{F_3}$ est donné par la matrice A ci-dessous. Le coefficient a_{ij} de la matrice A représente le nombre des entrées au film $\mathbf{F_j}$ dans le cinéma $\mathbf{C_i}$.

$$A = \begin{pmatrix} 120 & 250 & 110 \\ 280 & 300 & 100 \\ 350 & 240 & 160 \end{pmatrix}$$

1) a- Quel est l'ordre de cette matrice A ?

b- Donner les valeurs des coefficients a_{13} et a_{32} de la matrice A.

c- Quel est le nombre d'entrées pour le film $\mathbf{F_1}$ dans le cinéma $\mathbf{C_2}$?

2) La semaine suivante, tous les cinémas ont vu une augmentation de 20% du nombre d'entrées pour chacun des films. Donner la matrice B des entées en deuxième semaine.

3)La troisième semaine, le nombre d'entées pour le film $\mathbf{F_3}$ a chuté de 60% par rapport à la première semaine, et celui pour film $\mathbf{F_2}$ a augmenté de 40% .Pour $\mathbf{F_1}$, le nombre d'entrées est resté celui de la deuxième semaine.

a) Donner la matrice C des entrées en troisième semaine.

b)Calculer la matrice du total des entrées sur les trois semaines.

c)Donner le nombre total d'entrées pour le film $\mathbf{F_3}$ dans le cinéma $\mathbf{C_2}$.

16- Calculer A^2 et A^3 dans chacun des cas suivants :

a) $A=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} 11 & 10 & 9 \\ 10 & 11 & 7 \\ 8 & 16 & 5 \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

17- Soient $T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que
$A = T + I$.

2) Calculer T^2 puis T^3 en déduire T^5 puis A^5.

18-Les matrices suivantes son-elles inversibles ?

$A=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{R})$; $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

19- Donner la matrice inverse, si elle existe, de chacune des matrices suivantes.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad C=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

20-Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Calculer A^3 puis en déduire A^{-1}.

21- Donner l'écriture matricielle de chacun des systèmes suivants.(la résolution n'est pas demandée).

a) $\begin{cases}3x-y+2z=7\\ 5x+y-z=8\\ -x+3y+7z=-22\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x-z=15\\ x+7z=12\\ x+y=25\end{cases}$ c) $\begin{cases}x+y+z=-5\\ -y+z=2\end{cases}$ d) $\begin{cases}3x+6y=x+z+31\\ 7y+2z=x-y+27.\end{cases}$

22- Un hôtel compte 160 chambres, certaines chambres à un lit et les autres à deux lits. Le prix d'une chambre à un lit est de 45 DT et celui d'une chambre à deux lits est de 60DT. En raison d'un tournoi de Golf, toutes les chambres sont occupées. Le total des ventes pour la nuit est de 8700DT. On désigne par x et y respectivement les nombres de chambres à un lit et à deux lits de l'hôtel.

1) Traduire les informations ci-dessus en un système de deux équations à deux inconnues *x,* et y.
2) Combien de chambres à un lit et combien de chambres à deux lits l'hôtel compte-t-il ?

23- Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

1) Vérifier que A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}
2) En déduire la résolution des systèmes suivants : $\begin{cases}2x+3y=-1\\ -3x+y=2\end{cases}$
3) Résoudre à l'aide d'un calcul matriciel le système suivant : $\begin{cases}3x-y=0\\ 2x+4y=5\end{cases}$.

24-On considère la matrice : $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 puis $B=4A-A^2$ et le produit $A\times B$. En déduire A^{-1}.

2) Résoudre par un calcul matriciel, le système d'équations suivant : $\begin{cases}2x-y+3z=-1\\ -3x+y-z=5\\ x+y+z=-1\end{cases}$

25- On donne $A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

1) Donner la matrice inverse A^{-1}(coefficients sous forme fractionnaire).

2) En déduire la résolution du système suivant : $\begin{cases} 3x+10y+z=10 \\ 2x+8y+2z=7 \\ 2x-4y-2z=8 \end{cases}$

26-Déterminer les réels a, b et c tels que la courbe d'équation $y = ax^3+bx^2+cx+2$, passe par les points A(5,62) ; B(-1,-4) et C(3,8).

27- Yassine, Khalil et Nabil veulent s'équiper en matériels informatiques soit dans le magasin $\mathbf{M_1}$, soit dans le magasin $\mathbf{M_2}$.
Leurs besoins et les prix unitaires HT en DT, sont donnés ci-dessous.

	Yassine	Khalil	Nabil
Disquette	10	20	15
CD	15	5	10
DVD	3	5	10

	Prix de $\mathbf{M_1}$	Prix de $\mathbf{M_2}$
Disquette	0,50	0,55
CD	0,75	0,72
DVD	15,24	13,72

Pour chaque question, on nommera par une lettre chaque matrice intervenant, en précisant ce qu'elle représente.

1) a- Donner la matrice représentant les dépenses HT respectives de Yassine, Khalil et Nabil, suivant qu'ils achètent à $\mathbf{M_1}$ ou à $\mathbf{M_2}$.

b- Sur les vitrines de chaque magasin, on affiche 30% de remise sur tous les produits. La TVA sur ces produits étant de 19,6 % déterminer la matrice des dépenses TTC respectives de Yassine, Khalil et Nabil suivant qu'ils achètent à $\mathbf{M_1}$ ou à $\mathbf{M_2}$..

2) Finalement Yassine, Khalil et Nabil, se sont équipés dans un autre magasin nommé $\mathbf{M_3}$ et ont dépensé respectivement 52,5DT ; 75DT et 138,75DT

a- Etablir le système à résoudre pour trouver le prix unitaire TTC de chaque type d'articles.

b- Résoudre le système en utilisant les matrices et conclure.

c- En déduire la matrice colonne donnant les prix unitaires HT de chaque article chez $\mathbf{M_3}$ et conclure.

28- I) On donne $A = \begin{pmatrix} 17 & 14 & 16 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que A est inversible.
2) Déterminer la matrice inverse de A.

II) Le service informatique de gestion d'une entreprise occupe un grand bureau au troisième étage. Sa masse salariale est de 13 800DT par mois et ce service utilise 9 ordinateurs pour la gestion totale.
On restructure ce service en trois bureaux $\mathbf{b_1}$,$\mathbf{b_2}$ et $\mathbf{b_3}$ de x, y et z personnes respectivement.
Chaque personne du bureau $\mathbf{b_1}$reçoit en moyenne 1700DT par mois, travaille avec un ordinateur et s'occupe de 10% de la gestion totale.
Chaque personne du bureau $\mathbf{b_2}$ reçoit en moyenne 1400DT, travaille avec un ordinateur et s'occupe de 5% de la gestion totale.
Chaque personne du bureau $\mathbf{b_3}$ reçoit, en moyenne 1600 DT, travaille avec un ordinateur et s'occupe de 20% de la gestion totale

1) Traduire les informations ci-dessus en un système de trois équations à trois inconnues x, y et z.

2) Déterminer le nombre de personnes dans chaque bureau.

29-Une firme internationale utilise trois sous-traitants A, B et C pour la fabrication de calculettes qui lui fournissent par jour :
- A fournit : 100 boîtiers ; 40 claviers et 20 afficheurs.
- B fournit : 100 boîtiers et 400 afficheurs.
- C fournit: 30 boîtiers ; 80 claviers et 10 afficheurs.

Cette firme veut réaliser en toute urgence 1 000 calculettes. Elle a donc besoin de 1 000 boîtiers ,1000 claviers et 1000 afficheurs. On note x, y et z le nombre de jours nécessaires à la fabrication pour chaque sous-traitant

1) Traduire les informations ci-dessus en un système (S) de trois équations à trois inconnues x, y et z.
2) a) Donner l'écriture matricielle du système (S) .
   b) Résoudre alors le système (S) et en déduire le nombre de jours de fabrication de chaque sous-traitant.

SYSTEME DE CRAMER

Considérons le système d'équations (S)

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = k_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = k_2 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = k_3 \end{cases}$$

.

(S) s'écrit donc $AX = K$ avec

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ est la matrice des inconnues et $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$ est la matrice des constantes. (S) est dit **système de Cramer** lorsque A est inversible.

Nous noterons A_i (i =1, 2, 3) la matrice A dans laquelle on a remplacé la i-ème colonne par la matrice des constantes. Monsieur Cramer a prouver que lorsque A est inversible c'est à dire (S) est de Cramer alors ce dernier (le système(S)) admet une unique solution (x_1, x_2, x_3) tels que:

$$x_1 = \frac{dét(A_1)}{dét(A)} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_2 & a_3 \\ k_2 & b_2 & b_3 \\ k_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{dét(A_2)}{dét(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & a_3 \\ b_1 & k_2 & b_3 \\ c_1 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

et $$x_3 = \frac{dét(A_3)}{dét(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & k_1 \\ b_1 & b_2 & k_2 \\ c_1 & c_2 & k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Cette méthode de résolution est dite **méthode de Cramer.**

Gabriel Cramer (1704-1752)
Mathématicien suisse ; nous lui sommes redevables de la résolution complète des systèmes carrés par les déterminants

Chapitre 8

STATISTIQUES

Pour commencer
Cours

- Covariance
- Ajustement
  - Ajustement affine
  - Exemples d'ajustements non affines

Avec l'ordinateur
Exercices et problèmes
Math culture

Pour commencer

Activité 1

Le tableau ci-dessous donne la distribution des employés par âge (x) et par salaire (y) dans une entreprise :

		Age (x)				
		$[18,25[$	$[25,35[$	$[35,45[$	$[45,55[$	$[55,65[$
Salaire (y) en DT	$[300,400[$	25	2	18	15	10
	$[400,500[$	30	35	40	20	15
	$[500,600[$	26	34	40	25	20
	$[600,900[$	12	15	20	26	20
	$[900,1500[$	10	12	15	18	21

1- a) Déterminer la distribution des effectifs marginaux de x .

b) Peut on dire que les trois quarts des employés ont moins de 45 ans ?

c) Calculer $\overline{x}$ et σ_X .

2- a) Déterminer la distribution des effectifs marginaux de y.

b) Calculer $\overline{y}$ et σ_Y .

c) Peut on dire que les trois quarts des employés sont bien payés (salaire dépassant 600DT)?

Activité 2

Le tableau suivant donne l'évolution $x_i ; i = 1,2,...,12$ des revenues de l'exportation du phosphate (en millions de DT) et sa part en pourcentage $y_i ; i = 1,2,...,12$ des revenues totales des exportations tunisiennes de l'année 1998 à l'année 2004 . (source : INS 2004)

x_i	355.5	461.5	525.2	615	670	702	712.5	717	765	725	686	865
y_i	9.5	9.2	10.1	11.4	10.9	10.7	10.2	8.9	8.0	7.4	6.6	7.1

1- Placer dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ les points $M_i(x_i, y_i)$; $i = 1,2,...,12$.

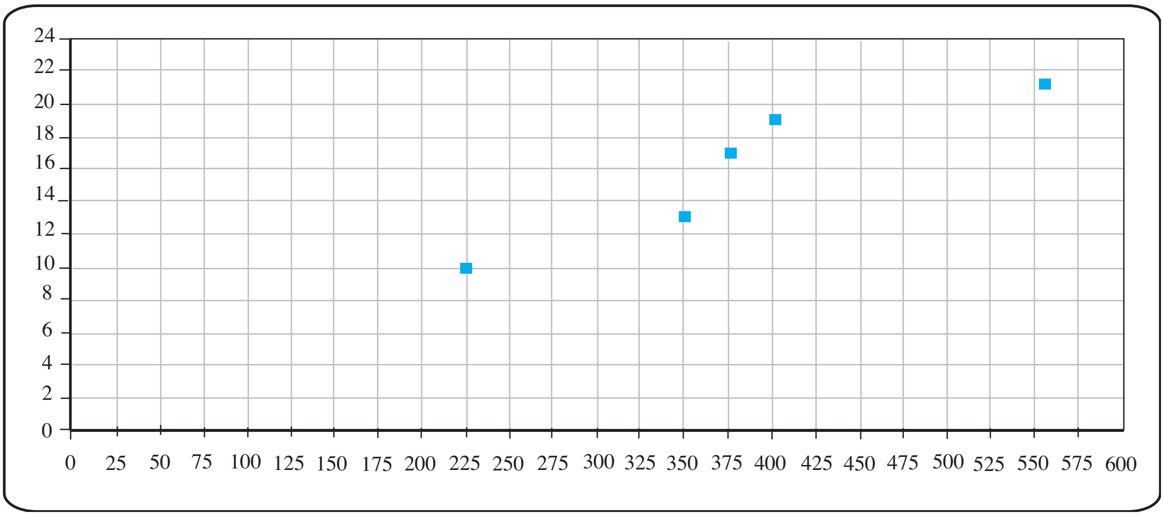
2- a) Calculer $\overline{x}$: la moyenne arithmétique de la série statistique à variable x_i et $\overline{y}$ la moyenne arithmétique de la série statistique à variable y_i .

b) Placer le point $G(\overline{x}, \overline{y})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3- Existe-t-il un lien entre les variations de x et les variations de y ?

Activité 3

Le nuage ci-dessous représente la série statistique double donnant les salaires en DT x_i , $i = 1,2,...,5$ proposés par quelques entreprises pour des emplois analogues et les nombres y_i ; $i = 1,2,...,5$ des candidats qui se présentent pour ses emplois.



1) Reconstruire le tableau statistique relatif à ce nuage.

2) Donner le salaire moyen offert par ces entreprises.

3) Préciser le point moyen du nuage.

Activité 4

On considère la série statistique à double caractères x et y donnée par le tableau ci-dessous. On désigne par y_i le centre de la classe C_i .

x \ y	[0,12[	[12,18[	[18,24[	[24,48[
-5	0	2	4	6
-4	0	2	1	3
0	4	0	0	1
1	6	3	5	0
2	3	0	0	0

1) Représenter le nuage des points $M_i(x_i, y_i)$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Déterminer le point moyen *G*.

Activité 5

Le tableau ci-dessous indique l'espérance de vie des femmes et des hommes en 1998 dans les 12 pays ayants le plus grand I.D.H (indicateur de développement humain).

x_i (femmes)	81,9	81,3	80,2	81,2	81,4	81	80,7	80,8	83	80	80,8	82,1
y_i (hommes)	76,2	75,4	73,5	75,6	76,9	76,4	74	75,1	76,9	74,7	73,2	74,4

1- Placer le nuage des points de cette série dans un repère orthogonal (on pourra effectuer un changement d'origine).

2- Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série. Combien de pays ont une espérance de vie pour les hommes et pour les femmes inférieure aux valeurs moyennes ?

3- N_1 désigne le nuage des points $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_6(x_6, y_6)$.

N_2 désigne le nuage des points restants.

a) Calculer les coordonnées de G_1 (respectivement G_2) le point moyen du nuage N_1 (respectivement du nuage N_2) .

b) Donner une équation cartésienne de la droite (G_1G_2).

c) Pourquoi la droite (G_1G_2) passe par G ?

I- Covariance

En deuxième et en troisième année on a vu que la variance permet une mesure de l'écart à la moyenne des valeurs de la variable d'une série statistique simple .On peut se demander : Existe-t-il un paramètre qui permet de mesurer la dispersion des points du nuage par rapport au point moyen dans le cas d'une série double ?

Activité 1

On considère les deux séries statistiques doubles suivantes :
La série A présente le taux global x (en %) de la population active en Tunisie et le taux y en (%) de la population masculine active.
La série B présente le taux global x' (en %) de la population active en Tunisie et le taux y' en (%) de la population féminine active.

SERIE A

	1966	1975	1984	1994	2004
taux global **x**	46	50	51	48	46
Taux masculin **y**	86	81	80	74	68

SERIE B

	1966	1975	1984	1994	2004
taux global **x'**	46	50	51	48	46
Taux féminin **y'**	6	19	22	33	24

1- Construire, dans deux repères différents, les nuages des points des deux séries A et B.

2- Placer les points moyens G_A de la série A et G_B de la série B.

3- Calculer le réel : $C_A = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont respectivement les moyennes arithmétiques des variables x et y. C_A s'appelle ***la covariance*** de x et y et on la note cov(x, y).

4- Calculer $\operatorname{cov}(x', y')$.

5- Quelle est la série dont les points sont plus dispersés par rapport à son point moyen?

Définition :

Soit (x_i, y_i) avec $i = 1, \ldots, n$ une série statistique double. On appelle covariance de x et y le nombre noté $\operatorname{cov}(x, y)$ et défini par:

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).$$

Activité 2

On reprend l'activité1 ci-dessus.

a) Comparer $\text{cov}(x, y)$ et le réel $\frac{1}{5}(\sum_{i=1}^{5} x_i y_i) - \overline{x}.\overline{y}$.

b) Comparer $cov(x', y')$ et le réel $\frac{1}{5}(\sum_{i=1}^{5} x'_i y'_i) - \overline{x'}\overline{y'}$.

c) Quelle conjecture peut on faire?

Activité 3

Soit (x_i, y_i) avec $i = 1,...,n$ une série statistique double .On se propose de montrer que:

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) - \overline{x}.\overline{y} \qquad \textbf{(I)}.$$

1) Montrer que $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{x}$ et $\sum_{i=1}^{n} y_i = n\overline{y}$.

2) Vérifier que $\sum_{i=1}^{n} \overline{x}y_i = \overline{x}\sum_{i=1}^{n} y_i$ et que $\sum_{i=1}^{n} \overline{x}.\overline{y} = n\overline{x}.\overline{y}$.

3) Développer le produit $(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ et déduire à l'aide des questions précédentes le résultat **(I)**.

Théorème

Soit (x_i, y_i) avec $i = 1,...,n$ une série statistique double:

- $\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) - \overline{x}.\overline{y}$.
- $\text{cov}(x, y) = \text{cov}(y, x)$.

Cette seconde expression de la covariance est plus commode pour les calculs "à la main".

Exemple : Soit (x_i, y_i) avec $i = 1,...,n$ une série statistique double.

Vérifier que :

a) $\text{cov}(x, y) = \text{cov}(y, x)$.

b) cov(x, x) = V(x)

Activité 4

Le tableau suivant indique l'évolution de 2000 à 2006 du prix moyen au kilogramme, en DT d'une sorte de poisson.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x	1	2	3	4	5	6	7
Prix y	1,2	1,7	1,8	2,6	2,7	3,2	3,3

1) Représenter le nuage des points $M_i(x_i, y_i)$ dans un repère orthogonal .Placer le point moyen $G(\overline{x}, \overline{y})$.

2) Calculer $\text{cov}(x, y)$.

Activité 5

On considère les deux séries statistiques doubles suivantes (x_i, y_i) et (x_i', y_i') $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

x	1	3	7	8	9
y	2	-2	4	7	10

x'	1	3	7	8	9
y'	3	10	18	25	30

1) Représenter, dans un même repère, les nuages des points des deux séries (x_i, y_i) et (x_i', y_i').

2) Placer les points moyens $G(\overline{x}, \overline{y})$ et $G'(\overline{x'}, \overline{y'})$.

3) Dire les quels des deux nuages est le moins dispersé autour de son point moyen?

4) Calculer puis comparer: $\text{cov}(x, y)$ et $\text{cov}(x', y')$.

5) Faire une conjecture.

Remarques:

1) La variance permet une mesure de l'écart à la moyenne des valeurs de la variable d'une série statistique simple.
2) La covariance permet une mesure de la dispersion des points du nuage par rapport au point moyen.

On admet les propriétés suivantes :

Propriétés :

Soit (x_i, y_i) avec $i = 1, \dots, n$ une série statistique double.
Pour tous réels α, β .
P_1 : $\text{cov}(x + \alpha, y + \beta) = \text{cov}(x, y)$.
P_2 : $\text{cov}(\alpha x, \beta y) = \alpha\beta\, \text{cov}(x, y)$.

Activité 6

Une entreprise achète une machine –outil 10000DT. Le tableau d'amortissement ci-dessous donne la valeur y (en DT) de cette machine après x années d'utilisation.

x	1	2	3	4	5
y	8500	7000	6000	5500	4500

1) On pose $x' = x$ et $y' = \dfrac{y-4000}{1000}$. Calculer $\mathrm{cov}(x', y')$.

2) En déduire la valeur de $\mathrm{cov}(x, y)$.

Activité 7 (Avec une calculatrice)

La quasi-totalité des calculatrices scientifiques contiennent des touches qui permettent de calculer aisément les différents paramètres statistiques que ce soit dans le cas des séries simples ou des séries doubles .Ainsi on épargne un calcul parfois pénible et une perte de temps inutile .Ce que nous vous proposons par la suite n'est pas un algorithme valable pour tous les modèles des calculatrices mais une stimulation pour chercher à utiliser la calculatrice.

On se propose de répondre à la deuxième question de **l'activité 4** en utilisant deux modèles de calculatrices.

Premier modèle :*la calculatrice contient les touche suivantes* 2ndF MODE 2 , DATA *et* RCL	*Deuxième modèle*:*la calculatrice contient les touches suivantes* MODE ÷, SHIFT , Scl *et* EXE
♦ **Etape préliminaire** (entrée *des données*) . 2ndF MODE 2 l'écran affiche 0 1 (x, y) 1,2 DATA l'écran affiche 1 2 (x, y) 1,7 DATA l'écran affiche 2 3 (x, y) 1,8 DATA l'écran affiche 3 4 (x, y) 2.6 DATA l'écran affiche 4 5 (x, y) 2.7 DATA l'écran affiche 5 6 (x, y) 3.2 DATA l'écran affiche 6 7 (x, y) 3.3 DATA l'écran affiche 7	♦ **Etape préliminaire** (entrée *des données*) MODE ÷ (et LR s'affiche) SHIFT Scl EXE(pour entrer en mode série statistique double) 1 SHIFT , 1,2 DT 2 SHIFT , 1,7 DT 3 SHIFT , 1,8 DT 4 SHIFT , 2,6 DT 5 SHIFT , 2,7 DT 6 SHIFT , 3,2 DT 7 SHIFT , 3,3 DT
❖ **Obtention des résultats** RCL $\overline{x}$ (pour obtenir $\overline{x}$) RCL $\overline{y}$ (pour obtenir $\overline{y}$) RCL $\sum xy$ (pour obtenir $\sum_{i=1}^{7} x_i y_i$) Vérifier que: $\mathrm{cov}(x, y) \approx 1.48$	❖ **Obtention des résultats** SHIFT $\overline{x}$ EXE (pour obtenir $\overline{x}$) SHIFT $\overline{y}$ EXE (pour obtenir $\overline{y}$) SHIFT $\sum xy$ EXE (pour obtenir $\sum_{i=1}^{7} x_i y_i$ Vérifier que: $\mathrm{cov}(x, y) \approx 1.48$

Activité 8

Le tableau ci-dessous représente les taux de croissance en pourcentage des exports et des imports en Tunisie de l'année 1995 à l'année 2004.

Export (x_i)	10.1	3.9	14.4	6.0	6.9	14.9	19.1	12.6	16.1	16.6
Import (y_i)	12.3	13.5	17.3	7.9	6.0	16.6	16.7	14.4	13.9	13.7

1) Calculer la moyenne arithmétique $\overline{x}$ de la série $(x_i)\ i=1,\ldots,10$ et la moyenne arithmétique $\overline{y}$ de la série $(y_i)\ i=1,\ldots,10$.

2) Calculer $\text{cov}(x,y)$ de la série statistique double (x_i, y_i). Interpréter le résultat trouvé.

Activité 9

Dans le tableau ci-dessous, on a consigné par classes les observations relatives aux salaires perçus (en DT) par les cadres d'une entreprise et l'ancienneté (en années) de ces mêmes cadres.

		Ancienneté (x)				
		$[0,2[$	$[2,4[$	$[4,6[$	$[6,10[$	$[10,15[$
Salaire (y) en DT	$[300,400[$	5	2	2	1	0
	$[400,500[$	3	5	3	4	2
	$[500,600[$	2	4	1	5	6
	$[600,900[$	0	0	1	1	2
	$[900,1500[$	0	0	0	0	2

1- Dans un repère orthogonal représenter le nuage des points associé à la série double (x_i, y_i) où x_i désigne le centre de la $i^{\text{ème}}$ classe d'ancienneté et y_i désigne le centre de la $i^{\text{ème}}$ classe de salaires .

2- a) Déterminer la distribution des effectifs marginaux de x .

b) Calculer $\overline{x}$ et. σ_X .

3- a) Déterminer la distribution des effectifs marginaux de y.

b) Calculer $\overline{y}$ et σ_Y .

4- Calculer $\text{cov}(x,y)$.

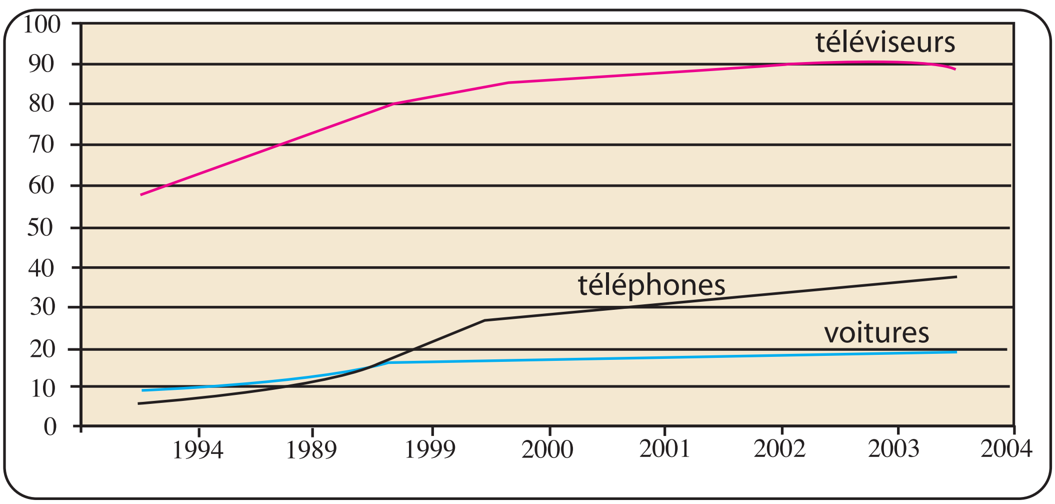
II – Ajustement

1) Introduction

L'analyse d'un nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ représentant une série statistique double (x_i, y_i) peut conduire à la recherche d'une liaison entre les deux variables x et y. Cette liaison aide, entre autre, à faire des prévisions et à répondre à des questions parfois décisives. Une question s'impose alors: peut-on trouver une formule mathématique qui exprime le lien entre les deux variables ?
*La réponse à cette question conduit à étudier le type de relation entre les deux variables (affine, parabolique, ...) on parle **d'ajustement.***

Activité 1

Les courbes ci-dessous donnent les taux (en %) d'équipement des ménages tunisiens en quelques biens (Voitures – Téléviseurs - Téléphones) de l'année 1989 à l'année 2005.

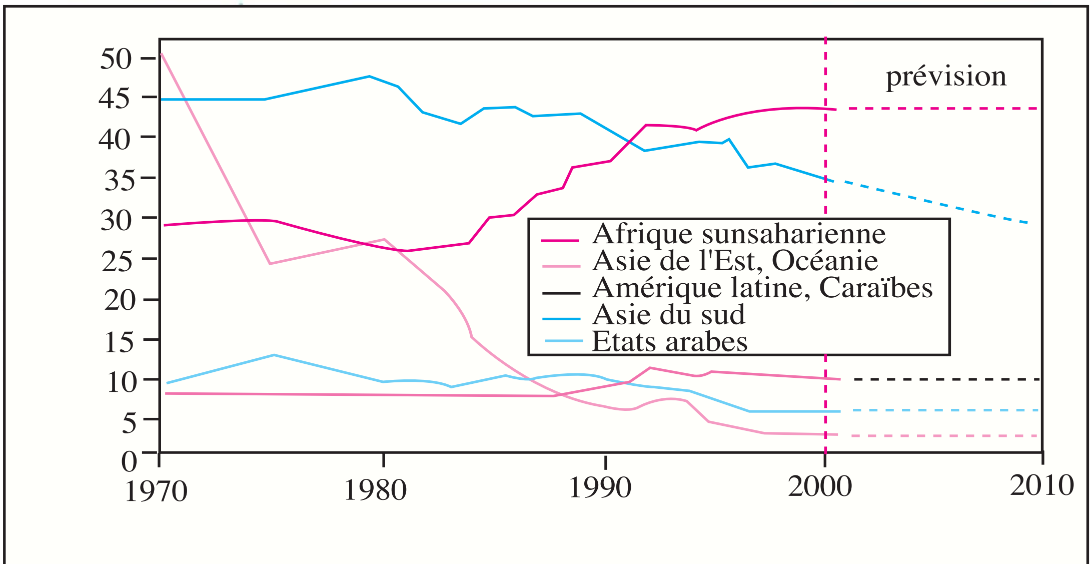


1) Pour chaque bien, en quelle année le taux d'équipement était-il ou serait-il de l'ordre de 60 %.

3) Quel bien ne semble pas atteindre ce taux ?

Activité 2

A partir des chiffres connus de l'année 1970 à l'année 2000 le graphique ci-dessous permet à l'UNESCO de faire des prévisions pour les dix ans à venir.



Nombre d'enfants d'âge scolaire non scolarisés dans le monde (en millions).

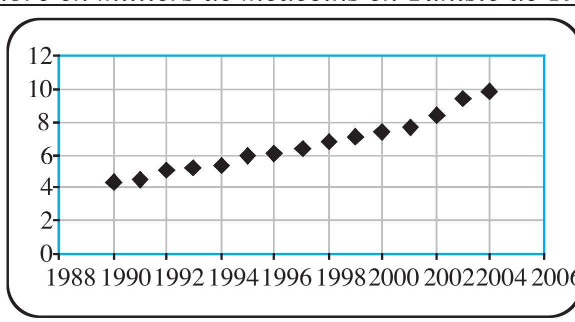
1) Donner les prévisions du nombre d'enfants non scolarisés dans les états arabes et dans l'Afrique subsaharienne en 2010.
2) Quelle est la région du monde où l'effort de scolarisation a été le plus important ?
3) En quelles régions du monde l'UNESCO doit faire plus d'efforts ?

2) Ajustement affine

Activité 1

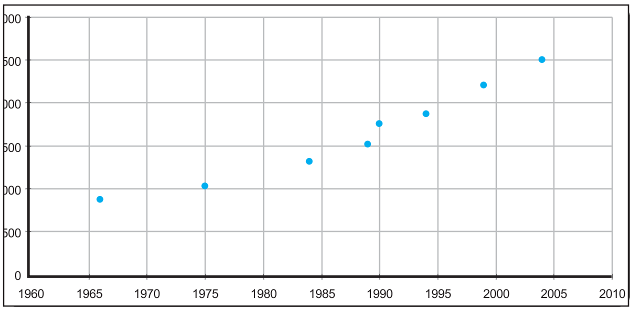
On considère les trois nuages de points :

Nuage 1 (Nombre en milliers de médecins en Tunisie de 1990 à 2004)



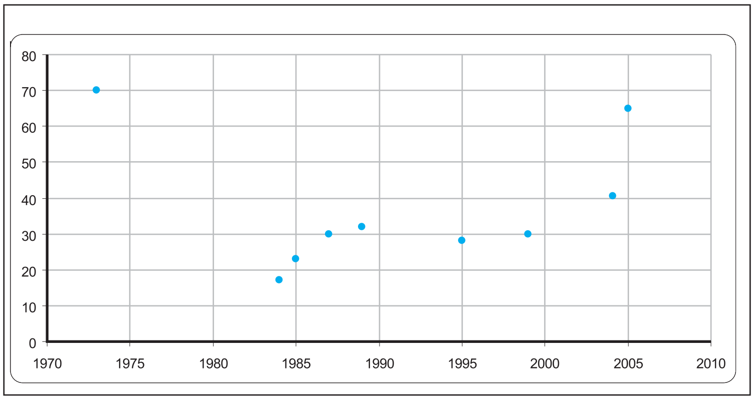
(Source INS 2004)

Nuage 2 (Nombre en milliers de parcs logements en Tunisie)



(Source INS 2004)

Nuage 3 (Prix moyen en dollars du baril de pétrole de 1973 à 2005)



(Source OMC 2004)

Quel est le nuage qui semble avoir une forme allongée? Dans ce cas, tracer une droite qui passe aussi près que possible des points de ce nuage ? (On dit alors que **l'on ajuste** ce nuage par une droite).

Méthode des moindres carrés :

Activité 1

Voici les notes obtenues en économie par cinq élèves d'une même classe au baccalauréat et lors d'un concours d'accès à un institut supérieur.

Note x_i au baccalauréat	7	10	11	13	16
Note y_i au concours	8	9	12	12	13

1- Dans un repère orthogonal représenter le nuage des points associé à cette série double.

2- Ces points sont-ils alignés ?

3- a) Sur le graphique précédent, tracer la droite qui passe par les points $A_1(7;8)$ et $A_4(13;12)$.

b) Vérifier que la droite (A_1A_4) admet pour équation : $y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$.

4- a) Calculer la moyenne $\overline{x}$ des notes obtenues par ces élèves au baccalauréat, puis la moyenne $\overline{y}$ des notes obtenues au concours.

b) Placer le point moyen G .

c) Vérifier que (A_1G) admet pour équation : $y = \frac{7}{11}x + \frac{39}{11}$.

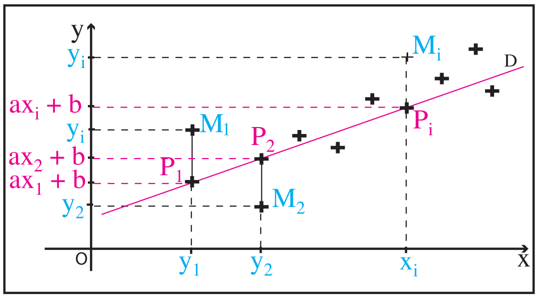
5- Comparer $S_1 = \sum_{i=1}^{5}(y_i - \frac{2}{3}x_i - \frac{10}{3})^2$ et $S_2 = \sum_{i=1}^{5}(y_i - \frac{7}{11}x_i - \frac{39}{11})^2$.

6- Soit d la droite d'équation $y = \frac{66}{113}x + \frac{468}{113}$.

a) Calculer $S_3 = \sum_{i=1}^{5}(y_i - \frac{66}{113}x_i - \frac{468}{113})^2$. Comparer S_1 ; S_2 et S_3.

b) Vérifier que la droite d passe par G et que le coefficient directeur de d est égal à $\frac{\text{cov}(x,y)}{V(x)}$.

Principe de la méthode des moindres carrés



Etant donnée une série statistique double (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., n$ ou' (x_i) est une série non constante et telle que le nuage des points $M_i(x_i, y_i)$ soit relativement allongé.

On cherche une droite D d'équation réduite $y = ax + b$ qui passe le plus près possible des points du nuage. Pour cela:

- On calcule, pour tout, $i = 1, 2, ..., n$ la distance M_iP_i entre le point M_i du nuage et le point P_i de la droite D ayant la même abscisse que M_i .

- On cherche les réels a et b pour lesquels la somme $S = M_1P_1^2 + M_2P_2^2 + ... + M_nP_n^2$ des carrés de ces distances est minimale.

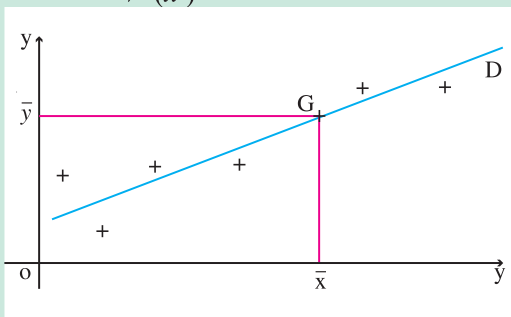
La somme $S = M_1P_1^2 + M_2P_2^2 + ... + M_nP_n^2$ est appelée somme des carrées des résidus.

On admet qu'une telle droite existe et qu'elle est unique. On l'appelle droite de régression de y en x

Pourquoi droite de régression? (Voir maths culture).

Théorème : (admis)

La droite de régression de y en x dans un repère orthogonal associée à la série statistique double (x_i, y_i) est la droite qui passe par le point moyen $G(\overline{x}, \overline{y})$ et de coefficient directeur le réel $a = \dfrac{\text{cov}(x, y)}{V(x)}$.



Remarques:

1) L'équation réduite de la droite de régression de y en x est : $y = a(x - \overline{x}) + \overline{y}$ avec $a = \dfrac{\text{cov}(x, y)}{V(x)}$.

2) L'équation réduite de la droite de régression de x en y est : $x - \overline{x} = a'(y - \overline{y})$ avec $a' = \dfrac{\text{cov}(x, y)}{V(y)}$.

Activité 2

Le tableau ci-dessous représente l'évolution de la population active (en millier) en Tunisie depuis 1966.

Année x_i	1966	1975	1984	1989	1994	1997	1999	2000	2001	2002	2003
Population y_i	1093.5	1621.8	2137.3	2360.6	2772.4	2978.3	3143.9	3215.7	3292.7	3375.7	3460.5

1- Déterminer le point moyen G de la série (x_i, y_i).

2- Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage des points associé à cette série double.
L'ajustement affine est-il plausible?

3- a) Donner une équation de la droite de régression y en x .
b) Trouver le nombre de la population active vers l'an 2010.

4- a) Donner une équation de la droite de régression de x en y .
b) Vers quelle année la population active dépasse t-elle le nombre 5000000?

Coefficient de corrélation linéaire :

Activité 1

1) Pour les activités 1 et 2 précédentes, calculer le réel $r(x,y)=\dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}$.

2) Dans chacun des cas comparer $|r(x,y)|$ à 0.95.

Définition :

On appelle coefficient de corrélation linéaire des variables x et y le réel $r(x,y)=\dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}$.

Remarques :

✓ La décision d'ajuster un nuage par une droite se prend jusqu'à présent à la seule vue du nuage de points, selon que sa forme est allongée ou non.

✓ On s'accorde à dire, pour des raisons qui dépassent le cadre du programme, que :

-Si $|r(x,y)|\in[0;0,70]$ alors la corrélation entre x et y est faible.

-Si $|r(x,y)|\in\,]0,70;0,95]$ alors la corrélation entre x et y est forte.

-Si $|r(x,y)|\in\,]0,95;1]$ alors la corrélation entre x et y est très forte.

✓ **On démontre et nous admettons les propriétés suivantes :**

- $-1\le r(x,y)\le 1$.
- Si $|r(x,y)|=1$ alors il y'a une dépendance totale entre x et y , l'une est une fonction affine de l'autre.

Activité 2

En reprenant les données de l'activité 4 de la **partie I** .

1- Calculer le coefficient de corrélation entre x et y. L'ajustement affine est-il plausible ?

2- a) Par la méthode des moindres carrés donner une équation de la droite de régression de y en x.

b) Estimer le prix au kg de cette sorte de poisson en 2010.

Activité 3 **(avec une calculatrice)**

On reprend les données de **l'activité 4 de la partie I** et on se propose de calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y et de déterminer l'équation de la droite d de régression de y en x avec les mêmes modèles de calculatrices utilisées dans **la partie I.**

<table>
<tr><th>Premier modèle</th><th>Deuxième modèle</th></tr>
<tr><td>
♦ Etape préliminaire (entrée des données)

2ndF MODE 2 l'écran affiche 0.
1 (x, y) 1,2 DATA l'écran affiche 1.
2 (x, y) 1,7 DATA l'écran affiche 2.
3 (x, y) 1,8 DATA l'écran affiche 3.
4 (x, y) 2.6 DATA l'écran affiche 4.
5 (x, y) 2.7 DATA l'écran affiche 5.
6 (x, y) 3.2 DATA l'écran affiche 6.
7 (x, y) 3.3 DATA l'écran affiche 7.

♦ Obtention des résultats

RCL r (pour obtenir le coefficient de corrélation entre x et y)
RCL b (pour obtenir le coefficient directeur de d)
RCL a (l'équation de d est $y = bx + a$)
</td><td>
♦ Etape préliminaire (entrée des données)

1 SHIFT , 1,2 DT
2 SHIFT , 1,7 DT
3 SHIFT , 1,8 DT
4 SHIFT , 2,6DT
5 SHIFT , 2,7 DT
6 SHIFT , 3,2 DT
7 SHIFT , 3,3DT

♦ Obtention des résultats

SHIFT r EXE (pour obtenir le coefficient de corrélation entre x et y).

SHIFT B EXE (pour obtenir le coefficient directeur de d).

SHIFT A EXE (l'équation de d est $y = Bx + A$).
</td></tr>
</table>

Activité 4

Les relevés de l'intensité du travail fourni (x_i) exprimée en kilojoules par minute et la fréquence cardiaque (y_i) (nombre de battements par minute) de huit personnes sont consignés dans le tableau suivant :

x_i	9.6	12.8	18.4	31.2	36.8	47.2	49.6	56.8
y_i	70	86	90	104	120	128	144	154

1- Représenter le nuage des points $M_i(x_i, y_i)$.

2- Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de chacune des séries à une variable x et y .

3- Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les variables x et y .Interpréter le résultat trouvé.

4- Par la méthode des moindres carrés donner une équation de la droite d de régression de y en x puis une équation de la droite d' de x en y . Tracer ces deux droites dans un même repère.

5- a) Prévoir le nombre par minute correspondant à un travail de 40 kilojoules.

b) Prévoir l'intensité du travail correspondant à 100 battements par minute.

Méthode de Mayer

Activité 1

Le tableau ci-dessous donne le relevé des valeurs d'une action en DT sur 15 jours consécutifs d'une bourse.

jour x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Valeur y_i	18.8	18.9	18.9	19.5	19.2	19	19.2	19.6	19.5	19.7	19.2	19.7	19.8	20	20.5

On note N_1 le nuage de points associé la série $(x_i, y_i); i = 1, 2, ..., 8$ et N_2 le nuage des points restants.

a) Déterminer le point moyen G_1 de la première série.

b) Déterminer le point moyen G_2 de la deuxième série.

c) Déterminer l'équation de la droite (G_1G_2).

d) La droite (G_1G_2) passe t – elle par le point moyen de la série totale?

Le principe de l'ajustement par la méthode de Mayer consiste à partager le nuage associé à une série (x_i, y_i) en deux nuages dont le nombre de points diffère d'au plus un .On désigne par G_1 et G_2 les points moyens respectifs du premier et du deuxième nuage.
La droite (G_1G_2) est appelée droite de Mayer.

Activité 2

Année x_i	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Population Urbaine (%) y_i	59.6	59.8	60.5	60.8	61.0	61.3	61.6	61.9	62.2	62.4	62.6	63.2	63.4	63.6	64.9

(Source INS 2004)

1- a) Représenter le nuage des points $M_i(x_i, y_i)$.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y .Interpréter le résultat.

2- a) Donner une équation cartésienne de la droite de régression d de y en x par la méthode des moindres carrés.

b) Donner une équation d'une droite d' d'ajustement de cette série par la méthode de Mayer.

3- On note S la somme des carrés des résidus de la série (x_i, y_i) par rapport à la droite d et S' la somme des carrés des résidus de la série (x_i, y_i) par rapport à la droite d'.

a) Expliquer pourquoi $S' \geq S$.

b) Vérifier le résultat précédent par le calcul.

4- Estimer le pourcentage de la population urbaine à l'an de 2010.

a) à l'aide de la droite *d*.

b) à l'aide de la droite *d'*.

Activité 3

Une étude faite dans un pays riche sur le taux d'équipement des ménages en automobiles et l'âge des femmes lors de leur premier mariage.
Les résultats sont donnés dan le tableau ci-dessous :

Années	1979	1981	1984	1986	1988	1990	1991	1992	1993	1994
Taux en (%) x_i	68.6	70	72.9	73.4	74.6	76.5	76.8	77	78	79.5
Age y_i	22.9	23.1	23.9	24.5	25	25.6	25.8	26.1	26.4	26.7

1- Construire le nuage des points relatif à la série (x_i, y_i) .

2- a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire $r(x, y)$ de cette série et interpréter le résultat.

b) Donner l'équation de la droite de régression de y en , on note a son coefficient directeur.

c) Suivant cet ajustement, quel serait l'âge au premier mariage pour un taux de 90% ?

Ce calcul a-t-il un sens ?

3- On note t_i le nombre d'années écoulées depuis 1979, ainsi t = 0 en 1979.

a) Dresser les deux tableaux (t_i, x_i) et (t_i, y_i) et représenter ces deux séries double dans deux repères orthogonaux. Quel type d'ajustement peut-on faire?

b) Déterminer le coefficient directeur m de la droite de régression de y en t puis m' celui de la droite de régression de x en t.

c) Déterminer le lien entre a , m et m'.

Ici le taux d'équipement et l'âge étant deux fonctions affine du temps. On retrouve une relation affine entre le taux et l'âge, pourtant il n'y a aucune relation de causalité entre l'âge des femmes lors de leurs premiers mariages et l'équipement des ménages en automobiles.

3) Exemples d'ajustements non affines

Exemple 1 : ***(ajustement polynomial)***

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de salaires nets en indice, base 100 en 1992 dans un pays industrialisé :

Année	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Rang x	0	1	2	3	4	5	6	7
Indice y	100	97,6	96,8	98,4	98,3	99,8	103,3	106,7

1- a) Représenter la série double (x_i, y_i) dans un repère orthogonal.

b) Un ajustement affine est – il justifié?

2- On propose un ajustement par une fonction polynôme du deuxième degré (ajustement quadratique) représentée par une parabole P d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

a) Déterminer les réels a, b et c afin que P passe par les points $A(0,100), B(5,100)$ et $C(7,107)$.

b) Construire la parabole P dans le repère précédent.

c) À l'aide de cet ajustement calculer la prévision de l'indice des salaires n et en 2002.

Exemple 2 : ***(Ajustement homographique)***

Etude du taux d'équipement des ménages en automobile de 1969 à 2000 en France :

Année	1969	1973	1977	1979	1980	1984	1986	1988
Taux	55,4	61,6	66,1	68,6	70	72,9	73,4	74.6

Année	1990	1991	1992	1993	1996	1998	2000
Taux	76,5	76,8	77	78	78,9	79,4	80

1- a) Déterminer l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés de ce nuage, en prenant $x_i = année - 1900$ et on donnera le coefficient a à 10^{-3} près et b à 0,1 près.

b) En déduire la valeur du taux d'équipement en 2000 à l'aide de cet ajustement. Comparer le résultat trouvé à la valeur réelle.

2- On se propose de faire un ajustement par une fonction homographique f telle que :

$f(x) = \dfrac{kx + m}{x - 50}$ pour $x \in [60, +\infty[$.

a) Déterminer les réels k et m pour avoir $f(80) = 70$ et $f(100) = 80$.

b) Etudier la fonction f.

c) Calculer le taux en 2000 à l'aide de cet ajustement. Comparer le résultat avec la valeur réelle.

d) Faire une prévision pour 2007.

Exemple 3 : ***(ajustement logarithmique)***

De 1987 à 1997, L'OPEP a augmenté sa production de pétrole, mais de manière ralentie. Le tableau ci-dessous donne cette production .On note x le rang de l'année et y la production en millions de tonnes.

On pose $X = \ln(x)$ on a obtenu les valeurs arrondies de X à 10^{-2} près.

Année	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
production y_i	944	1065	1137	1232	1231	1297	1332	1333	1368	1408	1423
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$X = \ln(x_i)$	0.00	0.69	1.10	1.39	1.61	1.79	1.95	2.08	2.20	2.30	2.40

1- a) Déterminer une équation de la droite de régression de y en X relative à la série double (X_i, y_i) sous la forme : $y = aX + b$, avec a et b arrondis à l'unité.

b) En déduire une relation entre le rang x et la production y : $y = f(x)$.

2- a) Dans un même repère orthogonal, placer le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ et représenter la fonction f définie sur $[1;+\infty[$.

b) À l'aide de cet ajustement ; donner une estimation de la production de pétrole en 2002, si cette politique se poursuit.

Exemple 4 : ***(ajustement exponentiel)***

Le but de l'exemple est de déterminer le prix d'équilibre d'un produit. (On rappelle que le prix d'équilibre d'un produit est obtenu lorsque l'offre et la demande sont égales.) Une étude faite sur un produit a donné les résultats suivants (le prix au kilogramme est exprimé en DT et les quantités offre et demande sont exprimées en milliers de kilogrammes).

Prix proposé x_i	0,30	0,35	0,45	0,65	0,80	1
Demande y_i	6,25	4,90	3,75	2,75	2,40	2,25
Offre z_i	1,25	1,30	1,30	1,50	1,55	1,60

Tous les résultats numériques seront donnés en valeur décimale arrondie à 10^{-2} près.

1- Le plan P est rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 10 cm pour 1DT en abscisse et 2 cm pour 1 milliers de kilogrammes en ordonnée.
Représenter sur le même graphique les nuages de points associés respectivement aux séries statistiques doubles (x_i, y_i) et (x_i, z_i).

2- Etude de la demande :

La forme du nuage de points associé à la série (x_i, y_i) permet d'envisager un ajustement exponentiel de y en x. On pose donc $Y_i = \ln(y_i)$.

a) Donner une équation de la droite des moindres carrés du nuage de points associé à la série statistique double (x_i, Y_i).

b) En déduire, en utilisant l'égalité Y = ln(y), une estimation de la demande y en fonction du prix x au kilogramme.

3- Etude de l'offre :

La forme du nuage de points associé à la série (x_i, z_i) permet d'envisager un ajustement affine.
Donner une équation de la droite des moindres carrés du nuage de points associé à cette série statistique double (x_i, z_i).

4- Etude graphique du prix d'équilibre :

On considère, dans la suite du problème, que la demande et l'offre sont respectivement formalisées par les fonctions f et g définies sur l'intervalle [0 ; 2] par :
$f(x) = e^{-1,41x + 2,08}$ et $g(x) = 0,53x + 1,10$.

a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2] et dresser son tableau de variation.

b) Sur le graphique du **1**, tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.

c) Déterminer graphiquement le prix d'équilibre du produit.

5- Etude numérique du prix d'équilibre :

On considère la fonction h définie sur l'intervalle [0 ; 2] par : $h(x) = f(x) - g(x)$.

a) Déterminer le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle [0 ; 2] et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans l'intervalle [0 ; 2] une solution unique x_0. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de x_0.

c) Quel est le prix d'équilibre du produit considéré ?

Activité 1 **(Avec Excel 2003)**

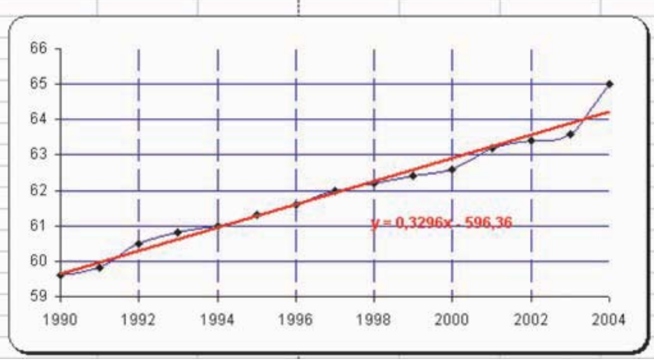
On se propose d'étudier l'évolution de la population urbaine en Tunisie. Les données sont entrées en tableau : les années en colonne **A** , la population tunisienne totale en colonne B et la population urbaine tunisienne en colonne C. Pour calculer la part de la population urbaine tunisienne par rapport à la population tunisienne totale, taper dans la cellule D3 la formule suivante: D3 =C3/B3*100. Pour obtenir le graphique: sélectionner les années (Colonne **A**) et les parts (colonne **D)** en appuyant simultanément sur la touche Ctrl et le bouton droit de la souri. Cliquer, en suite, sur l'onglet et choisir du type graphique : nuage de points.

Cliquer droit sur les points du nuage pour entrer dans le format de la série de données et cliquer Ajouter une courbe de tendance... ,

Cliquer sur l'onglet Type Options , choisir Type Linéaire , puis Options

☑ Afficher l'équation sur le graphique on obtient le graphique ci-dessous représentant la série double (x_i, y_i). x_i désigne les années et y_i désigne les parts.

	A	B	C	D
1	Part de la population urbaine en Tunisie			
2	Année	Pop Totale	Pop Urbaine	Part (en %)
3	1990	8154,4	4860,0	59,6
4	1991	8318,2	4974,3	59,8
5	1992	8489,9	5136,4	60,5
6	1993	8657,4	5263,7	60,8
7	1994	8815,4	5377,4	61
8	1995	8957,5	5490,9	61,3
9	1996	9089,3	5599,0	61,6
10	1997	9214,2	5712,8	62
11	1998	9333,3	5805,3	62,2
12	1999	9455,9	5900,5	62,4
13	2000	9563,5	5986,8	62,6
14	2001	9673,6	6113,7	63,2
15	2002	9781,9	6201,7	63,4
16	2003	9839,8	6258,1	63,6
17	2004	9932,4	6456,1	65



1) L'ajustement affine parait-il judicieux ? Quelle prévision peut-on faire pour 2010?

2) Déterminer les coordonnées du point moyen G.

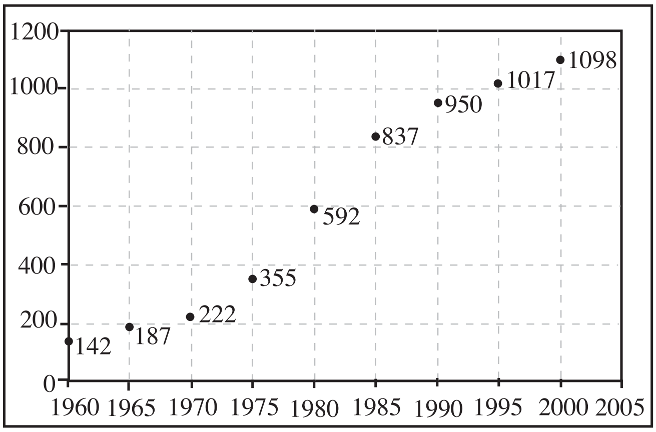
3) Cliquer sur le graphique pour faire apparaître les données sélectionnées et à l'aide du curseur ne sélectionner que les données depuis 1995, recopier l'équation de la droite de régression obtenue et calculer la prévision pour 2010 ?

4) Refaites le même travail de la 3^{éme} question pour les données depuis 1999. Quel semble être le meilleur ajustement ?

Activité 2

On s'intéresse à l'indice du coût à la construction dans un pays industrialisé de 1960 à 2000, base 100 en 1953.

L'évolution est donnée par le graphique ci-contre.



On se propose de chercher une droite qui approche au mieux ce nuage de points.

On se fixe pour critère que la somme des carrés des écarts de la valeur réelle à la valeur obtenue par le modèle soit la plus petite possible.

1- a) Reproduire ce nuage de points dans un repère orthogonal.
   b) Calculer les coordonnées du point moyen G.

2- On a essayé trois droites (AB), D et Δ, à l'aide d'un tableur.
   a) D'après ce tableaux quels sont les points A et B ? Tracer la droite (AB) sur le graphique et déterminer son équation réduite.
   b) La droite Δ passe par le point moyen et à pour coefficient directeur 25. Déterminer son équation réduite et tracer cette droite.
   c) Déterminer l'équation de la droite D passant par le point moyen et de coefficient directeur 27.5. Tracer D.
   d) En appliquant les formules données, compléter les valeurs manquantes en cases bleues.
   e) Calculer et comparer les sommes des écarts suivant le critère fixé. Quel est le meilleur ajustement ?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Indice du coût à la construction base 100 en 1953								
2	écart : différence entre l'indice et l'ordonnée sur la droite								
3	année	indice	droite(AB)	(écart)²	droite D	(écart)²	delta	(écart)²	
4	1960	142	142	0	50	8489	100	1764	
5	1965	187	261,5	5550	187	0	225	1444	
6	1970	222	381	2581	325	10595	350	16384	
7	1975	355	500,5	21170	462	11549	475	14400	
8	1980	592	620	784	600	64	600	64	
9	1985	837	739,5	9506	738	9894	725	12544	
10	1990	950							
11	1995	1017	978,5	1482	1013	19	975	1764	
12	2000	1098	1098	0	1150	2718	1100	4	
13		5400							somme
14									
15					droite	coef			
16	Moyennes				(AB)	23,9			
17	1980	600			D	27,5			
18					delta	25			
19	formules								
20	C5 = $F$16*(A5-$A$4)+$B4			F16 = (B12-B4)/(A12-A4)					
21	E5 = $F$17*(A5-$A17)+$B$17			F17 = DROITEREG(B4:B12; A4:A12)					
22	G5 = $F$18*(A5-$A$17)+$B$17			F18 = 25 (valeur choisie)					
23									

Exercices et problèmes

1- (QCM)

Les questions se rapportent à la série statique à deux variables ci-contre.

x_i	1	2	3	4
y_i	1.9	3.2	4.1	4.9

Une seule des réponses proposées est exacte	***a***	***b***	***c***
Q1. Le point moyen du nuage associé à cette série a pour coordonnées… (valeurs arrondies à 10^{-1}près)	(3.5 ; 2.5)	(10 ; 14)	(2.5 ; 3.5)
Q2. La covariance de cette série est égale à	*1,2*	*31,05*	$V(x).V(y)$
Q3. Avec une calculatrice, on trouve pour équation de la droite de régression de y en x : (avec les coefficients arrondis au centième)	$y=1.1\,x+0.96$	$y=0.96\,x+1.1$	$x=0.96\,y+1.1$
Q4. Avec une calculatrice, on trouve pour équation de la droite de régression de x en y : (avec les coefficients arrondis au centième)	$x=1.04\,y-1.15$	$y=1.02\,x-1.07$	$x=1.02\,y-1.07$
Q5. Avec une calculatrice, on trouve pour coefficient de corrélation linéaire entre x et y	$r=0.99$	$r\approx 0.99$	$r\approx -0.99$
Q6. pour cette série, l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés…	n'est pas justifié	est justifié	est parfois justifié, mais parfois ne l'est pas

2- Calculer la covariance de chacune des deux séries suivantes:

x_i	20	25	30	35	40
y_i	1.1	2.4	6.5	11	8

x_i	-4	-2	-1	0	5
y_i	-3.5	-2.5	-1.5	4.5	10

3- Le tableau suivant indique le montant des frais de publicité et celui du chiffre d'affaires, en DT, communiqués par une entreprise et pour chacun des six premiers mois de l'année 2006.

Frais x_i	10 000	12 000	15 000	15 000	16 000	20 000
Chiffre d'affaires y_i	203 000	220 000	210 000	250 000	280 000	300 000

On pose $x'_i = \dfrac{x_i - 10\ 000}{1\ 000}$ et $y'_i = \dfrac{y_i - 200\ 000}{10\ 000}$.

1) Calculer $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ et $\operatorname{cov}(x', y')$.

2) En déduire σ_x, σ_y et $\operatorname{cov}(x, y)$.

4- Considérons la série statique à deux variables (x_i , y_i) pour i =1, 2,3,…, 5, suivant :

x_i	5050	5080	5130	5150	5220
y_i	309	315	326	334	346

1- Placer, dans un repère orthogonal, le nuage de points A_i (x_i ; y_i)

2- a) Calculer le coefficient de corrélation de cette série.
b) Un ajustement affine est-il justifié ?

3- a) Tracer la droite d de régression de y en x.
b) Calculer la somme $\boldsymbol{S}$ des carrés des résidus par rapport à d.

5-

a) Dans chacun des cas ci-dessous placer les points A_i (x_i ; y_i)
b) Expliquer pour quoi un ajustement affine est justifié.
c) Tracer la droite de régression de y en x.
d) Tracer la droite de régression de x en y.

❶

x_i	0.75	0.3	0.16	0.8	0.57	0.43
y_i	0.8	0.95	0.9	0.7	0.8	0.85

❷

x_i	8	10	12	14	16	18
y_i	9	11	13	13	14	16

Pour ❸ et❹, calculer à la main les coefficients a et b de la droite de régression de y en x, ainsi que le coefficient de corrélation linéaire r, puis contrôler les résultats obtenus avec une calculatrice.

❸

x_i	0	2	4	6	8
y_i	1	3	4	5	9

❹

x_i	-3	-2	-1	0	1	2
y_i	3	2	1	1	-0.5	-1.5

6- On donne la série statistique double suivante où α remplace y_5 .

x_i	1.2	1.4	1.6	1.8	2
y_i	13	12	14	16	α

Par la méthode des moindres carrés on a obtenu une équation de la droite d de régression de y en x , à savoir $y = 9x + 0.6$ .En déduire la valeur de α .

7- (Indicateur de développement)

Le tableau suivant indique, pour 1992, le rang occupé dans le monde par un pays donné, en fonction de son Indicateur de Développement Humain (IDH) d'une part et de son Produit Naturel Brut (PNB) par habitant. Ainsi, L'Egypte occupe le 110$^{\text{ième}}$ rang dans le monde pour l' IDH et le 122$^{\text{ième}}$ rang pour le PNB

Pays	Rang IDH	Rang PNB par hab.
Allemagne	11	12
Corée du sud	32	36
Égypte	110	122
Émirats A. Unis	62	10
États-Unis	8	9
Ethiopie	161	171
France	6	13
Japon	6	13
Pakistan	132	140
Royaume-Uni	10	19
Salvador	112	97
Sénégal	143	114

On note x_i le $i^{\text{ème}}$ terme de la colonne « rang IDH » et y_i le $i^{\text{ème}}$ terme de la colonne « rang PNB par hab. ».

1) Représenter le nuage de point $A_i(x_i ; y_i)$.
2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
3) Donner une équation de la droite régression de y en x.
4) Donner une équation de la droite régression de x en y.
5) Estimer le rang IDH d'un pays classé 50° pour son PNB par habitant.

8- (Un enfant qui promet)

Monsieur Youssef est un papa heureux. Son fils bénéficie d'une excellente santé. Il a noté son poids (en kg) à chacun de ces anniversaires.

Âge x_i (en année)	7	8	9	10	11	12
Poids y_i	22	24	28	34	42	51

Soucieux de l'avenir, Youssef souhaiterait avoir une idée de l'évolution du poids de son héritier. Aidons-le.

1-Représenter cette série par un nuage de point (un centimètre pour un an en abscisse, 1 cm pour 4 kg en ordonnées).

2-Les points ne semble pas alignées, mais donnent plutôt l'impression d'appartenir à un parabole. Poser $z_i = \sqrt{y_i}$ et compléter le tableau suivant en arrondissant à 10^{-2} près :

x_i	7	8	9	10	11	12
z_i						

a) Sur un autre graphique, représenter les points de coordonnées (x_i ; z_i).Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z.
b) Donner, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de z en x.

3-En utilisant cette droite, calculer quel pourrait être le poids de l'héritier à 20 ans. Youssef doit-il réellement se faire du souci ?

9- (De l'hyperbole à la droite)

Le tableau ci-dessous donnes la charge maximale y_i , en tonne, qu'une grue peut lever pour une longueur x_i , en mètres, de la flèche.

x_i	18.5	18	19.8	22	25	27	29	32	35	39	41.7
y_i	10	9	8	7	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3.2

1- Les valeurs numériques dans cette question seront données à 10^{-2} près.
a) Représenter le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité 1 cm pour 2 mètres en abscisse et 1 cm pour une tonne en ordonnée.
b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
c) Déterminez une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. Construire cette droite sur le graphique précédent.
d) Utiliser cette équation pour déterminer la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 mètres.

2-on pose $z_i = \dfrac{1}{y_i}$.

a) Recopier et compléter le tableau suivant (les z_i seront arrondis à 10^{-3} près) :

x_i	18.5	18	19.8	22	25	27	29	32	35	39	41.7
z_i	0.100										

b) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z, puis une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés (les résultats numériques seront arrondis à 10^{-4} près).
c) En se fondant sur les résultats obtenus à la question **2.b.**calculer la valeur de z correspondant à x =26 ; en déduire la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 mètres.
d) Ce résultat paraît-il plus satisfaisant que celui de **1.d**? Pourquoi ?

Exercices et problèmes

10- Considérons la série statistique suivante :

x_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
y_i	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

1- a) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage des points A_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$.

b) La forme de ce nuage incite-t-elle à un ajustement affine ?

2-Trouver le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Ce coefficient confirme-t-il la réponse précédente ?

3-En fait, vérifier que tous les points A_i sont sur l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

4-On complète la suite initiale par les données $\left(\frac{1}{10} ; 10\right)$ et $\left(10 ; \frac{1}{10}\right)$.

Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette nouvelle série statique.

Interpréter votre résultat.

11- Soit une série $(x_i ; y_i)$ à deux variables, la méthode des moindres carrés a permis de déterminer des équations des droites d de régression de y en x et d' de régression de x en y.

1- $d : y = 1,3x - 3.4;$ $\quad d' : x = 0,36y + 1.$

a) Tracer ces deux droites.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.

2- Est-il possible d'avoir ?

$d : y = 0,8x + 7,1$ et $d' : x = 3y - 1.$

12- **(Sans connaître la série)**

Pour une série $(x_i ; y_i)$ (avec i =1, 2,3,…,5) à deux variables. La méthode des moindres carrés a permis de trouver :

L'équation de la droite d de régression de y en x : $y = -0,7x + 5,6$.

L'équation de la droite d' de régression de x en y : $y = -0,8x + 2$.

1- a) Calculer les coordonnées du point moyen associé à cette série.

b) Déduisez –en les valeurs de $\sum_{i=1}^{5} x_i$ et $\sum_{i=1}^{5} y_i$.

2-On sait de plus que $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 8130$. En déduire $\text{cov}(x, y)$ puis $\sum_{i=1}^{5} x_i y_i$ et $\sum_{i=1}^{5} y_i^2$.

13- En prévision du lancement d'un nouveau produit une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Prix x_i de vente en (DT)	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre y_i d'acheteurs éventuels	180	160	150	130	100	90	80	70

1- Représenter graphiquement le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ unité 1cm sur l'axe des abscisses et 1cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

2- a) Calculer les coordonnées du point moyen G_1 des quatre premiers Points, puis les coordonnées du point moyen G_2 des quatre derniers points .Placer ces points sur le graphique et tracer la droite (G_1G_2).

b) On admet que la droite (G_1G_2) est une droite d'ajustement du nuage de points. Estimer graphiquement le prix maximum pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.

3- a) Justifier qu'une équation de la droite (G_1G_2) est ($y = -14x + 302$).

b) En déduire:

- Le nombre d'acheteurs que l'on peut prévoir si le prix de vente est fixé à 13 DT.
- Le prix de vente pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur ou égal à 250.

14- On considère la série statistique double donnant le chiffre d'affaire d'une entreprise en millions de dinars :

Année	1980	1985	1990	1995	1998	2000	2003	2006
Rang de l'année x_i	0	5	10	15	18	20	23	26
Chiffre d'affaires y_i	1.3	1.6	1.7	2.1	2.2	2.4	2.5	2.7

1- Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement de y en x.

2- a)Donner le chiffre d'affaires estimé en 1992 .

b) Déterminer l'année où le chiffre d'affaires prévu dépassera 3millions dinar.

15- Une entreprise a réalisé un emprunt de 280 000 DT pour l'achat d'une nouvelle machine. A la fin de chaque mois on note dans le tableau suivant le montant des bénéfices cumulés (En milliers de dinars) réalisés depuis l'acquisition de la nouvelle machine.

Rang du mois x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Montant des bénéfices cumulés y_i	28	40	51	65	78	84	89	98

1- a)Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points associé à la série double (x_i, y_i) (On prendra 2cm pour 1 mois sur l'axe des abscisses et 2cm pour 10 000 DT sur l'axe des ordonnées).

b) Ce nuage permet-il d'envisager un ajustement affine ?

c) Donner l'équation $y = ax + b$ de la droite D des moindres carrés (arrondir les coefficients au centième) .Construire la droite D dans le repère précédent.

d) A partir de quel mois l'emprunt sera –il amorti par lés bénéfices cumulés réalisés depuis l'acquisition de la nouvelle machine ?

2-L'expérience d'une évolution linéaire des bénéfices semble trop optimiste. On effectue alors le changement de variable $x' = \sqrt{x}$.

a) Calculer les valeurs x'_i (arrondies au centième).

b) La droite D' des moindres carrés de cette nouvelle série (x'_i, y'_i) à pour équation $y = 39.45x' - 13.80$ .En déduire une expression de y en fonction de x.

c) A partir d'un tableau de valeurs, tracer dans le repère précédent la courbe C obtenue avec cette expression .Selon ce nouvel ajustement, à partir de quel mois l'emprunt sera –il amorti par lés bénéfices cumulés réalisés depuis l'acquisition de la nouvelle machine ?

2-Quel est le meilleur ajustement ? Justifier.

16- Dans un magasin le nombre annuel de ventes d'un appareil électroménager, relevé pendant 6 années, est donné par le tableau suivant :

Année	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'appareils y_i	623	712	785	860	964	1073

1- a) Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ en prenant comme unités graphiques: 2cm pour 1 rang en abscisses et 1cm pour 50 appareils en ordonnées et en commençant la graduation à 600 sur l'axe des ordonnées.

b) Calculer, en donnant les résultats arrondis à 10^{-2}, les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point sur le graphique.

2- a) Calculer en donnant les résultats arrondis à 10^{-2}, les coordonnées du point moyen G_1, du nuage formé par les points M_1, M_2et M_3,puis les coordonnées du point moyen G_2, du nuage formé par les points M_4, M_5, et M_6.

b) Placer les points G_1et G_2 sur le graphique et déterminer, avec des coefficients arrondis à10^{-2}, une équation de la droite $(G_1\, G_2)$.

c) En utilisant cette droite comme droite d'ajustement, déterminer le nombre d'appareils que prévoie de vendre en 2010 .

3-On sait maintenant que le nombre d'appareils vendus en 2002 est de 1125.

a) Ajouter le point $M_7(7,1125)$ sur le graphique précédent.

b) On considère alors le nouveau nuage formé des points M_i $2 \le i \le 7$ (le nombre annuel de ventes de l'année 1996 n'est pas pris en compte). Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrées (les coefficients sont arrondies à 10^{-2}).

c) En utilisant cet ajustement quel nombre d'appareils peut-on prévoir vendre en 20010 ?

17- Lors d'une période de sécheresse, un agriculteur relève la quantité totale d'eau (en m^3) utilisée par son exploitation depuis le premier jour et donne le résultat suivant :

Nombre de jours écoulées (x_i)	1	3	5	8	10
Volume utilisé (en m^3) y_i	2.25	4.3	8	17.5	27

Le plan est muni d'un repère orthogonal. On prendra pour unité sur l'axe des abscisses 1cm pour 1 jour et sur l'axe des ordonnées 0.5 cm pour un mètre cube.

1- Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i).

2- Donner l'équation de la droite D de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés sous la forme $y = \alpha x + \beta$ où α et β sont les arrondis à 10^{-2} près. Représenter la droite D sur le graphique.

3- Le nuage de points permet d'envisager un ajustement par la parabole P qui passe par les points $A(1;2.25)$; $B(10;27)$ et qui à pour équation $y = ax^2 + b$ où a et b sont des réels .

a) Déterminer a et b, et donner l'équation de la parabole P.

b) Représenter la parabole P.

4- Dans cette question on compare les deux ajustements à l'aide du tableau suivant :

x_i	1	3	5	8	10	
y_i	2.25	4.3	8	17.5	27	
$[y_i - (\alpha x_i + \beta)]^2$						Total T_1
$[y_i - (a x_i^2 + b)]^2$						Total T_2

Compléter le tableau et donner les arrondis à 10^{-1} près des deux totaux T_1 et T_2.
Ces deux totaux évaluent pour chaque ajustement la somme des résidus.
En déduire l'ajustement qui parait le mieux adapté.

Problème1

Le tableau suivant donne la population d'une ville nouvelle entre les années 1970 et 2000.

Année	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Rang de l'année x_i	0	5	10	15	20	25	30
Population en milliers d'habitants y_i	18	22	25	29	36	42	52

1- Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;y_i)$ dans un repère orthogonal.

(0.5 cm représente une année en abscisse et 1 cm représente 5 milliers d'habitants en ordonnée).

Calculer les coordonnées du point moyen et placer ce point.

2-**Un ajustement affine :**

a) Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients a et b seront arrondis au centième).

b) Tracer cette droite sur le graphique.

c) Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2005, arrondis au millier le plus proche.

d) Calculer à la calculatrice la somme des carrés des résidus $S_1 = \sum\left[y_i - \left(ax_i + b\right)\right]^2$.

(On donnera le résultat arrondi à l'unité près.)

3-**Un deuxième ajustement :**

On considère l'ajustement obtenu par la branche de parabole de la parabole d'équation $y = 0.02x^2 + 0.5x + 18$.

a) Dans le repère précédent, sans étudier la fonction correspondante, tracer cette branche de parabole pour x appartenant à l'intervalle $[0;30]$. On pourra utiliser le tableau de valeurs ci-dessous que l'on recopiera et que l'on complètera :

x	0	5	10	15	20	25	30
$y = 0.02x^2 + 0.5x + 18$							

b) Déduire de ce nouvel ajustement une estimation de la population en 2005, arrondis au millier le plus proche.

c) Calculer la somme des carrés des résidus $S_2 = \sum\left[y_i - \left(0.02x_i^2 + 0.5x_i + 18\right)\right]^2$ pour ce nouvel ajustement.

4-**Comparaison des deux ajustements :**

a) Des deux ajustements quel est le plus pertinent ? (La réponse sera justifiée)

b) On sait maintenant que la population en 2005 était de 63 000 habitants. Calculer le pourcentage des erreurs commises en utilisant les prévisions trouvées avec chacun des deux ajustements précédents.

Problème2

Au cours d'une séance d'essais, un pilote automobile doit, quand il reçoit un signal sonore dans son casque, arrêter le plus rapidement possible son véhicule.

Au moment du top sonore, on mesure la vitesse v_i (en km/h) de l'automobile, puis la distance y_i (en m) nécessaire pour arrêter le véhicule. Pour sept expériences on a obtenu les résultats suivants :

Vitesse v_i	20	43	62	80	98	115	130
Distance d'arrêt y_i	3.5	20.5	35.9	67.8	101.2	135.8	168.5

1- a) Dans un repère orthogonal, représenter le nuage de points de coordonnées (v_i, y_i) avec pour unités 1cm pour 10km/h sur l'axe des abscisses et 1cm pour 10m sur l'axe dés ordonnées

b) Tracer une parabole autour de laquelle ces points semblent se répartir.

2-Posons $x_i = v_i^2$ .Reproduisez et complétez le tableau suivant

x_i							
y_i	101.2	3.5	20.5	35.9	67.8	135.8	168.5

a) Dans un repère orthogonal construisez le nuage des points de cordonnées (x_i, v_i) associé à cette nouvelle série double.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Un ajustement affine est-il plausible ? Donnez l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. Déduisez une formule qui donne une estimation de y en fonction de v.

c) A l'aide de la formule précédente, estimez la vitesse v de ce véhicule lorsque sa distance d'arrêt est 180m.

d) Estimez la distance d'arrêt de ce véhicule s'il roule à 150 km/h.

e) Le manuel du code de la route donne pour calculer la distance d'arrêt (en m) la méthode suivante (prendre le carré de la vitesse exprimée en dizaines de km/h). Comparer le résultat obtenu au d) à celui que l'on obtiendrait avec cette méthode.

Problème3

Le prix de vente des terrains à bâtir dans la même cité d'une ville est donné par le tableau suivant :

Année	1980	1985	1987	1990	1995	1997	2000
Rang de l'année x_i	0	5	7	10	15	17	20
Prix du m² en DT y_i	58,8	60,9	62,1	67,5	71,7	73	73,8

1) Quelle est, en pourcentage, l'augmentation du prix du m² entre 1980 et 2000 ?

2) Représenter le nuage de points M_i (x_i ; y_i) dans un repère orthogonal où 5 cm représentent 10 ans en abscisse, 5 cm représentent 10 francs en ordonnées.

3) Déterminer le point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.

4) On considère que la position des points sur le graphique justifie un ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Ecrire une équation de la droite d'ajustement affine de y en x, notée (D) [les coefficients sont arrondis à 0,01].
Tracer (D).

5) Estimer à 1000 DT près le prix d'un terrain de 1500m² en 2003.

Problème4

La production d'une entreprise a été relevée depuis 1991 .Les années ont été numérotées x_i avec $x_1 = 1$ en 1991 .La production est exprimée en tonnes et notée y_i.

Année	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y_i	600	700	640	900	800	940	100	500	700	900	1100	1000	1200	1400	1360

1- a) Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ associé à la série statistique double (S) ci-dessus.

b) Au cours de l'année x, les installations de l'entreprise ont été détruites par un incendie, puis reconstruites .Indiquer quelle est l'année x et expliquer brièvement votre réponse.

2-Dans la suite du problème, on considère les trois séries statistiques :

- La série initiale (S).
- La série (S') obtenue en retirant les années 1997 ; 1998 ; et 1999.
- La série (S'') comprenant les seules valeurs postérieures à l'année 1999 (cette dernière incluse dans (S'')).

a) Les coefficients de corrélation des séries (S) et (S') arrondis à10^{-2} près sont respectivement 0.66 et 0.93 .Quelle série doit-on privilégier ? Justifier.

b) Par la méthode des moindres carrés, donner une équation de la droite de régression D de y en x pour la série (S') (les coefficients seront arrondis à 10^{-2} près).

c) Tracer cette droite sur la figure précédente quelle prévision de la production de l'entreprise peut on en déduire pour 2006 et 2007 ?

3- a) Calculer le coefficient de corrélation de la série (S'') .
b) Par la méthode des moindres carrés donner une équation de la droite de régression D' de y en x pour cette série (les coefficients seront arrondis à 10^{-2} près).
c) Tracer cette droite D' sur la figure précédente .Quelle prévision de la production de l'entreprise peut-on faire pour 2006 et 2007 ?

Problème5 (Coût et recette dans un marché non monopoliste)

A. Etude du coût :

Le coût total du production d'un bien produit par une entreprise en concurrence est donné en milliers de DT par: $C(q)=0.1q^2+2q+60$, q étant le nombre de centaines d'unités produites, avec $q\in[5;40]$.

1) Etudier le sens de variation de cette fonction sur $[5;40]$.

Construire la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction de coût total dans un repère orthogonal.

2) Résoudre algébriquement $C(q)>150$. Donner une interprétation du résultat.

B. Etude de la recette et de bénéfice :

Une étude statistique a permis d'estimer la recette en fonction de la quantité fabriquée q .

Le tableau ci-dessous rend compte de cette étude.

Quantité q_i	5	10	15	20	25	30	35	40
Recette y_i (en milliers de DT)	15	90	135	170	190	200	230	240

1-Représenter les points $M_i(q_i;y_i)$ dans le repère de la question **A.**

2-Au vu de ce nuage, on décide d'ajuster la recette par une fonction logarithme.
Pour cela, on considère la série $(t_i;y_i)$, où $t_i=ln(q_i)$.

a) Déterminer une équation de la droite de régression de y en t par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront donnés à l'unité près).

b) En déduire une relation entre y et q de la forme $Y=a\ln(q)+b$.

c) On pose $R(q)=a\ln(q)+b$; la fonction R, ainsi définie sur $[5;40]$, modélise la fonction de la recette de l'entreprise pour ce bien.
Estimer graphiquement pour quelles quantités produites l'entreprise réalise un profit.

3-On considère la fonction B définie sur $[5;40]$ par $\mathrm{B}(\mathrm{q})=R(q)-C(q)$

a) Calculer $B'(q)$. En déduire l'étude des variations de la fonction B sur $[5;40]$.

b) Montrer que l'équation $\mathrm{B}(\mathrm{q})=0$ admet deux solutions q_0 et q_1, dont on donnera un encadrement à 0.1 près.

c) En déduire le plus grand intervalle tel que, pour tout quantité produite de cet intervalle, l'entreprise réalise un profit.

Problème6 (**Offre et demande**)

D'après une étude de marché, l'offre d'un produit est donnée par $f(x) = 0.9x$, où x est le prix en centaines de DT, avec $x \in [1;6]$ et $f(x)$ est la quantité offerte, en millier d'objets.

L'étude des intentions d'achat conduit à une estimation de la demande donnée par le tableau suivant :

Prix x_i	1	2	3	4	5	6
Quantité y_i	3	2	1.5	1	0.6	0.5

1-Dans le même repère orthogonal, tracer la représentation $\mathscr{D}$ de la fonction d'offre et les points $M_i(x_i;y_i)$ de l'estimation de la demande.
Un ajustement affine de la demande est-il justifié?

2-On pose $z_i = \ln(y_i)$.

a) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.
Donner les coefficients à 0.01 près.

b) En déduire une relation entre x et y de la forme $y = Ke^{ax}$.

3-On modélise la fonction de demande par la fonction g définie sur $[1;6]$ par $g(x) = Ke^{ax}$.

a) Etudier le sens de variation de la fonction g.
Tracer la courbe représentative de g dans le même repère que la fonction d'offre.

b) Soit h la fonction définie sur $[1;6]$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.
Etudier le sens de variation de h.
Montrer que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution x_0 dans $[1;6]$. Donner une valeur arrondie de x_0 à 0.01près.

c) En déduire le prix d'équilibre, à un DT près, ainsi que le nombre d'objets que les producteurs doivent alors proposer sur le marché .Vérifier graphiquement.

Math culture

1) Pour quoi droite de régression ?

Francis Galton *(1822-1911) a étudié d'éventuels liens entre la taille* y_i *d'un individu et celle* x_i *de son père. La droite qu'il est conduit à tracer pour ajuster le nuage des points de coordonnées* (x_i, y_i) *a un coefficient directeur positif et inferieur à 1. Cela signifie que les pères de grande taille ont (en général) des enfants de grande taille mais (en général) inferieur à celle de leur père : il y a régression du caractère (taille élevée) dans l'espèce ; d'où l'expression droite de régression.*

2) Pour quoi (..... de y en x) ?

x *et* y *ne jouent pas le même rôle dans la définition de la droite de régression. Ceci explique la terminologie de y en x : elle précise que dans l'étude faite les* x_i *sont portés en abscisses et les* y_i *en ordonnées.*

3) Mise en garde !

En fait, comme c'est toujours le cas pour une étude statistique d'un phénomène quel qu'il soit, c'est le spécialiste de la discipline concernée qui doit interpréter les résultats. D'une corrélation observée entre les variables on ne peut pas conclure à une liaison physique objective et encore bien moins à une dépendance causale.

Un exemple classique est celui d'une enquête, réalisée en Angleterre de 1924 à 1937, révélant que le coefficient de corrélation entre le nombre de permis délivrés chaque année pour l'installation d'un poste de radio et le nombre des malades mentaux enregistrés pour 10 000 habitants valait 0.998, suggérant une relation quasi fonctionnelle.

Une étude complémentaire de chacun des phénomènes s'imposait.

Un autre exemple classique : le poids du nouveau- né croit avec l'âge de la mère.

Une analyse plus fine montre que , si l'on prend uniquement des nouveaux nés de même rang de naissance on ne trouve pas de corrélation entre leur poids et l'age de leur mère. Mais le poids à la naissance croit avec le rang de la naissance .... lequel est évidement corrélé avec l'age de la mère, d où la corrélation, qui n'est qu'apparente. Quant à savoir pourquoi le poids du nouveau né croit avec le rang de naissance .... ; C'est un problème complexe qui concerne les biologistes et les physiologistes.

Chapitre 9

PROBABILITES

Pour commencer
Cours

- Probabilité conditionnelle
- Variables aléatoires

Avec l'ordinateur
Exercices et problèmes
Math culture

Pour commencer

Activité 1

Dans une entreprise, on s'intéresse à la répartition des hommes et des femmes selon les trois catégories salariales : ouvrier, agent et cadre.

	homme	femme	total
ouvrier	34.1 %	15.9 %	50 %
Agent	17.4 %	12.6 %	30 %
Cadre	6.5 %	13.5 %	20 %
Total	58 %	42 %	100 %

On choisit au hasard une fiche d'un employé et on considère les événements suivants :
F : « la fiche choisie est celle d'une femme ».
H : « la fiche choisie est celle d'un homme ».
O : « la fiche choisie est celle d'un ouvrier ».
A : « la fiche choisie est celle d'un agent ».
C : « la fiche choisie est celle d'un cadre »..
Calculer les probabilités des évènements F, H, O, A, C, $C \cap F$,$O \cap F$,$A \cap H$ et $F \cap O$.

Activité 2

Une société lance une offre d'emploi pour recruter un gestionnaire de production. 35 % des personnes répondant à cette offre ont une expérience professionnelle, 25% ont un diplôme de gestionnaire et 15% ont à la fois un diplôme de gestionnaire et une expérience professionnelle.

On choisit au hasard le fichier d'un candidat .Quelle est la probabilité d'obtenir :
1) Un candidat ayant une expérience professionnelle ou un diplôme de gestionnaire ?
2) Un candidat sans diplôme de gestionnaire et sans expérience professionnelle?
3) Un candidat ayant une expérience professionnelle et sans diplôme de gestionnaire?
4) Un candidat ayant seulement une expérience professionnelle ou ayant seulement un diplôme de gestionnaire ?

Activité 3

Une urne contient cinq boules rouges numérotées 0,0,1,2et 3 et quatre boules vertes numérotées 0, 0,2 et 3.Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
1) Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules de l'urne.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A « Obtenir une seule boule rouge »
B « Obtenir une seule boule portant le numéro 0 »
C « Obtenir une seule boule rouge portant le numéro 0 »
2) On tire au hasard, successivement sans remise deux boules de l'urne.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A' « Obtenir une seule boule portant un numéro pair »
B' « La première boule tirée est rouge».

Activité 4

On lance trois fois de suite un dé équilibré dont les faces sont marquées de 1 à 6.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A « la face marquée 6 apparaît une seule fois »
B « la face marquée 6 apparaît au moins une fois »
C « la face marquée 6 n'apparaît pour la première fois qu'au troisième lancer »

Activité 5

Une urne contient trois boules blanches et cinq boules noires.
1) On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.
Calculer la probabilité d'obtenir :
a) Une boule blanche puis une boule noire.
b) Une boule noire puis une boule blanche.
c) Deux boules de couleurs différentes.
2) L'épreuve consiste maintenant à tirer successivement et au hasard deux boules de l'urne de la manière suivante :
* Si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne, puis on tire une seconde boule.
* Si la boule tirée est noire, on la garde, puis on tire une seconde boule de l'urne.
Calculer la probabilité d'obtenir :
a) Une boule blanche puis une boule noire.
b) Une boule noire puis une boule blanche.
c) Deux boules de couleurs différentes.

Activité 6

Pour aller au lieu de travail, un fonctionnaire traverse avec sa voiture une grande avenue où sont installés quatre feux de circulation tricolores et deux à deux indépendants : orange, rouge et vert. Le fonctionnaire doit s'arrêter chaque fois que le feu n'est pas vert. On suppose l'équiprobabilité d'apparition de chaque couleur dans chaque feu .
1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « Le fonctionnaire s'arrête aux quatre feux ».
B : « Le fonctionnaire ne s'arrête pas. ».
C : « Le fonctionnaire s'arrête au premier et au troisième feu ».
D : « Le fonctionnaire ne s'arrête qu'au premier et au troisième feu ».
2) Chaque fois que le fonctionnaire s'arrête au moins deux fois, il arrive au lieu de travail en retard.
Calculer la probabilité pour qu'il ne soit pas en retard, sachant qu'il sort de sa maison tous les jours à la même heure.

1) Probabilité conditionnelle et formule des probabilités composées

Activité 1

Les 500 salariés d'une entreprise sont classés en deux catégories : cadre et employé. Au cours de négociations sur la Réduction du Temps du Travail (RTT), on propose aux salariés deux formules suivantes :
Formule F1 : une RTT de 30 minutes par jour de travail.
Formule F2 : une RTT de 12 jours de travail par an.

Une enquête a été réalisée auprès de tous les salariés de l'entreprise, chacun remplit une fiche mentionnant son statut (cadre ou employé) et son choix de RTT. Les résultats sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

	Cadre	employé	Total
Salarié	10	300	
Salarié	40	150	
Total			500

1- Recopier le tableau ci-dessus et remplir les cases vides.
2- On extrait, au hasard, une fiche d'un salarié. On considère les évènements suivants :
C : " Le salarié choisi est un cadre "
E : " Le salarié choisi est un employé "
F_1 : " Le salarié choisi préfère la formule F_1 "
F_2 :" Le salarié choisi préfère la formule F_2 "
A : " Le salarié choisi préfère la formule F_1 sachant que c'est un cadre "
B :" Le salarié choisi préfère la formule F_2 sachant que c'est un employé".
a) Calculer les probabilités des événements C, E, F_1, F_2, A et $F_1 \cap C$.
b) Comparer $p(A)$ et $p\dfrac{(F_1 \cap C)}{p(C)}$, p(B) et $p\dfrac{(F_2 \cap E)}{p(E)}$.

Définition (probabilité conditionnelle)

Soit E l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire et p une probabilité sur E.
Soit A un événement de probabilité non nulle et B un événement quelconque.
On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, le réel noté $p(B/A)$ ou $p_A(B)$ et défini par : $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

Remarque

Dans le cas où $p(B) = 0$, on convient de poser $p(A/B) = 0$.

Activité 2

Une urne contient quatre boules blanches numérotées 1, 1, 2, 2 et cinq boules noires numérotées 1, 1, 1, 1, 2 .Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément trois boules.
Calculer la probabilité de chacun des événements :
A : « Obtenir exactement deux boules blanches »
B : « Obtenir trois boules portant le numéro 1 »
C : « Obtenir exactement deux boules blanches sachant qu'on a obtenu trois boules portant le numéro 1 ».
D : « Obtenir trois boules de même couleur sachant qu'on a obtenu trois boule portant le numéro 1 ».
E : « Obtenir une boule portant le numéro 2 sachant qu'on a obtenu exactement deux boules blanches ».

Activité 3

On lance, une seule fois, un dé équilibré dont les faces sont numérotés de 1 à 6. On constate que la face apparue porte un numéro pair.
1- Quelle est la probabilité pour que le nombre marqué sur la face obtenue soit égal à 2 ?
2- Quelle est la probabilité pour que le nombre marqué sur la face obtenue soit supérieur à 3 ?

Remarque

Pour calculer p (B/A) on peut choisir l'une des deux possibilités suivantes:
- Calculer $p(A \cap B)$ et p (A) puis utiliser la définition.
- Considérer une nouvelle expérience aléatoire : celle dont les issues possibles sont les issues qui réalisent l'événement A, parmi celles-ci, les issues favorables sont les issues qui réalisent également B.

Activité 4

Lors d'une promotion, un supermarché vend par paquets d'un kilogramme, des chocolats au lait et des chocolats à la noisette fabriqués en Tunisie, en France ou en Suisse. Le nombre de kilos mis en vente est donné par le tableau suivant :

Origine de fabrication / Produit	Tunisie	France	Suisse
Chocolat au lait	200	200	100
Chocolat à la noisette	600	500	400

1- Un client pressé prend au hasard un paquet de chocolat. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ?
a) L : « le client prend un paquet de chocolat au lait »
b) T : le client prend un paquet de chocolat tunisien »
2- a) Sachant que le client ne veut que des produits tunisiens, quelle est la probabilité qu'il prenne un paquet de chocolat au lait?
b) Quelle est la probabilité que le client prenne un paquet de chocolat européen sachant qu'il est à la noisette?

Formule des probabilités composées :

Activité 1

Pour recruter des stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection. Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves il y a 60 % de garçons. Les résultats aux tests on permis de recruter 70% des garçons candidats et 80 % des filles candidates.

On choisit au hasard un candidat. On considère les événements :G « le candidat choisi est un garçon » et R «le candidat choisi est recruté »

1) a- Préciser p(G) et p(G/R).

b- En déduire la probabilité que le candidat soit un garçon et qu'il soit recruté comme stagiaire ?

2) Quelle est la probabilité que le candidat soit une fille et qu'il soit recruté comme stagiaire ?

Propriété

Soit E l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire et p une probabilité sur E.

Soient A et B deux événements quelconques.

$$p(A \cap B) = p(A / B) \times p(B)$$

Activité 2

On considère un sac contenant sept jetons rouges et six jetons noires. On tire au hasard, successivement et sans remise, huit jetons du sac. On considère les événements suivants :

A : « Le premier jeton tiré est rouge » ;

B : « Le deuxième jeton tiré est rouge » ;

C : « Le troisième jeton tiré est noir » ;

E : « Le premier jeton noir apparaît au troisième tirage ».

1- Calculer : $p(A)$, $p((B/A)$ et $p(C / A \cap B)$

2- Montrer que $p(A \cap B \cap C) = p(A) \times p(B / A) \times p(C / A \cap B)$ et en déduire p(E).

Propriété

Soit n un entier supérieur ou égal à 2

$p(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n) = p(A_1) \times p(A_2 / A_1) \times p(A_3 / A_1 \cap A_2) \times \ldots \times p(A_n / A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_{n-1})$

2) Indépendance de deux évènements

Activité 1

On lance une pièce de monnaie équilibrée deux fois de suite et on note, dans leur ordre d'apparition, les côtés obtenus (P pour *pile* et F pour *face*).

On considère les évènements :

A : « Obtenir deux côtés différents ».

B : « Obtenir au plus une fois F ».

1) a- Calculer p(A),p(B) et p($A \cap B$) .

b- Comparer p(A)x p(B) et p($A \cap B$)

2) Reprendre la première question lorsqu' on lance la pièce de monnaie trois fois de suites.

Définition

Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Activité 2

Une entreprise comporte 105 salariés. 70 salariés sont mariés, 30 salariés sont des cadres et 20 salariés sont des cadres mariés

1- Recopier et compléter le tableau suivant

	Cadres	Non cadres	Total
Mariés	20		
Non mariés			
Total	30		105

2 - On prend un fichier quelconque d'un salarié. On considère les événements suivants:
C : « le salarié choisi est un cadre » et M : « le salarié choisi est marié »
Les événements C et M sont-ils indépendants ?

Activité 3

Dans une classe terminale, 25% sont des redoublants. On suppose que la probabilité de réussir au bac dans cette classe est 85 %, la probabilité de réussir chez les non redoublants est de80%. Après les résultats du bac, on rencontre au hasard un élève de cette classe et on note :
B : « L'élève a le bac » et R : « L'élève est redoublant »

1) Calculer $p(B \cap R)$.
2) Les événements R et B sont ils indépendants?

Activité 4

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
Montrer que :
1- A et B sont indépendants si et seulement si $p(A / B) = p(A)$ et $p(B / A) = p(B)$
2- Si A et B sont incompatibles alors A et B ne sont pas indépendants ?

Remarques

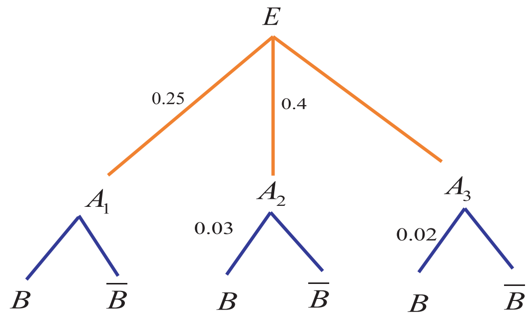
- Deux événements sont indépendants, lorsque la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la réalisation de l'autre.
- Il ne faut pas confondre évènements indépendants et évènements incompatibles. Deux événements incompatibles ne sont pas généralement indépendants.

Activité 5 **(arbre pondéré)**

Une entreprise est spécialisée dans la vente de ballons en cuir. Elle a trois fournisseurs A_1, A_2 et A_3 qui alimentent le stock dans les proportions 25%,40% et 35%.

Une étude statique faite par le service qualité de cette entreprise a prouvé que :
La probabilité pour qu'un ballon ait un défaut sachant qu'il est fourni parA_1 vaut 0,04.
La probabilité pour qu'un ballon ait un défaut sachant qu'il est fourni par A_2 vaut 0,03.
La probabilité pour qu'un ballon ait un défaut sachant qu'il est fourni par A_3 vaut 0,02.
On note E : l'ensemble des ballons du stock. On prend un ballon au hasard de E et on note : A_i : « Le ballon provient du fournisseur A_i » $i=1,2,3$

B : « Le ballon a un défaut ».



Cette situation peut être modélisée par **l'arbre** ci-contre.
Un ballon du stock ne peut être fourni que par les fournisseurs A_1,A_2 ou A_3 seulement, cette condition est schématisée par les trois branches rouges : « Ballon fourni par A_1 », « Ballon fourni par A_2 » et « Ballon fourni par A_3 ». Chaque branche est pondérée par la probabilité correspondante.
Chaque branche bleue correspond à une probabilité conditionnelle. Par exemple la branche A_1-B correspond à l'événement :

« le ballon a un défaut sachant qu'il est fourni par A_1 »

1- a- Reproduire et compléter l'arbre ci-dessus en pondérant chaque branche par la probabilité qui lui correspond.
   b- Vérifier que la somme des probabilités affectées au branches issues d'un même point (dit nœud) est égale à1.
2- a) Calculer $p(B\cap A_1)$.
   b) Vérifier que la probabilité de l'événement $B\cap A_1$ est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches E-A_1 et A_1-B du **chemin** E-A_1-B.
   c) Utiliser l'arbre pondéré ci-dessus pour calculer $p(B\cap A_2)$ et $p(B\cap A_3)$.

Remarque

Lorsqu'une situation est représentée par un arbre pondéré :

- La somme des probabilités affectées aux branches d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.

3) Formule des probabilités totales

Activité 1

En reprenant l'**activité** (l'arbre pondéré) et en remarquant que A_1, A_2 et A_3 forment une partition de E.
a- Vérifier $B\cap A_1$, $B\cap A_2$ et $B\cap A_3$ forment une partition de B.
b- Montrer que : $p(B)=p(B/A_1)\times\ p(A_1)+p(B/A_2)\times\ p(A_2)+p(B/A_3)\times\ p(A_3)$.
c- En déduire la valeur de p(B).

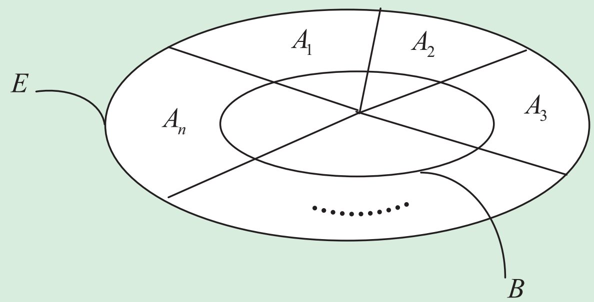
Propriété

Soit E l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire, p une probabilité sur E et n un entier supérieur ou égal à 2

Soit $A_1, A_2, A_3 \ \dots \ A_n$ des événements formant une partition de E.

La probabilité d'un événement quelconque B est donnée par la formule :

$$p(B) = p(B/A_1)\times p(A_1) + p(B/A_2)\times p(A_2) + \dots \dots + p(B/A_n)\times p(A_n)$$



Activité 2

A la cafétéria, dans la vitrine pâtisserie :

- 60% des gâteaux sont à base de crème.
- Parmi ceux qui sont à base de crème ,30 % ont aussi des fruits.
- Parmi ceux qui ne sont pas à base de crème, 80 % ont des fruits.

On considère les événements :

C « avoir un gâteau à base de crème ».

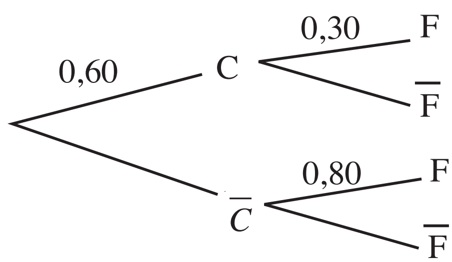
F « avoir un gâteau avec des fruits ».

On modélise cette situation par l'arbre pondéré ci-contre :

Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci- contre.

On Prend un gâteau au hasard.

Montrer que la probabilité de l'avoir avec des fruits est égale à 0.5



Activité 3

Dans une usine, la fabrication d'une pièce nécessite son passage sur une machine M_1 puis sur une machine M_2. On note :

M_1 : événement: « La machine M_1 est en marche ».

$\overline{M_1}$: L'événement : «La machine M_1 est en panne ».

Une étude a permis d'estimer que :

(I) p ($\overline{M_1}$) = 0,004.

(II) Lorsque M_1 est en panne la probabilité que M_2 tombe en panne est égale à 0.5.

(III) Lorsque M_1 est en marche la probabilité que M_2 tombe en panne est égale à 0.002.

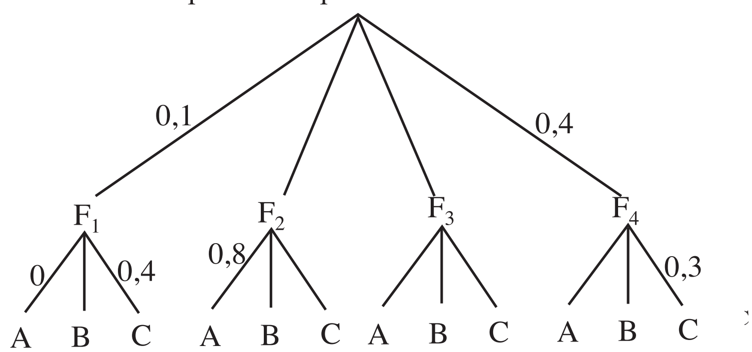
1) Construire un arbre pondéré représentant cette situation et écrire sur chaque branche la probabilité associée.
2) Calculer p (M_2).

Activité 4

Une chaîne de magasins commercialise des vélos tout terrain.
Elle s'adresse exclusivement à quatre fournisseurs F_1, F_2, F_3 et F_4 qui produisent respectivement 10 %, 20%, 30 % et 40 % du stock.
L'essentiel de ces vélos est vendu dans deux magasins et la production de chaque fournisseur est répartie selon le tableau ci-dessous :

Fournisseur	F_1	F_2	F_3	F_4
Magasin *A*	0	0,8	0,5	0,4
Magasin *B*	0,6	0	0,5	0,3
Autres magasins C	0,4	0,2	0	0,3

On modélise la situation par l'arbre pondéré ci-dessous :



1) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessus.
2) On prend au hasard un vélo du stock de ces magasins.
Calculer la probabilité des événements suivants :
E :« Le vélo est vendu dans le magasin A et provient du fournisseur F_1. »
F :« Le vélo est vendu dans le magasin A et provient du fournisseur F_2 »
G :« Le vélo est vendu dans le magasin A ».
3) Quelle est la probabilité que le vélo soit vendu dans le magasin B ?

Activité 5

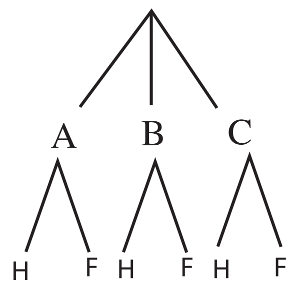
Dans une entreprise, 75% des salariés sont des femmes.
Le tableau suivant donne la répartition de ces salariés, suivant le sexe, dans chacune des trois catégories d'emploi A,B ou C.

Catégorie	*A*	*B*	*C*
Homme	20%	50%	30%
Femme	20%	35%	45%

On tire au hasard la fiche d'un salarié de cette entreprise et on note :
H : « le salarié choisi est un homme »
F : « le salarié choisi est une femme »
A : « le salarié est de la catégorie *A* ». De même pour les catégories B et C.
1- a- Déterminer $p(A/H)$, $p(A/F)$ et en déduire $p(A)$.

b- Calculer p(B) et p(C).

2- Reprendre l'arbre ci-contre : et pondérer chaque branche par la probabilité correspondante.



4) Formule de Bayes

Activité 1

Deux urnes U_1 et U_2 sont telles que : U_1 contient 5 boules blanches et trois boules noires et U_2 contient 4 boules blanches et 7 boules noires. On choisit au hasard une des deux urnes et on en extrait au hasard une boule de cette urne. On considère les événements suivants :

A : « L'urne choisie est U_1 »

N : « La boule tirée est noire ».

1- Préciser $p(A); p(\overline{A}); p(N/A)$ et $p(N/\overline{A})$

2- On a constaté que la boule tirée est noire. Quelle est la probabilité pour que l'urne choisie soit U_1 ?

Propriété

Soients A et B deux événements de probabilités non nulles

$$p(A/B) = \frac{p(A)\times p(B/A)}{p(A)\times p(B/A) + p(\overline{A})\times p(B/\overline{A})}.$$

Activité 2

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise.
Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.
Pour $i = 1$ ou $i = 2$, on note E_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Est le $i^{\text{ème}}$ jour » et O_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Ouest le $i^{\text{ème}}$ jour ».
Sachant que le touriste est à l'Ouest le deuxième jour quelle est la probabilité qu'il était à l'Est la veille.

Activité 3

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.

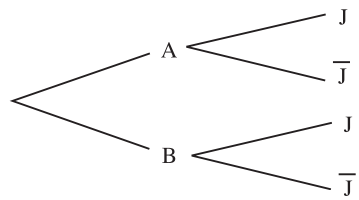
La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante un très grand nombre de bulbes de tulipes.
Après la récolte on choisit au hasard une tulipe et on définit les évènements suivants :

A : « Le jardinier a choisi le lot 1 »
B : « Le jardinier a choisi le lot 2 »
J : «La tulipe choisie est jaune »

1- On modélise la situation par l'arbre suivant :



Reproduire l'arbre ci-dessus et pondérer chaque branche par la probabilité convenable.

2- Sachant que la tulipe choisie est jaune quelle est la probabilité qu'elle soit planté dans le lot 1 ?

Activité 4

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.
On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).
Un joueur fait une partie en deux étapes :
Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.
Deuxième étape :

- Si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- Si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- Si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).
On définit les évènements suivants :

D_1 : « le dé indique 1 » D_2 : « le dé indique 2 »
D_3 : « le dé indique 3 » G : « la partie est gagnée ».

1- a) Déterminer les probabilités p (G /D_1) et p(G/D_2)

b) Montrer que $p(G) = \frac{23}{180}$.

2- Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

II- Variables aléatoires:

Activité 1

On lance une pièce de monnaie équilibrée deux fois de suite et on note, dans leur ordre d'apparition, les côtés obtenus (P pour *pile* et F pour *face*)
On désigne par E l'ensemble des 4 évènements élémentaires PP, PF, FP et FF.
Soit X : l'application qui à chaque événement élémentaire associe le nombre de fois où *face* est apparu.

1) Déterminer l'image de chacun des évènements élémentaires de E par X et en déduire toutes les valeurs possibles prises par X.
2) On désigne par A l'ensemble des événements élémentaires ayant pour image le réel 1 par X. Déterminer p(A).

Définition

Soit E l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
On appelle variable aléatoire sur E toute application X de E vers IR

Remarque

Lorsque x_1, ,......,x_n (avec i = 1, ….,n).sont les valeurs prises par une variable aléatoire X. on note $(X = x_i)$ l'ensemble des événements élémentaires de E ayant x_i pour image par X.

Activité 2

Un sac contient 20 jetons colorés et de même forme: 9 rouges, 8 verts et 3 noires .Un joueur prend au hasard un jeton du sac. Si le jeton est noir il gagne 5DT, s'il est vert, il gagne 3DT et s'il est rouge il perd 4DT.
Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le gain algébrique du joueur,(exprimé en DT).
1) Déterminer les valeurs x_1, $x_2$et x_3 prises par X.
2) a- Calculer: $p_1=p(X= x_1)$, $p_2=p(X= x_2)$ et $p_3=p(X= x_3)$.
b- Vérifier que $p_1+p_2+p_3=1$

Loi de probabilité

Lorsqu' à chaque valeur x_i (avec i = 1, …,n) prise par une variable aléatoire X ,on associe la probabilité $p_i = p(X = x_i)$,on dit que l'on définit **la loi de probabilité de** X

Remarques

- On peut donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à l'aide du tableau ci-dessous

Valeur de x_i	x_1	x_2	….	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2		p_n

- Les événements $(X = x_i)$ (avec i = 1, ….,n) forment une partition de E , donc $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

Activité 3

Une boite contient trois carrés numérotés de 1 à 3 ; une deuxième boite contient quatre disques numérotés de 1 à 4. On tire indépendamment un objet de chacune des deux boites. Les objets d'une même boite sont supposés avoir la même probabilité d'être tirés.
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque tirage, associe la somme des deux nombres indiqués sur les objets tirés. Donnez la loi de probabilité de X

Activité 4

Une machine remplit automatiquement des sachets en mélangeant deux produits A et B. Dans chaque sachet, la masse du produit A introduite par la machine est 50g avec une probabilité de 0,8 ou 51g avec une probabilité de 0,2 et indépendamment la masse du produit B introduite est 50g avec une probabilité égale à 0,6 ou 51g de probabilité égale à 0,4.

On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs la masse d'un sachet.

1- Déterminer les valeurs prises par X.
2- Donner la loi de probabilité de X.

Espérance mathématique :

Activité 1

Au cours d'une étude prospective sur la vente d'un nouveau model d'une voiture, le département marketing d'une société a pris par hypothèse la loi de probabilité de la variable aléatoire X prenant pour valeurs : le nombre de voiture susceptibles d'être vendues par jour dans tous les points de vente de cette société (chaque point de vente contient au départ de l'étude exactement 5 voitures de ce nouveau modèle).

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,09	0,34	0,23	0,20	0,10	0,04

1- Calculer le réel $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_6p_6$.

2- Le directeur de la société prévoit vendre en moyenne deux voitures par jour. Justifier sa prévision ?

Définition

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

Valeur de X	x_1	x_2	....	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	....	p_n

L'espérance mathématique de X est le réel, noté E(X) et défini par :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

Remarque

L'espérance mathématique est la moyenne des valeurs x_i pondérées par les coefficients p_i.

Activité 2

On tire au hasard un échantillon de trois articles dans une boite contenant 12 articles dont trois sont défectueux. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre des articles défectueux obtenus.

1- Déterminer la loi de probabilité de X.

2- Calculer E(X). Interpréter votre résultat.

Activité 3

On considère 4 cases numérotées de 1 à 4 et quatre jetons numérotées de 1 à 4. Un joueur place un jeton (et un seul) au hasard dans chacune des quatre cases.
Combien y a-t-il de répartitions possibles des 4 jetons dans les 4 cases ?
On suppose par la suite chacune de ces répartitions équiprobables.
On dit qu'un jeton est « en place » quand il a été placé dans la case portant le même numéro que lui.
On associe à chaque répartition des quatre jetons dans les quatre cases le nombre de jetons « en place ». On définit ainsi une variable aléatoire X.
Donnez sa loi de probabilité. Calculez E(X).

Activité 4

Dans une foire, on propose le jeu suivant :
Le joueur mise 1 DT sur l'un des numéros 1 ;2,3,4,5 ou 6,puis on lance deux dés discernables et réguliers à six faces numérotées de 1 à 6.
Si le numéro choisi sort deux fois, le joueur remporte deux fois sa mise.
Si le numéro choisi sort une seule fois, le joueur récupère sa mise.
Si le numéro choisi ne sort pas le joueur perd sa mise.
Soit X : la variable aléatoire prenant pour valeur le gain algébrique : (c à d la somme d'argent gagnée ou perdue à la fin de l'épreuve par le joueur).
1- Déterminer la loi de probabilité de X.
2- a) Calculer E(X).
b) Ce jeu est-il avantageux pour le joueur ?

Dans le cas où la variable aléatoire X indique le gain algébrique réalisé dans un jeu, on dit que le jeu est :
- Équitable, si $E(X) = 0$.
- Favorable ou gagnant, si $E(X) > 0$.
- Défavorable ou perdant,si $E(X) < 0$.

Activité 5

Un chef d'entreprise envisage de placer une somme d'un million de DT dans une bourse. Deux opérations lui sont proposées:

- La première opération a une probabilité de réussite de 0,6 et permettra de doubler la somme placée. Si cette opération est manquée, le chef d'entreprise ne récupérera que la moitié de la somme placée.
- La seconde a une probabilité de réussite de 0,9 et permettra de gagner la moitié de la somme placée. Si cette opération est manquée, le chef d'entreprise ne récupérera que 40% de la somme placée.

Soit X la variable aléatoire qui, à tout placement d'un million de DT selon la première opération financière, associe le gain algébrique ainsi obtenu.
Soit Y la variable aléatoire qui à tout placement d'un million DT selon la seconde opération financière, associe le gain algébrique ainsi obtenu.
1- Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer son espérance E(X).
2- Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y. et calculer son espérance E(Y).
3- Quelle est l'opération de placement la plus avantageuse?

Variance - Ecart- type

Activité 1

On considère les deux variables aléatoires X et Y dont les lois de probabilités sont données par les deux tableaux suivants :

x_i	-6	-1	4
p_i	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

y_i	-1	0	1
p_i	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$

1- a) Vérifier que $E(X) = E(Y)$.

b) Quelle est la variable aléatoire qui a les valeurs les plus dispersées par rapport à son espérance.

2- Comparer les réels $V(X) = \sum_{i=1}^{3}(x_i - E(X))^2 p_i$ et $V(Y) = \sum_{i=1}^{3}(y_i - E(Y))^2 p_i$. Quelle conclusion peut-on faire?

Définition

Soit X une variable aléatoire, d'espérance mathématique $E(X)$,
dont la loi est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	x_1	x_2	………	x_n
p_i	p_1	p_2	………	p_n

- La variance de X est le réel, noté V(X), défini par :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \dots \dots + (x_n - E(X))^2 p_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 p_i .$$

- L'écart type de X, noté $\sigma(X)$ est la racine carrée de la variance $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

En probabilité, comme en statistique, on introduit la notion de variance pour estimer l'étendu de la dispersion des différentes valeurs de X par rapport à leur moyenne pondérée E(X).

Pourquoi l'écart type ?

On suppose que les valeurs x_i d'une variable aléatoire X sont exprimées en DT, l'espérance qui représente un gain moyen est à son tour exprimée en DT. Par contre la variance est exprimée en « DT au carré ». En revanche $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ est exprimé en DT comme les valeurs de x_i.

Activité 2

Une usine rectifie des pièces d'horlogerie. A l'issue du processus de fabrication, une pièce peut présenter 0, 1, 2 ou 3 défauts d'aspects.
Soit X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de défauts d'une pièce triée au hasard dans un lot. La loi de X est définie par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
p_i	0,920	0,060	0,016	0,004

1- a) Calculer l'espérance mathématique de X.
b) Calculer la variance, puis l'écart type de X.
2- Le prix de vente d'une pièce dépend du nombre de défauts qu'elle présente.

Nombre de défauts	0	1	2	3
Prix de vente en DT	30	20	15	5

Soit Y : La variable aléatoire ayant pour valeur le prix de vente d'une pièce tirée au hasard dans un lot Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$

Propriété

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Cette expression est souvent plus pratique pour le calcul de la variance.

Activité 3

On tire simultanément trois jetons d'une urne contenant 5 jetons indiscernables au toucher numérotés 0, 1, 2, 3 et 4. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de chiffres pairs portés par les trois jetons tirés.
1- Déterminer la loi de probabilité de X.
2- Calculer $E(X)$; $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Activité 4

On lance deux dés et on lit la somme S des chiffres des faces supérieures. Si $S \leq 5$ alors on perd 1 DT ; si $6 \leq S \leq 9$ alors on gagne 0,4 DT ; si $10 \leq S \leq 12$ alors on gagne 1,5DT. X étant la variable aléatoire qui à une issue associe le gain algébrique correspondant.
1- Donner la loi de probabilité de X.
2- Calculer $E(X)$. Ce jeu est il favorable pour le joueur ?
3- Calculer l'écart type de X.

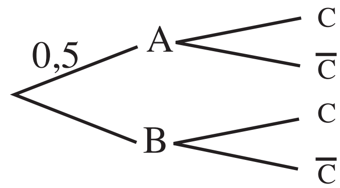
Activité 5

Un sac contenant deux boites A et B indiscernables au toucher. A contient trois boules blanches et quatre boules noires et B contient quatre boules blanches et trois boules noires. Une épreuve consiste à choisir au hasard l'une des boites A ou B puis tirer simultanément trois boules.

On note A l'événement « La boite choisie est A »

B l'événement « La boite choisie est B »

C l'événement « Obtenir une seule boule blanche »



1- a) Compléter l'arbre pondéré ci-contre.

b) Calculer $p(C)$.

2- Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches obtenues.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer E(X) ; V(X) et σ(X).

Activité 6

Une étude de marketing, portant sur la vente d'un article, est réalisée sur deux marchés potentiels M_1 et M_2 .

Profit x_i (en milliers de DT)	20	25	30	35	40	50
Marché M_1 P_i	20%	30%	20%	15%	10%	5%
Marché M_2 P'_i	10%	45%	27%	10%	6%	2%

1- a) Calculer les espérances mathématiques de profit E1 et E2 pour ce produit suivant les marchés M_1 et M_2

b) Calculer leurs écarts types σ_1 et σ_2 .

2- Le directeur du marketing est une personne enthousiaste qui pense que son produit sera très demandé.

Expliquer pour quoi il choisira de lancer son produit sur le marché M_1 ?

3- Le directeur du marketing est un homme prudent compte tenu de la conjoncture, ci-dessus, il préférera le marché M_2 . Justifier son choix.

Schéma de Bernoulli

Activité 1

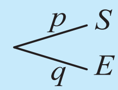
On jette, une seule fois, un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6, de façon que la probabilité d'obtenir un nombre pair soit le double de celle d'obtenir un nombre impair.

Soient les événement S : « obtenir un nombre impair » et E : « obtenir un nombre pair ».

Calculer p(S) et p(E).

Définition

Une expérience aléatoire à deux issues contraires S (succès) et E (échec), de probabilités respectives p et q, avec p+q = 1, est dite épreuve de Bernoulli.



Une expérience constituée par la répétition de *n* épreuves de Bernoulli $n \geq 2$, identiques et indépendantes les unes des autres est un schéma de Bernoulli.

Activité 2

Proposer trois exemples correspondant à une épreuve de Bernoulli et préciser pour chacun p(S) et p(E)

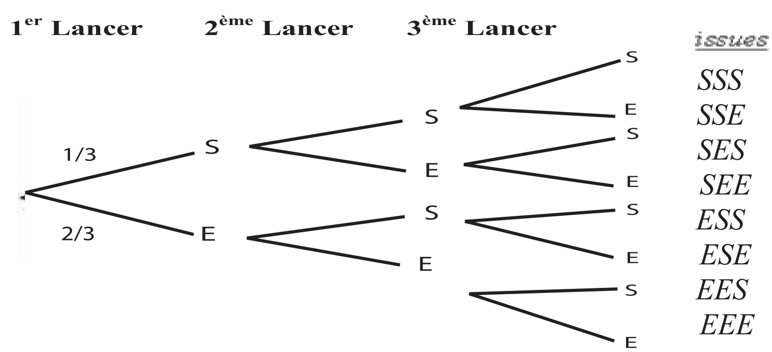
Activité 3

Un dé truqué est tel que la probabilité d'obtenir le chiffre 1 à chaque lancer soit égale à 0,8. Les cinq autres éventualités 2, 3, 4, 5 et 6 ont la même probabilité.
1- On jette une fois ce dé. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair ?
2- On lance ce dé quatre fois de suite.
  a- Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois un nombre impair ?
  b- Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois un nombre impair ?

Loi binomiale

Activité 1

On considère l'épreuve de Bernoulli de l'activité 1 du paragraphe précédent.
S désigne le succès et E désigne l'échec. On suppose que l'on répète cette épreuve trois fois. On s'intéresse à l'événement A : « obtenir exactement deux succès »
Cette expérience peut être représentée par l'arbre si dessous :



1- Recopier et compléter l'arbre.
2- a- Donner toutes les issues qui réalisent A et vérifier qu'elles sont toutes équiprobables.
  b- Déterminer p(A).
  c- Pourquoi y a-t-il C_3^2 issues qui réalisent l'événement A ?

3- Justifier que $p(A) = C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3}$.

4- Calculer la probabilité de chacun des événements :

B : « il y a exactement trois sucées » ; C : « il n'y a pas de sucées »

D : « il y a exactement un sucées » ; E : « il y au moins un sucées »

Activité 2

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone, une enquête sur la qualité de ses produits.

On admet que lors d'un appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est $\frac{1}{3}$.

Un enquêteur a une liste de 10 personnes à contacter. Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. On considère la variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre des personnes de cette liste qui ont décrochés.

1) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

2) Pour chaque valeur k de X vérifier que : $p(X=k)=C_{10}^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}$.

3) Vérifier que : $E(X)=10\times\frac{2}{3}$ et $V(X)=10\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$.

On considère un schéma de Bernoulli constitué par la succession de n épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes et on note p la probabilité du succès S et q la probabilité de l'échec E ($q=1-p$).

La variable aléatoire X qui, à chaque issue de cette expérience aléatoire, associe le nombre de succès obtenus, suit une loi dite loi binomiale de paramètres (n,p).

- X prend pour valeurs tous les entiers k compris entre 0 et n.
- Pour tout entier k compris entre 0 et n : $p(X=k)=C_{n}^{k}p^{k}\times q^{n-k}$

Remarque

On admet que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres (n,p) est **E(X) = n.p** et que sa variance est ***V(X) = n.p.q***

avec $q=1-p$.

Activité 3

On tire six fois de suite sur une cible. A chaque tir la probabilité d'atteindre cette cible est $\frac{2}{3}$. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois ou la cible est atteinte.

1- Déterminer la loi de probabilité de X.

2- Chaque fois où la cible est ratée on perd 1 DT et si elle est atteinte on gagne 0,5 DT. Ce jeu est il gagnant ?

Activité 4

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.
On lit le nombre sur la face cachée.
Pour $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4)$, on note p_i la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée.
Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1, p_2, p_3 et p_4 dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

1- Sachant que $p_4 = 0{,}4$ démontrer que $p_1 = 0,\ 1$, $p_2 = 0{,}2$ et $p_3 = 0,\ 3$.

2- On lance le dé trois fois de suite..

a- Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?

b- Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant

3- On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.

a- Pour $0 \le i \le 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement ($X = i$).

b- Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.

c- Calculer la probabilité de l'évènement ($X \ge 1$). On donnera une valeur arrondie au millième.

Activité 5

On prélève au hasard 50 pièces fabriquées par une chaîne d'assemblage, on admet que, lorsque la chaîne fonctionne normalement, la probabilité qu'une pièce, choisie au hasard en sortie de chaîne,soit non conforme est égale à 0.025

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de pièces non conformes sur les 50 prélevées.

1- a) Vérifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Calculer $p(X = 5)$ et $p(X \le 2)$.

2- Calculer $E(X), V(X)$ et $\sigma(X)$

3- On effectue un test de fonctionnement normal de la chaîne fondé sur le principe suivant : on prélève au hasard 50 pièces en sortie de chaîne et, si le nombre de pièces non conformes est situé dans l'intervalle $\left[E(X) - 2\sigma(X)\ ,\ E(X) + 2\sigma(X)\right]$ alors on considère que la chaîne fonctionne normalement.

a- Sur un prélèvement donné on trouve 4 pièces non conformes. La chaîne fonctionne-t-elle normalement ?

b) Montrer que la probabilité pour que la variable aléatoire X soit située dans l'intervalle $\left[E(X) - 2\sigma(X)\ ,\ E(X) + 2\sigma(X)\right]$ est supérieure à 95% (On arrondira les résultats a 3 chiffres significatifs).

Activité 6

Ahmed fait partie d'un groupe de 8 personnes suivant une formation professionnelle a raison de 6 séances hebdomadaires.

A chaque séance, le formateur interroge au hasard l'un des participants, indépendamment de l'interrogation des séances précédentes.

1- Pour une séance donnée, quelle est la probabilité qu'Ahmed soit interrogé ?

2- Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où Ahmed est interrogé durant la semaine

a) Donner la loi de X.

b) Calculer la probabilité pour qu'Ahmed soit interrogé au moins une fois dans la semaine.

c) Calculer la probabilité pour qu'Ahmed soit interrogé au plus une fois dans la semaine.

d) Calculer l'espérance de X. en déduire le nombre moyen d'interrogation concernant Ahmed sur une période de 4 semaines.

Activité 7

Un candidat à un jeu télévisé doit répondre à quatre questions de type QCM .Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte .
Le candidat répond en choisissant au hasard une réponse pour chaque question. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réponses exactes fournies par le candidat.

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) On attribue trois points par réponse juste et on retire un point par réponse fausse. Combien de points le candidat peut-il espérer obtenir ?

Simulation (lancer de deux dés à l'aide d' Excel)

On lance deux dés N fois (N=25ou N=150) et on calcule la somme S des points obtenus sur les faces supérieures des dés.
On se propose de comparer les fréquences d'apparitions de chaque valeur de S avec les probabilités théoriques d'apparitions de ces valeurs.
Les résultats sont résumés dans un histogramme, les distributions des fréquences observées sont représentées en parallèle avec les valeurs des probabilités théoriques.

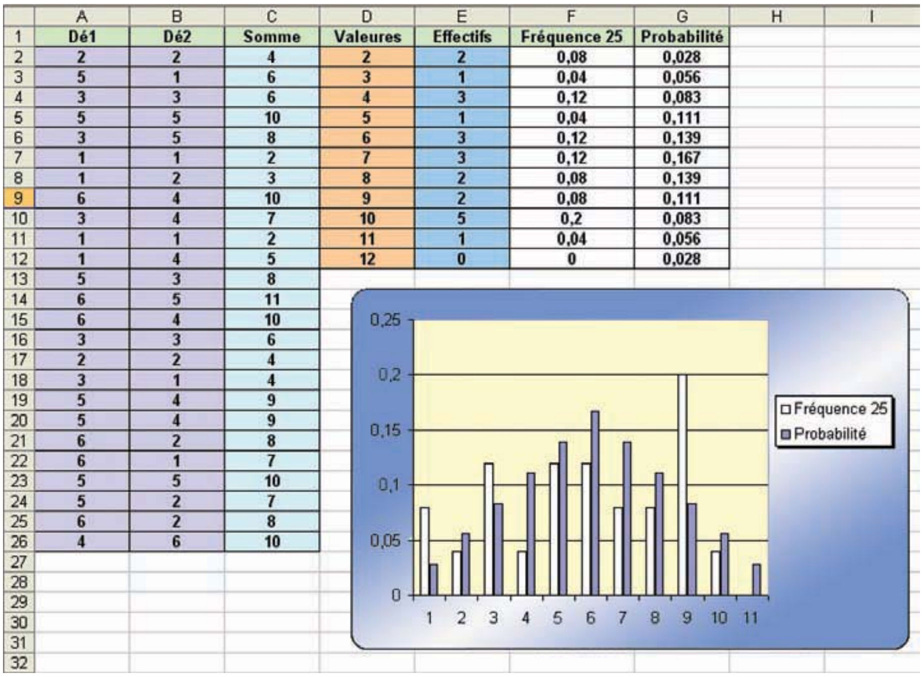
- Créer sur Excel une feuille vierge
- Dans les 25 cellules A_2 :A_{26} taper des valeurs aléatoires qui peuvent êtres prises par le dé 1 en écrivant la formule suivante dans la cellule A_i i=2...26:
  *Ai = ENT(6*ALEA()+1)*

(On écrira la formule pour A_2 (A_2 = ENT(6*ALEA()+1)) puis utiliser copier/coller))

- Faire le même travail pour le dé 2 en écrivant dans la cellule B_i i=2....26
- La formule B_i = *ENT(6*ALEA()+1)*

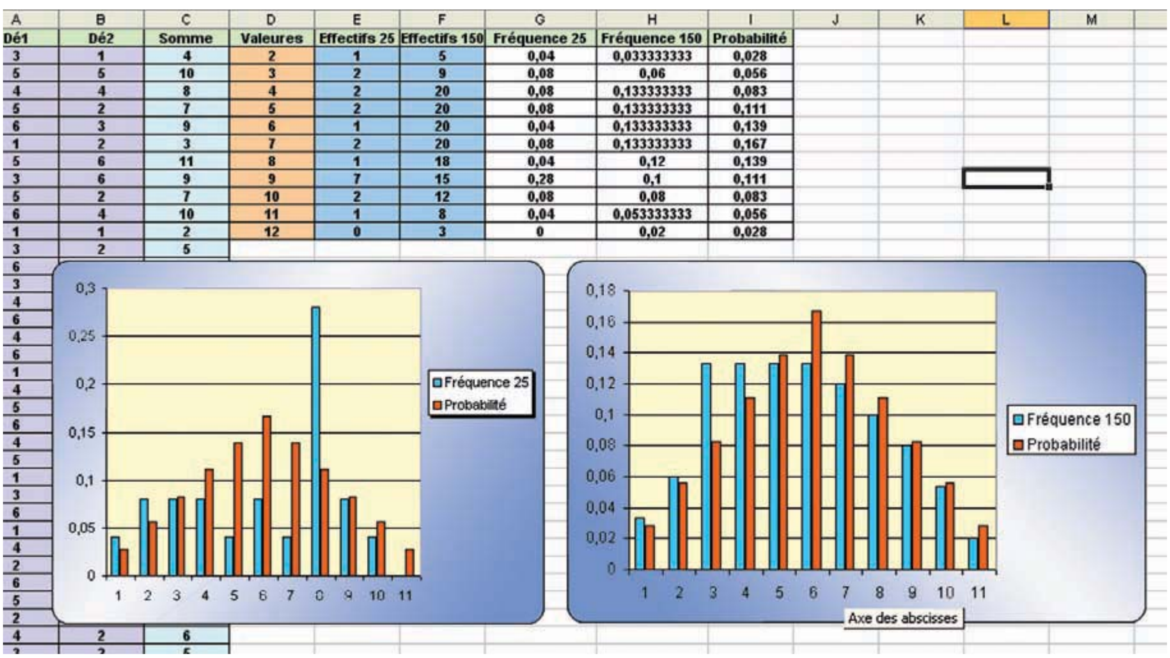
	A	B	C
1	**Dé1**	**Dé2**	**Somme**
2			
3			
4			
5			
6			

Pour calculer la somme
- Taper dans la cellule C_i la formule C_i = Ai + Bi (i =2....26)
(On écrira la formule pour C_2 ($C_2 = A_2 + B_2$) puis utiliser copier/coller))
Les Valeurs possibles de la somme sont (2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12)
- Dans les cellules de la colonne D, taper les valeurs possibles de la somme.
- Dans les cellules de la colonne E on calcule les effectifs correspondant à chaque valeur de la somme pour cela, taper dans les cellules E_i (i =2....26) la formule :
Ei = NB.SI(C2:C26;Di)
- En suite on calcule les fréquences d'apparition de chaque valeur de S au cours des 25 lancers pour cela taper dans la cellule Fi (i =2.....12) la formule : Fi = Ei/25
- Dans les cellules de la colonne G taper les valeurs théoriques des probabilités d'apparition de chaque valeur de la somme S.
- Tracer l'histogramme des Fréquences et les probabilité correspondantes
Pour afficher les histogramme sélectionner les colonnes des Fréquences et celles des probabilités en appuyant sur le l'onglet assistant Graphique  en suite choisir le type de graphique : Histogramme.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Dé1	Dé2	Somme	Valeures	Effectifs	Fréquence 25	Probabilité
2	2	2	4	2	2	0,08	0,028
3	5	1	6	3	1	0,04	0,056
4	3	3	6	4	3	0,12	0,083
5	5	5	10	5	1	0,04	0,111
6	3	5	8	6	3	0,12	0,139
7	1	1	2	7	3	0,12	0,167
8	1	2	3	8	2	0,08	0,139
9	6	4	10	9	2	0,08	0,111
10	3	4	7	10	5	0,2	0,083
11	1	1	2	11	1	0,04	0,056
12	1	4	5	12	0	0	0,028
13	5	3	8				
14	6	5	11				
15	6	4	10				
16	3	3	6				
17	2	2	4				
18	3	1	4				
19	5	4	9				
20	5	4	9				
21	6	2	8				
22	6	1	7				
23	5	5	10				
24	5	2	7				
25	6	2	8				
26	4	6	10				

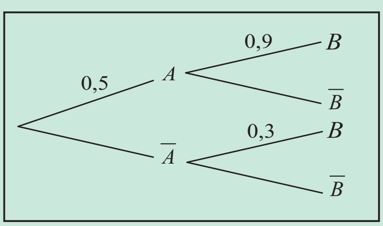
- Refaire le même travail pour N=150 et comparer les fréquences et les probabilités dans les deux cas.



Dé1	Dé2	Somme	Valeures	Effectifs 25	Effectifs 150	Fréquence 25	Fréquence 150	Probabilité
3	1	4	2	1	5	0,04	0,033333333	0,028
5	5	10	3	2	9	0,08	0,06	0,056
4	4	8	4	2	20	0,08	0,133333333	0,083
5	2	7	5	2	20	0,08	0,133333333	0,111
6	3	9	6	1	20	0,04	0,133333333	0,139
1	2	3	7	2	20	0,08	0,133333333	0,167
5	6	11	8	1	18	0,04	0,12	0,139
3	6	9	9	7	15	0,28	0,1	0,111
5	2	7	10	2	12	0,08	0,08	0,083
6	4	10	11	1	8	0,04	0,053333333	0,056
1	1	2	12	0	3	0	0,02	0,028
3	2	5						

Exercices et problèmes

1 - Une seule des réponses proposées est exacte :

<table>
<tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th></tr>
<tr><td>Q1. Le tableau ci-dessous donne les résultats d'un sondage effectué dans une population de 50 individus :
<table>
<tr><th></th><th>Fumeur</th><th>Non fumeur</th></tr>
<tr><td>Homme</td><td>5</td><td>15</td></tr>
<tr><td>Femme</td><td>10</td><td>20</td></tr>
</table>
Si l'on interroge au hasard l'un d'entre eux, la probabilité que l'interrogé soit non fumeur sachant que c'est un homme, est :</td><td>0,75</td><td>0,2</td><td>0,08</td></tr>
<tr><td>Q2. Au cours d'un concert, un amateur vidéo a enregistré 30 morceaux, 18 morceaux avec guitaristes, 24 avec pianistes, et 12 avec guitaristes et pianistes. Il visionne au hasard un des morceaux enregistrés : on note :
A : « Le morceau choisi est avec guitaristes sachant qu'il est avec pianistes »
On a : p(A) est égale :</td><td>$\frac{2}{5}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{2}{3}$</td></tr>
<tr><td>Q3. Dans l'expérience décrite à la question Q2. on note
B :Le morceau choisi est avec pianistes
C: Le morceau choisi est avec guitaristes
On a :</td><td>B et C sont indépendants</td><td>B et C ne sont pas indépendants</td><td>B et C sont incompatibles</td></tr>
<tr><td>Q4. Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre ci-dessous :


On a donc</td><td>$P(B/A)=0,8$</td><td>$p(\overline{A}\cap B)=0,15$</td><td>$p(A\cap B)=0,5$</td></tr>
</table>

Q5. Dans l'expérience décrite à la question ***Q4.*** …	A et B sont indépendantes	$P(B)=0{,}60$	$P(B)=0{,}15$
Q6. On lance une pièce de monnaie trois fois de suite. X est la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où pile est apparu. p(X=2) = …	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
Q7. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée ci dessous. a_i : 1 ; 2 ; 3 ; 4 $p(X=a_i)$: 0,2 ; 0,4 ; 0,1 ; 0,3 On a	$E(X)=11$	$V(X)=\frac{5}{2}$	$\sigma(X)=\frac{\sqrt{5}}{2}$

2 - On lance un dé régulier à six faces.
Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit :

a. pair et strictement supérieur à 4.
b. pair sachant qu'il est strictement supérieur à 4.
c. strictement supérieur à 4 sachant qu'il est pair.

3 - Une urne contient cinq jetons blancs numérotés 1, 2, 3, 4, 5 et deux jetons noirs numérotés 1, 2. On tire un jeton au hasard.
Calculer la probabilité :

a. qu'il soit noir et pair.
b. qu'il soit noir sachant qu'il est pair.
c. qu'il est pair sachant qu'il est noir.

4 - Dans un groupe de 50 personnes, composé de 30 femmes et 20 hommes, 25 personnes ont moins de 30 ans, dont 15 sont des femmes.On interroge au hasard une personne du groupe et on note :
F : « être une femme » ; et J : « avoir au moins de 30 ans ».

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

	F	$\overline{F}$	
J			
$\overline{J}$			
	0,6		

2) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants
A « La personne interrogée est une jeune femme ».
B « La personne interrogée est une femme sachant qu'elle a moins de 30 ans »
C « La personne interrogée a moins de 30 ans sachant que c'est une femme »

5 - Dans un lycée, 60% sont des filles, 40% sont des élèves externes, dont 50% sont des filles. On prend au hasard la fiche d'un élève de ce lycée. On note :
F : « l'élève est une fille » et E : « l'élève est externe »

1. Traduire ces informations dans un tableau à double entrée.
2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants
   F , E et G « Obtenir la fiche d'une élève externe ».

6 - Dans un magasin on a relevé le mode de paiement et le montant M (en DT) mentionnés sur 250 tickets de caisse. On a constaté que :

- Tous les achats strictement inférieurs à 10DTsont payés en espèces :
- La moitié des achats dont le montant M est tel que $10 \leq M < 20$ est payé en espèces :
- 16 % des achats sont payés par carte de crédit ;
- 36 % des achats ne sont pas payés en espèces.

1. Recopier et remplir le tableau ci-dessous à l'aide des informations données

Montant / Mode de paiement	M<10	$10 \leq M < 20$	$M \geq 20$	Total
Espèces		**38**		
Chèque				
Carte de Crédit		**15**		
Total	**106**			**250**

2. On choisit au hasard un ticket de caisse et on considère les événements :
   A : « Le ticket indique un montant supérieur à 20 DT »
   B : « Le ticket correspond à un paiement par chèque ».
   C « Le ticket correspond à un paiement par chèque et indique un montant supérieur à 20 DT »
   Calculer les probabilités des événements : *A, B .et C.*

3. On choisit un ticket de caisse correspondant à un paiement par chèque. Quelle est la probabilité qu'il indique un montant supérieur à 20 DT ?

7 - Deux évènements A et B vérifient :
$P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$; $P(A \cup B) = 0,7$.
Sont-ils indépendants ? Sont-ils incompatibles ?

8 - Dans le cadre d'une prévision de restructuration, la direction d'une entreprise a fait une enquête auprès de ses employés. Le siège social devra être placé dans une autre ville, il s'agit de prévoir combien d'employés sont susceptibles de changer de lieu de travail. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

	célibataire	**marié**	**Total**
Refuse de changer de lieu de travail	13%		65%
Accepte de changer de lieu de travail			
total			100%

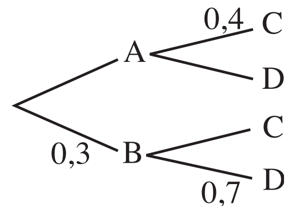
On choisit au hasard un employé de l'entreprise. On s'intéresse aux événements suivants :

A : « l'employé accepte de changer de lieu de travail » ;

B : « l'employé est célibataire » ;

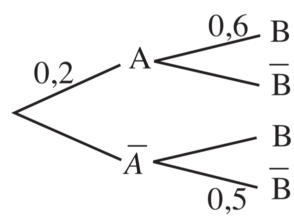
1. Recopier et compléter le tableau ci-dessus sachant que les évènements A et B sont indépendants.
2. Quelle est la probabilité pour qu l'employé choisi accepte de changer de lieu de travail sachant qu'il est marié ?

9- Compléter l'arbre pondéré suivant :



Calculer $p(A\cap C)$; $p(A\cap D)$; $p(B\cap C)$ et $p(C)$.

10 - Avec les données figurant sur l'arbre ci-dessous, calculer $p(B)$

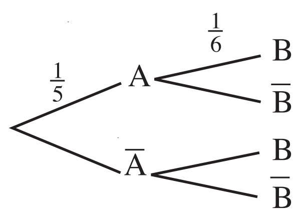


1. En déduire la probabilité de "A sachant B".

2. Utiliser les résultats obtenus pour compléter le tableau ci-dessous :

	B	$\overline{B}$	
A	0,12		0,2
$\overline{A}$			

11 - Une expérience aléatoire où interviennent deux événements A et B est modélisée par l'arbre suivant :



Avec les seuls renseignements donnés, pouvez vous écrire, sur les branches toutes les probabilités manquantes.

On suppose que les deux événements A et B sont indépendants. Montrer $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Recopier et compléter l'arbre précédent.

12 - Des enfants jouent avec deux dés, l'un bleu tétraédrique à 4 faces numérotées de 1à 4 et l'autre blanc à 6 faces numérotées de 1 à 6.

Règle du jeu :

On lance les deux dés.

La partie est gagnée si le dé bleu tétraédrique indique 4 ou si le dé blanc indique 1 ou 6. Toutes les autres configurations sont perdantes.

Un enfant joue une partie. On note :

G : « la partie est gagnante » ;

A : « le dé tétraédrique indique une face autre que 4 ».

1. ***a.*** Donner les probabilités $P(A)$ et $P_A(G)$.

   b. Calculer la probabilité $P(G)$.
2. Déterminer la probabilité que l'on ait obtenu 4 au dé à quatre faces, sachant que la partie est gagnée.

13 - Une école de commerce a effectué une enquête, en janvier 2000, auprès de ses jeunes diplômés des trois dernières promotions, afin de connaître leur insertion professionnelle.

A la première question, trois réponses et trois seulement sont proposées :

- A : « La personne a une activité professionnelle » ;
- B : « La personne poursuit ses études » ;
- C : « La personne recherche un emploi ».

On a constaté que 60% des réponses ont été envoyées par des filles.

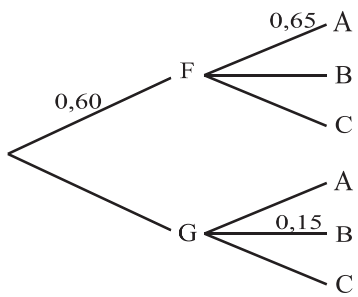
Dans l'ensemble des réponses reçues, on a relevé les résultats suivants :

*65 % des filles et 55 % des garçons ont une activité professionnelle ;

* 20 % des filles et 15 % des garçons poursuivent leurs études.

1. On prend au hasard la réponse d'un jeune diplômé.

a. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



Montrer que la probabilité qu'il poursuive ses études est égale à 0,18.

b. Calculer la probabilité qu'il exerce une activité professionnelle.

2. On prend au hasard la réponse d'une personne qui poursuit ses études ; quelle est la probabilité que ce soit la réponse d'une fille (on donnera le résultat sous forme fractionnaire) ?

3. On prend au hasard la réponse d'une personne à une activité professionnelle ; quelle est la probabilité que ce soit la réponse d'un garçon ?

14 - Une entreprise vend des calculatrices d'une certaine marque. Le service après-vente s'est aperçu qu'elles pouvaient présenter deux types de défauts, l'un lié au clavier et l'autre lié à l'affichage.

Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante : la probabilité pour une calculatrice tirée au hasard de présenter un défaut de clavier est égale à 0,04.

En présence du défaut de clavier, la probabilité que la calculatrice soit en panne d'affichage est de 0,03.

Alors qu'en l'absence de défaut de clavier, la probabilité de ne pas présenter de défaut d'affichage est 0,94.

On note :

- C l'événement : « La calculatrice présente un défaut de clavier » ;
- A l'événement : « La calculatrice présente un défaut d'affichage ».

Dans cet exercice, les probabilités seront écrites sous forme de nombres décimaux arrondis au millième.

1. ***a.*** Préciser à l'aide de l'énoncer les probabilités suivantes :

$$p_{\overline{C}}(\overline{A}),\ \ p_C(A)\ \text{ et }\ p(C)$$

b. Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.

2. On choisit une calculatrice de cette marque au hasard.
a. Calculer la probabilité que la calculatrice présente les deux défauts.
b. Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier.
c. En déduire $p(A)$.
d. Montrer que la probabilité de l'événement « la calculatrice ne présente aucun défaut » arrondie au millième est égale à 0,902.

3. Un client choisit successivement au hasard trois calculatrices de cette marque .On admet que le nombre des calculatrices est suffisamment important pour que le choix des 3 calculatrices soit assimilé à 3 tirages indépendants.
a. Calculer la probabilité pour que les trois calculatrices ne présentent aucun défaut.
b. Calculer la probabilité pour qu'au moins une calculatrice ait un défaut.

15 - Une variable aléatoire Y prend les valeurs 3, 4, 5, et 6.
Quelle est la loi de probabilité de Y sachant que :

$$p(Y>5)=\frac{1}{2};\quad p(Y<5)=\frac{1}{3}\quad et\quad p(Y=3)=p(Y=4)?$$

Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ et l'écart type $V(Y)$.

16 - Une variable aléatoire X prend les valeurs 1, 2, 3 ou 4.
Déterminer sa loi de probabilité et son espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ dans chacun des cas suivants :

1. La probabilité $p(X=x_i)$ est proportionnelle à la valeur x_i de la variable aléatoire.
2. La probabilité $p(X=x_i)$ est proportionnelle au carré de la valeur x_i.
3. La probabilité $p(X=x_i)$ est inversement proportionnelle à la valeur de x_i.

17 - Pendant 100 jours un vendeur de livres a relevé le nombre de contrats qu'il a fait signer par jour :

Contrat signé x_i	0	1	2	3	4
Nombre de jour	25	37	22	10	6

L'employeur de ce vendeur estime que la probabilité pour que son vendeur obtienne X contrats, un jour donné, est égale à la fréquence de ce nombre de contrats x_i pour les cents jours étudiés.
Calculer l'espérance de vente de ce vendeur. Calculer l'écart type de X.
Si ce vendeur touche 40 DT par contrat signé, quelle est son espérance de gain

18 - Lors d'une étude de marché, la société PAPEX (société de fabrication de papiers) a étudié la répartition de ses clients selon deux critères, leur besoin en papier et leur possibilité de financement :
35 % de ses clients utilisent moins de 12 tonnes de papier par ans et, parmi ceux-ci, 80 % sont solvables.
40 % de ses clients utilisent de 12 à 20 tonnes de papier par an et, parmi ceux-ci, 85 % sont solvables. Pour le reste de ses clients, seul 10 % ne sont pas solvables.

1. La société choisit au hasard l'un de ses clients. Quelle est la probabilité :

a. Pour qu'il utilise plus de 20 tonnes de papier ?
b. Pour qu'il ne soit pas solvable ?

2. La société désire relancer ses clients solvables. Elle choisit au hasard l'un de ses clients solvables. Quelle est la probabilité pour qu'il utilise au plus 20 tonnes de papier ?

3. La société établit un échantillon de 20 de ses clients choisis au hasard. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de clients solvables parmi ces 20 clients.
a. Déterminer la loi de X et son espérance. Interpréter concrètement la réponse.
b. Calculer la probabilité de l'événement $(X = 4)$.

19 - Une société de location de matériel informatique propose exclusivement deux types de portable A ou B, avec ou sans lecteur DVD.
Une étude statistique, sur l'ensemble des clients louant un portable dans les magasins de cette société, a permis d'établir que 60% de ces clients louent un ordinateur portable de type A, et, parmi ceux-ci, 20% désirent un lecteur DVD.
En revanche, 70% des clients louant un portable B demandent un lecteur DVD.
On choisit au hasard un client louant un portable et on considère les événements :
A : « le client loue un portable A » ;
C : « le client loue un portable A avec lecteur DVD ».
D : « le client loue un portable avec lecteur DVD ».

1. ***a.*** Déterminer les probabilités de ces événements.
b. Déterminer la probabilité que le portable soit de type A sachant qu'il a un lecteur DVD.

2. On suppose que le nombre de client est suffisamment important pour que la probabilité de louer un portable avec lecteur DVD soit identique pour chacun des clients indépendant les uns des autres.
On choisit trois clients au hasard.
Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre des clients qui ont loué un portable avec un lecteur DVD.
a. Quelle est la probabilité que les trois clients louent un portable avec lecteur DVD ?
b. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer son espérance.

20 - Un tireur à l'arc envoie 10 flèches sur une cible. On admet que chaque tir est indépendant des précédents et que la probabilité d'atteindre la cible est pour chaque tir égale à 0,75.

1. Justifier que l'expérience décrite ci-dessous est un schéma de Bernoulli. En préciser les paramètres.

2. Calculer la probabilité :
a. d'attendre exactement 7 fois la cible.
b. d'attendre exactement une fois la cible.
c. d'attendre au moins 5 fois la cible.
(Les résultats seront arrondis à trois décimales.)

3. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la cible est atteinte.
a. Calculer l'espérance de X.
b. Calculer la probabilité des événements : $(X \leq 1)$ et $(3 < X \leq 5)$

21 - On lance deux dés parfaitement équilibrés 5 fois de suite, et à chaque lancer, on calcule la somme des deux numéros sortis.

1. Calculer la probabilité pour que le lancer des deux dés donne une somme égale à 7. (On pourra constituer un tableau à double entré répertoriant tous les cas possibles.)

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers (parmi les cinq) dont la somme des numéros sortis est égale à 7.
Justifier que la loi de X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

3. Calculer la probabilité des événements :
a. $(X=0)$ ***b.*** $(X \geq 1)$ ***c.*** $(1 \leq X < 5)$

4. Calculer l'espérance de X. (Les résultats seront arrondis à deux décimales.)

5. Calculer V(X) et $\sigma(X)$.

22 - Une urne contient 4 boules rouges et 3 boules noires. On extrait simultanément et au hasard 2 boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité d'extraire deux boules noires.

2. On extrait n fois de suite 2 boules simultanément, en les remettant dans l'urne après chaque tirage.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages parmi les n, dont le résultat est 2 boules noires.
Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

3. a. Calculer en fonction de n la probabilité p_n d'extraire au moins une fois 2 boules noires.
b. déterminer le plus petit entier n vérifiant $p_n \geq 0{,}99$.

4. a. calculer en fonction de n l'espérance de X
b. Déterminer le plus petit n_1 tel que l'espérance de X soit supérieure ou égale à 2.

23 - A partir de 2001, une association d'aide à la recherche médicale envoie chaque année à Monsieur X un courrier pour l'inviter à l'aider financièrement par un don. Monsieur X a répondu favorablement en 2001 en envoyant un don. On admet que, chaque année à partir de 2002, la probabilité pour que Monsieur X fasse un don est égale à 0,9 s'il a fait un don l'année précédente et à 0,4 s'il n'a rien donné l'année précédente.

On note pour tout entier naturel n :

- E_n l'événement : « Monsieur X est donateur en 2002+n » ;
- P_n la probabilité de E_n ;

1- Traduire les données en formes de probabilités conditionnelles concernant les événements E_{n+1}, E_n. $\overline{E}_n$.

2- ***a.*** Précisez la valeur de P_0.
b. Calculez $P(E_1 \cap E_0)$ et $P(E_1 \cap \overline{E_0})$. Déduisez-en la valeur de P_1.

3- ***a.*** Montrez que $P(E_{n+1} \cap E_n) = 0.9P_n$ et que $P(E_{n+1} \cap \overline{E_n}) = 0.4(1-P_n)$ pour tout entier n.
b. Déduisez-en que $P_{n+1} = 0.5P_n + 0.4$ pour tout entier n.
c. Quelle est la probabilité pour que Monsieur X soit donateur en 2005 ?

4- On déduit une suite (U_n) en posant pour tout entier naturel n : $U_n = P_n - 0{,}8$.
a. Démontrez que la suite (U_n) est géométrique. Précisez sa raison et son premier terme.

b. Exprimez (U_n) en fonction de n.
c. Déduire que $P_n = 0{,}1 \times 0{,}5^n + 0{,}8$ pour tout entier naturel n.
d. Calculez $(0{,}5)^5$, $(0{,}5)^{10}$, $(0{,}5)^{20}$ et ensuite P_0, P_{10}, P_{20}.

Problème 1 -

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits.
On admet que lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est 0,4 et que s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est 0,3.
On pourra construire un arbre pondéré.
1. On note :
- D_1 l'évènement : « la personne décroche au premier appel » ;
- R_1 l'évènement « la personne répond au questionnaire lors du premier appel ».

Calculer la probabilité de l'évènement R_1.
2. Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est 0,3 et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est 0,2. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.
On note :
- D_2 l'évènement : « la personne décroche au second appel ».
- R_2 l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du second appel ».
- R l'évènement : « la personne répond au questionnaire ».

Montrer que la probabilité de l'évènement R est 0,236.
3. Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel. (On donnera la réponse arrondie au millième)
4. Un enquêteur a une liste de 25 personnes à contacter. Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Quelle est la probabilité pour que 20% des personnes répondent au questionnaire? (On donnera la réponse arrondie au millième)

Problème 2 –

Pour les questions 1 et 2, on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à 10^{-3} près.
Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.
1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies.
On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.
a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. Calculer l'espérance mathématique de X.
2. Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie.
On considère les évènements suivants :
C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »,
C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,
R : « L'enfant prend une bille rouge »,
V : « L'enfant prend une bille verte ».
a. Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.
b. Calculer la probabilité de l'évènement R.

c. Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?
3. L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.
a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.
b. Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0,99$.

Problème 3 –

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.
Si le test est positif (c'est-à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois.
Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.
Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70% des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65% d'entre eux passent le second test avec succès.
On note T_1 l'évènement : « le premier test est positif ».
On note C l'évènement : « l'écran est acheminé chez le client ».
1. On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.
Déterminer les probabilités des évènements T_1, et C.
2. La fabrication d'un écran revient à 300 DT au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois.
Cela lui coûte 50 DT de plus si l'écran doit être testé une seconde fois.
Un écran est facturé a euros (a étant un réel positif) au client.
On introduit la variable aléatoire X qui, à chaque écran fabriqué, associe le « gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.
a. Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de a.
b. Exprimer l'espérance de X en fonction de a.
c. À partir de quelle valeur de a, l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?

Problème 4 –

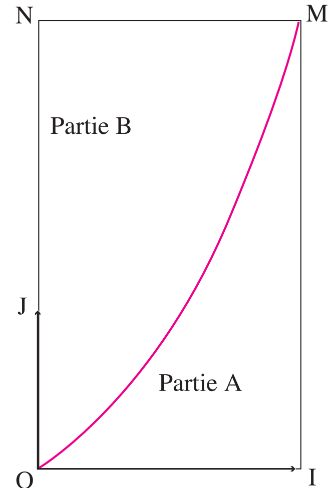
Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique).
12% des personnels sont des médecins et 71% sont des soignants.
67% des médecins sont des hommes et 92%des soignants sont des femmes.
On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} près.
1. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.
a. Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?
b. Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?
c. On sait que 80% du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.
En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.
2. Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de 40 tirages successifs indépendants avec remise).
Quelle est la probabilité que, sur les 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins?

Problème 5 –

Première partie

Calculer l'intégrale $\int_0^1 xe^x dx$.

Deuxième partie



La figure ci-contre représente une cible rectangulaire OIMN telle que, dans le repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$, la courbe C reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur R par $f\ (x) = xe^X$.
Cette courbe partage la cible OIMN en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.
Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B. On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontières de la cible, ni la courbe C.

Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives.

1. Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\frac{1}{2e}$.
Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B?

2. On lance de manière indépendante trois fléchettes.

a. Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A. Définir la loi de probabilité de X. En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.

b. Soit E l'évènement : « Exactement deux fléchettes atteignent la partie A ».
Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de E.

c. Soit F l'évènement : « les trois fléchettes atteignent la partie B ».
Calculer la probabilité de F (on donnera la valeur exacte).
Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans la partie B?

3. On lance cette fois de manière indépendante n fléchettes.

a. Déterminer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A.

b. Déterminer le plus petit naturel n tel que $p_n \geq 0.99$.

DE LA STATISTIQUE AUX PROBABILITES

Au XVI^{ème} siècle, à la cour des rois de France, les questions sur les jeux de hasard conduisent Pascal et Fermat à élaborer une approche quantitative du hasard. Ainsi, en 1654, Pascal adresse à l'Académie Parisienne des Sciences sa "nouvelle géométrie du hasard [...] joignant la rigueur des démonstrations de la science à l'incertitude du sort, et conciliant ces deux choses d'apparence contradictoire".

Mais c'est en 1714 que paraît une oeuvre capitale qui fera le lien entre statistique et probabilité : *Ars Conjectandi* du suisse Jacques Bernoulli. Celui-ci y énonce un théorème important : la probabilité de l'apparition d'un résultat dans une épreuve est "pratiquement égale" à la fréquence d'apparition de ce résultat quand on a répété un grand nombre de fois cette même épreuve. Ainsi fut fait le lien entre probabilité et statistique.

Une autre approche ...

On vient de lancer un dé un millier de fois et on a trouvé que la fréquence d'apparition de la face 6 est 0,1335. On veut lancer le dé une fois de plus ce dé, et on ce pose la question : "Quelle sont les chances d'obtenir la face 6 ?"

Si les statistiques descriptives sont statiques, les probabilités sont dynamiques :

il y a toujours une action liée à la situation, et suivant celle-ci, on s'intéresse à ce qui peut arriver.

Jacques Bernoulli (1654-1705)

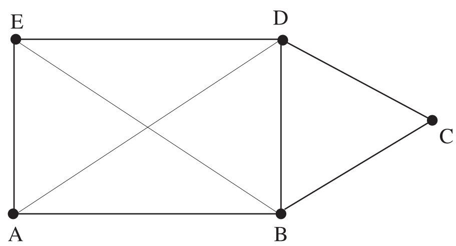
Mathématicien suisse, il compléta le calcul infinitésimal de Leibniz et posa les fondements du calcul des probabilités

Chapitre 10

LES GRAPHES

Activité 1 **QCM.**

Soit le graphe G ci-dessous



G

Une seule des réponses proposées est exacte.

	a	b	c
Q_1. L'ordre de G est….	6	5	8
Q_2. Le sommet C est…	isolé	de degré 2	Adjacent au sommet A
Q_3. La somme des degrés des sommets de G est égale à…	10	12	16
Q_4. Le graphe G est ….	Complet.	Connexe.	Non connexe.
Q_5. A-B-C-D-B	n'est pas une chaîne de G.	est une chaîne de G.	Est un cycle de G.
Q_6. E-D-C-D-E est ….	une chaîne de longueur 5.	N'est pas une chaîne	une chaîne fermée.

Activité 2

Dire, en justifiant, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

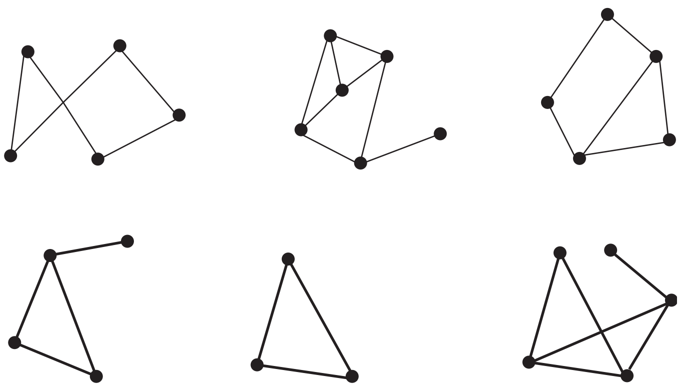
A_1 : Un sous graphe d'un graphe complet est complet.
A_2 : Un graphe non complet admet un sous graphe complet.
A_3 : Un sous graphe d'un graphe connexe est connexe.
A_4 : Le nombre de sommets d'un graphe est égal au nombre de ses arêtes.
A_5 : La somme des degrés des sommets d'un graphe est paire.
A_6 : Un graphe peut avoir un seul sommet de degré impair.

I- *Revoir:*

1) Chaîne eulérienne – Cycle eulérien:

Activité 1

Dire, en justifiant, si chacun des graphes suivants admet une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien et donner, dans l’affirmative, un exemple de telle chaîne ou de tel cycle.



Théorème d’Euler (admis).

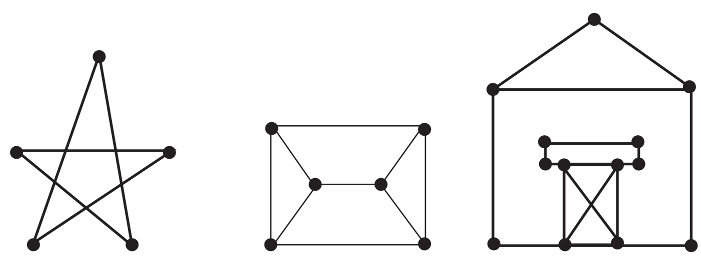
❖ Un graphe connexe G admet une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair ou deux uniquement de ses sommets sont de degré impair (ce sont les extrémités de la chaîne).

❖ Un graphe connexe G admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

Un graphe ayant plus de deux sommets de degré impair ne possède pas de chaîne eulérienne.

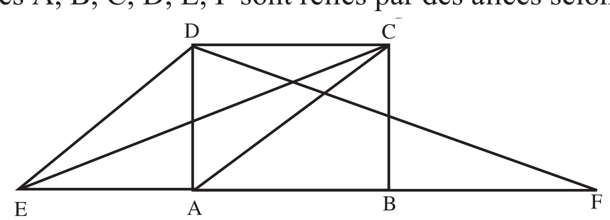
Activité 2

Peut – on dessiner les graphes ci-contre, sans lever le crayon et en ne passant qu’une seule fois sur chaque arête ?



Activité 3

Une grande surface est conçue de telle façon que six secteurs (alimentation, hi-fi, etc…) notés A, B, C, D, E, F sont reliés par des allées selon le graphe ci-dessous.



1 . a) Le graphe est-il connexe ?

b) Compléter le tableau suivant :

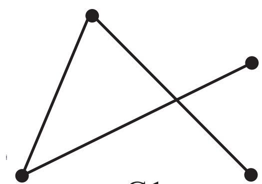
Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré						

2. Un visiteur désire parcourir l'ensemble des allées en ne passant par chacune d'elle qu'une seule fois .
   a). Montrer que son souhait est réalisable.
   b). Donner un exemple d'un tel parcours.

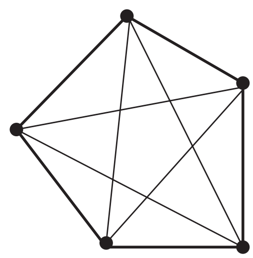
2) Coloriage d'un graphe

Activité 1

Colorier les graphes suivants en utilisant le minimum de couleurs. :



G1

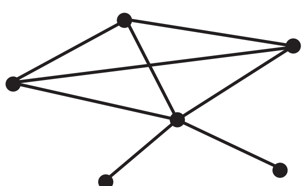


G2

Colorier un graphe consiste à affecter une couleur à chacun de ses sommets de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

Activité 2

On donne le graphe G ci-dessous.



G

Le nombre chromatique d'un graphe G, noté γ(G), est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour sa coloration

❖ Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à l'ordre de tous ses sous graphes complets.
❖ Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à $(\Delta + 1)$ où Δ est le plus grand degré de ses sommets.

1- Quel est le plus grand degré des sommets de G ?
2- Déterminer un sous graphe complet de G d'ordre 4.
3- Déterminer le nombre chromatique de G, noté γ(G).

Activité 3

Dans le service administratif d'une entreprise, on observe des incompatibilités d'humeur entre certains employés recensés dans le tableau suivant.
La présence d'une croix à l'intersection de la ligne i et la colonne j signifie que les employés ne peuvent pas travailler dans le même bureau.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
E_1		x			x	x
E_2	x		x	x	x	x
E_3		x		x	x	x
E_4		x	x		x	
E_5	x	x	x	x		x
E_6	x	x	x		x	

1- Représenter cette situation par un graphe.
2- Montrer que le nombre minimum de bureaux nécessaires à la répartition des employés qui peuvent travailler ensemble est égal à 4.

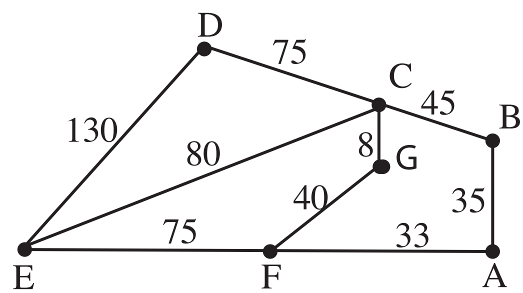
Activité 4

Six compagnies de voyage proposent des visites de monuments et lieux touristiques : A, B,C et D .Un même lieu ne peut être visité par plusieurs groupes de compagnies différentes le même jour .La première compagnie fait visiter uniquement le lieu A ; la seconde les lieux A et C;la troisième le lieu D ; la quatrième les lieux C et D; la cinquième les lieux A et B; la sixième le lieu B.
Comment organiser les visites d'une journée pour que chaque compagnie visite au moins un site ?

3) Recherche d'une plus courte chaîne

Activité1

Le graphe pondéré ci-contre représente un réseau routier. Sur chacune de ses arêtes on a marqué la distance séparant les deux villes reliées par cette arête.
1-Déterminer le poids de la chaîne : F-G-C-D
2- En appliquant l'algorithme de Dijkstra, vérifier que les plus courtes chaînes reliant le sommet A à n'importe quel autre sommet du graphe sont données par le tableau suivant :



A	B	C	D	E	F	G	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	0+35 35(A)	∞	∞	∞	0+33 33(A)	∞	F
	35(A)	∞	∞	33+75 108(F)		33+40 73(F)	B
		35+45 80(B)	∞	108(F)		73(F)	G
		73+8 80(B)	∞	108(F)			C
			80+75 155(C)	80+80 108(F)			E
			108+130 155(C)				D

3- Donner les plus courtes chaînes et les poids de chacune de ces chaînes, reliant :
a) A à C
b) A à D
c) A à G

Activité 2

Un fournisseur se prépare à livrer un produit à ses clients d'une ville A à une ville F .
Le tableau ci- contre indique les livraisons de ville à ville ainsi que la longueur du trajet, en kilomètres, entre deux villes.

1- Représenter les liaisons possibles par un graphe pondéré .
2- Déterminer la chaîne donnant la durée minimale du trajet de A à F.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		20		60	80			
B	20		10					
C		10		20			90	80
D	60		20		20			40
E	80			20		70		30
F					70		20	
G			90			20		20
H			80	40	30		20	

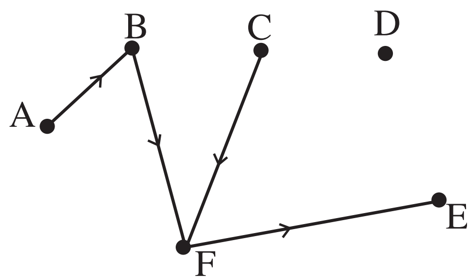
II- Graphes orientés - Matrice associée à un graphe

1) Graphe orienté:

Activité 1

Le tableau suivant indique les rues à sens unique d'une partie d'une ville.

	A	B	C	D	E	F
A		x				
B			x			x
C				x		x
D						x
E				x		
F	x				x	



1- Recopier le graphe G ci-dessus et le compléter en utilisant le tableau.
Le graphe obtenu est appelé ***graphe orienté.***
2- Déterminer un parcours, en voiture, de A à D en 4 étapes.
3- a) Peut–on déterminer un parcours de A à E, en voiture, en 2 étapes?
b) Peut–on déterminer un parcours de A à E, à pieds, en 2 étapes?

Définition :

On appelle **graphe orienté** un graphe où chaque arête est orientée, c'est-à-dire qu'elle ne peut être parcourue que dans un seul sens.

Vocabulaire :

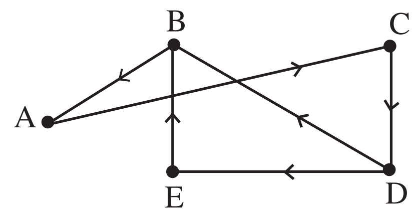
Dans un graphe orienté,

- Une arête orientée A⟶B est appelée **arc** d'origine A et d'extrémité B.
- Une **boucle** est un arc dont l'extrémité et l'origine sont les mêmes.
- **Une chaîne orientée** ou **un chemin** est une suite d'arcs tel que l'extrémité de chacun soit l'origine du suivant.
- **Un cycle orienté** ou **un circuit** est une chaîne orientée fermée composée d'arcs tous distincts.

Activité 2

Soit le graphe G ci – contre.

1) Donner une chaîne orientée reliant D à C.
2) Donner une chaîne orientée reliant B à E.
3) Peut-on déterminer un cycle orienté d'origine et d'extrémité A ?
4) Combien a-t-on d'arêtes orientées sortant de D?
5) Combien a-t-on d'arêtes orientées arrivant à B?



G

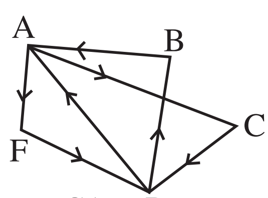
2) Chaîne orientée eulérienne - Cycle orienté eulérien

Définitions :

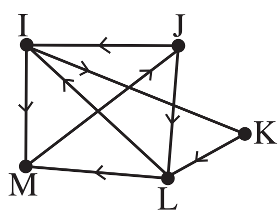
- Une chaîne orientée est dite **eulérienne** si elle passe une fois et une seule par chaque arête.
- **Un cycle orienté eulérien** est une chaîne orientée eulérienne fermée.
- Un graphe orienté est dit **eulérien** s'il admet un cycle orienté eulérien.

Activité 3

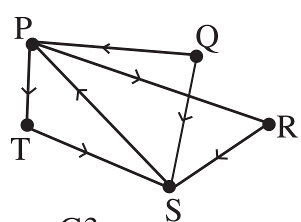
On donne les graphes G_1, G_2 et G_3 suivants :



G1



G2



G3

Le tableau 1 (Respectivement 2 et 3) indique le nombre d'arêtes orientées rentrant, noté d^-, et le nombre d'arêtes orientées sortant, noté d^+, de chaque sommet du graphe G_1 (respectivement G_2 et G_3).

1

	A	B	C	D	E
$\mathbf{d^+}$		1			
d^-				2	
$d^+ - d^-$					

2

	I	J	K	L	M
d^-					
d^+					
$d^+ - d^-$					

3

	P	Q	R	S	T
d^-					
d^+					
$d^+ - d^-$					

1- Recopier et compléter les tableaux 1,2 et 3.
2- Vérifier que G_1 est un graphe orienté eulérien et que G_2 admet une chaîne orientée eulérienne.
3- G_3 admet-il un cycle orienté eulérien ? une chaîne orientée eulérienne ?
4- Conjecturer.

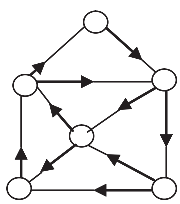
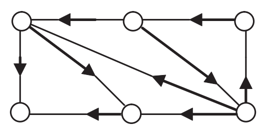
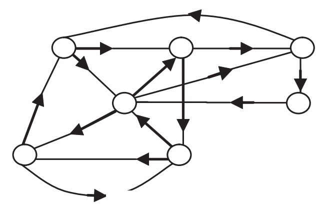
Théorème(admis) :

Soit G un graphe connexe orienté.
Pour tout sommet X de G, On note $\mathbf{d^{+}(X)}$ (respectivement $\mathbf{d^{-}(X)}$) le nombre d'arêtes orientés **sortant** de x(respectivement **rentrant** à X).

- ❖ G admet un cycle orienté eulérien si et seulement si pour tout sommet X du G on a : $\mathbf{d^{+}(X) = d^{-}(X)}$
- ❖ G admet une chaîne orientée eulérienne qui n'est pas un cycle orienté si et seulement si pour tout sommet X de G $\mathbf{d^{+}(X) = d^{-}(X)}$ sauf pour deux sommets exactement (A et B), on a : $\mathbf{d^{+}(A) = d^{-}(A) + 1}$ **et** $\mathbf{d^{+}(B) = d^{-}(B) - 1}$.

Activité 4

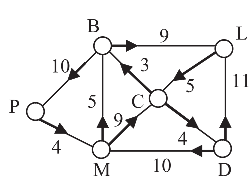
Dire, en justifiant, si chacun des graphes suivants admet un cycle orienté eulérien ou une chaîne orientée eulérienne.

Activité 5

Le graphe ci-dessous donne le plan d'un quartier avec le sens de circulation sur chaque arc, ainsi que le temps de parcours en voiture, en minutes, entre les différents lieux.

1- Ines affirme qu'elle peut parcourir, en voiture, toutes les rues du quartier une fois et une seule. A-t- elle raison? Justifier la réponse.
2- Elle désire se rendre de son domicile D à la piscine P, toujours en voiture, en un temps minimal .Quel chemin doit – elle suivre?

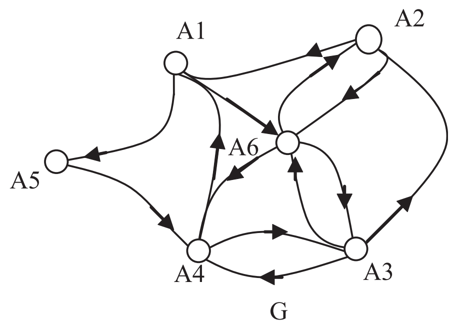


3) Matrice associée à un graphe

Activité 1

Un livreur d'une société de vente à domicile doit, dans son après – midi, charger son camion à l'entrepôt noté A_1, livrer cinq clients qu'on note A_2, A_3 A_4, A_5, et A_6, puis retourner à l'entrepôt.
Le réseau routier, tenant compte des sens de circulation, est représenté par le graphe G ci-après :

1- Recopier et compléter le tableau suivant en indiquant, dans la case correspondante, le nombre d'arêtes orientées reliant deux sommets.



	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	0					1
A_2						
A_3				1		
A_4			1			
A_5						
A_6	0					

La matrice carrée A d'ordre 6 ainsi obtenue est appelée **matrice associée** au graphe G.
2- Que signifie le terme qui se trouve à l'intersection de la 3-ième ligne et la 2-ième colonne de la matrice A? à l'intersection de la i-ième ligne et la j-ième colonne ($1 \leq i,j \leq 6$) ?
3- a) Comparer $d^+(A_2)$ et la somme des termes de la deuxième ligne de la matrice A.
b) Comparer $d^-(A_6)$ et la somme des termes de la sixième colonne de la matrice A.
4- Comment obtient – on $d^+(A_i)$ et $d^-(A_i)$?
5- Montrer, à partir de A, que le graphe G admet une chaîne orientée eulérienne.

1-Définition :

Soit G un graphe dont les sommets sont $S_1, S_2, ..., S_n$ .On appelle **matrice associée** au graphe G, la matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ d'ordre n où le terme a_{ij} est le nombre d'arêtes d'origine S_i et d'extrémité S_j .

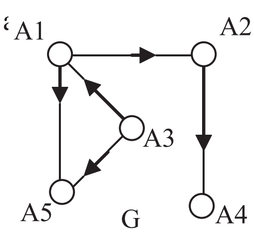
2-Conséquences :

- ❖ $d^+(S_i)$ est égal à la somme des termes de la i-ième ligne de la matrice associée à ce graphe.
- ❖ $d^-(S_i)$ est égal à la somme des termes de la i-ième colonne de la matrice associée à ce graphe.

Activité 2

Reconnaître, parmi les matrices M_1, M_2 et M_3 suivantes, celle qui est a

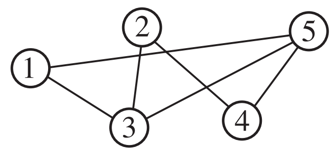
$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Activité 3

1- Vérifier que la matrice A suivante est la matrice associée au graphe G ci – contre

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



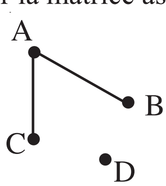
2- Justifier la symétrie de la matrice A par rapport à sa diagonale.
3- Comparer la somme de tous les termes de la matrice avec la somme des degrés des sommets de G. Justifier le résultat obtenu.

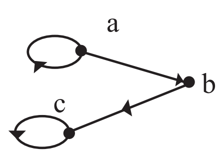
3-Remarque :

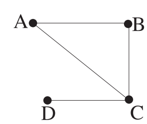
- ❖ La somme de tous les termes de la matrice associée à un graphe non orienté est égale à la somme des degrés des sommets de ce graphe.
- ❖ La matrice associée à un graphe non orienté est symétrique par rapport à sa diagonale.

Activité 4

1- Donner la matrice associée à chacun des graphes suivants :







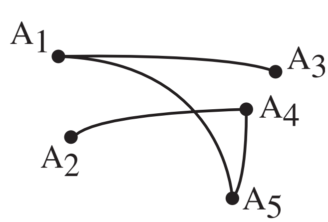
2- Représenter un graphe dont la matrice associée est :

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) Distance de deux sommets - Diamètre d'un graphe :

Activité 5

Le graphe G ci-dessous représente les liaisons ferroviaires existant entre différentes villes nommées A_1 , A_2, A_3, A_4et A_5.
1) Ecrire toutes les chaînes :
  a) de longueur 2 reliant A_1à A_4 ;
  b) de longueur 3 reliant A_1 à A_5 ;
  c) de longueur 3 reliant A_1 à A_2.



La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent

2) Donner la matrice A associée au graphe G.
 a) On a calculé les matrices A^2 et A^3 suivantes :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que les termes a_{14} ; a_{15} et a_{34} de la matrice A^2 correspondent bien aux nombres de chaînes de longueur 2 reliant : A_1 à A_4 ; A_1 à A_5 et A_3 à A_4 .
 c) Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant A_1 à A_5.

Théorème(admis) :

Soit G un graphe de matrice associée A.
Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est égal au terme a_{ij} de la matrice A^n.

*Une justification de ce théorème se trouve dans la partie « **maths culture** » de ce chapitre.*

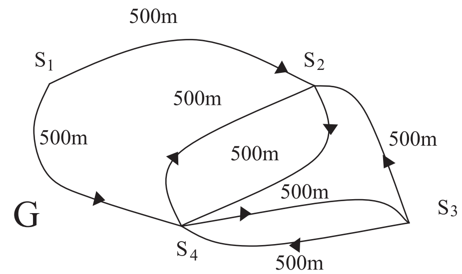
Activité 6

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à un graphe G.

1- Dénombrer les chaînes de G de longueur 2.
2- Dénombrer les chaînes de G de longueur 4.

Activité 7

Un parcours de santé est aménagé pour les sportifs dans le parc de la ville.
Le graphe G ci- contre représente ce parcours .

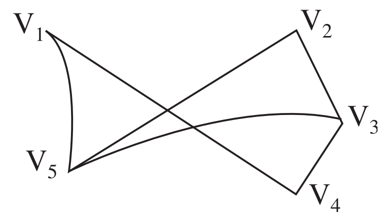


1) Donner la matrice A associée au graphe **G** .
2) Après calcul, on obtient les matrices A^2 , A^3, A^4 et A^5 suivantes :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \; A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Combien y a-t-il de trajets différents :
De 1 km reliant S_1 à S_4 ? De 1,5 km reliant S_3 à S_2 ? De 2 km reliant S_2 à S_3 ? De 2 km reliant S_4 à S_4 ? De 2,5 km reliant S_3 à S_4 ?

Activité 8



Le graphe ci-contre représente les liaisons routières entre cinq villes, V_1 ; V_2 ; V_3 ; V_4 et V_5

1- a) Donner tous les itinéraires possibles à suivre pour aller de V_1 à V_2.
b) Quel est celui qui a le minimum d'étapes ?

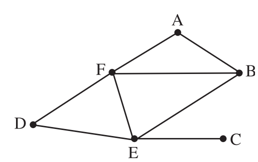
2- Vérifier que la longueur d'une plus courte chaîne reliant V_1 à V_2 est égale à 2.
Le nombre 2 ainsi trouvé s'appelle **distance** des deux sommets V_1 et V_4.

Définitions :

- ❖ **La distance de deux sommets** distincts est la longueur de la plus courte chaîne joignant ces deux sommets.
La distance est infinie, s'il n'existe pas de chaîne joignant ces deux sommets.
La distance d'un sommet à lui-même est, par convention, nulle.
- ❖ Le **diamètre d'un graphe** est la plus grande des distances entre deux sommets du graphe.

Activité 9

Un port est constitué de plusieurs bassins reliés les uns aux autres par des passerelles. Dans le graphe G ci-contre, les sommets représentent les bassins et les arêtes les passerelles qui les relient.



G

1- Quel est le nombre minimal de passerelles à franchir pour relier les deux bassins A et C ?
2- Recopier le tableau ci-contre et compléter chaque case par la distance entre les sommets correspondants.
3- En déduire le diamètre du graphe G.
4- Modifier le graphe G de façon à en faire un graphe de diamètre 2.

Distance	A	B	C	D	E	F
A	0					
B						
C						
D			2			
E						
F						

Quand l'ordre d'un graphe est assez grand, la recherche « à la main » de la distance entre deux de ses sommets et, par conséquent, la détermination du diamètre de ce graphe deviennent très difficiles.

Le théorème suivant donne une méthode permettant de trouver ces deux quantités facilement, à l'aide des matrices.

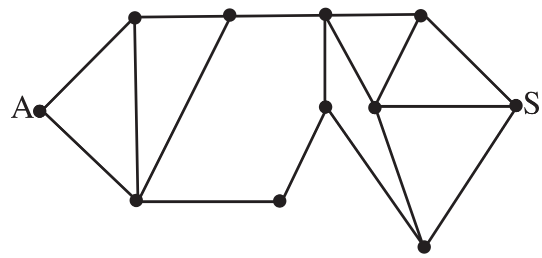
Théorème(admis) :

Soit G un graphe de matrice associée A .
- ❖ La distance entre deux sommets distincts i et j est le plus petit entier naturel n ($n \geq 1$) tel que le terme d'indice i,j de A^n est non nul.
- ❖ Le diamètre du graphe G est le plus petit entier naturel n tel que la matrice $(A + Id)^n$ ait tous ses termes strictement positifs.

Activité 10

On donne le graphe G ci-dessous, sa matrice associée M, et les matrices M^4 et M^5.
Dire pourquoi la distance entre les sommets A et S est égale à 5.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$M^4 = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 10 & 13 & 7 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & 17 & 17 & 11 & 8 & 3 & 10 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 10 & 17 & 24 & 12 & 5 & 8 & 10 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 13 & 11 & 12 & 19 & 8 & 10 & 5 & 9 & 11 & 4 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 8 & 9 & 1 & 9 & 4 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & 10 & 1 & 17 & 6 & 12 & 19 & 5 & 11 \\ 3 & 10 & 10 & 5 & 9 & 6 & 29 & 15 & 16 & 20 & 19 \\ 2 & 2 & 3 & 9 & 4 & 12 & 15 & 21 & 22 & 17 & 15 \\ 2 & 2 & 4 & 11 & 3 & 19 & 16 & 22 & 31 & 15 & 21 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 7 & 5 & 20 & 17 & 15 & 20 & 14 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 & 11 & 19 & 15 & 21 & 14 & 20 \end{pmatrix}$$

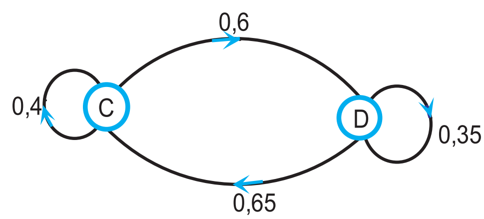
$$M^5 = \begin{pmatrix} 20 & 34 & 41 & 23 & 13 & 11 & 20 & 5 & 6 & 5 & 5 \\ 34 & 38 & 46 & 44 & 20 & 21 & 18 & 14 & 17 & 7 & 7 \\ 41 & 46 & 44 & 51 & 32 & 17 & 27 & 17 & 18 & 15 & 9 \\ 23 & 44 & 51 & 28 & 22 & 17 & 49 & 20 & 22 & 25 & 24 \\ 13 & 20 & 32 & 22 & 6 & 25 & 16 & 15 & 23 & 7 & 14 \\ 11 & 21 & 17 & 17 & 25 & 12 & 58 & 36 & 34 & 47 & 36 \\ 20 & 18 & 27 & 49 & 16 & 58 & 42 & 64 & 83 & 41 & 51 \\ 5 & 14 & 17 & 20 & 15 & 36 & 64 & 52 & 68 & 49 & 60 \\ 6 & 17 & 18 & 22 & 23 & 34 & 83 & 68 & 74 & 71 & 68 \\ 5 & 7 & 15 & 25 & 7 & 47 & 41 & 49 & 71 & 34 & 52 \\ 5 & 7 & 9 & 24 & 14 & 36 & 51 & 60 & 68 & 52 & 50 \end{pmatrix}$$

III- Graphes probabilistes

Activité 1

Un compte bancaire peut être créditeur ou débiteur.
L'évolution mensuelle du compte bancaire d'un certain client est telle que
- Lorsque son compte est créditeur à la fin d'un mois, la probabilité qu'il le soit encore à la fin du mois suivant est 0,4.
- Lorsque son compte est débiteur à la fin d'un mois, la probabilité qu'il le soit encore à la fin du mois suivant est 0,35.

1) La situation peut être représentée par le graphe orienté G ci-dessous



G

où :
- les sommets sont les deux états : C « le compte est créditeur » et D « le compte est débiteur ».
- les arêtes sont orientées et pondérées par les probabilités conditionnelles de passer d'un état à un autre, d'un mois au suivant.

Calculer la somme des poids des arêtes orientés issues de C puis la somme des poids des arêtes orientés issues de D

On dit qu'il s'agit d'un **graphe probabiliste**.

2) Recopier le tableau ci-contre et compléter chaque case par le poids de l'arête orientée correspondant.
La matrice carrée M d'ordre 2 ainsi obtenue est appelée **la matrice de transition** du graphe G qui est à 2 sommets.

	C	D
C		0,6
D		

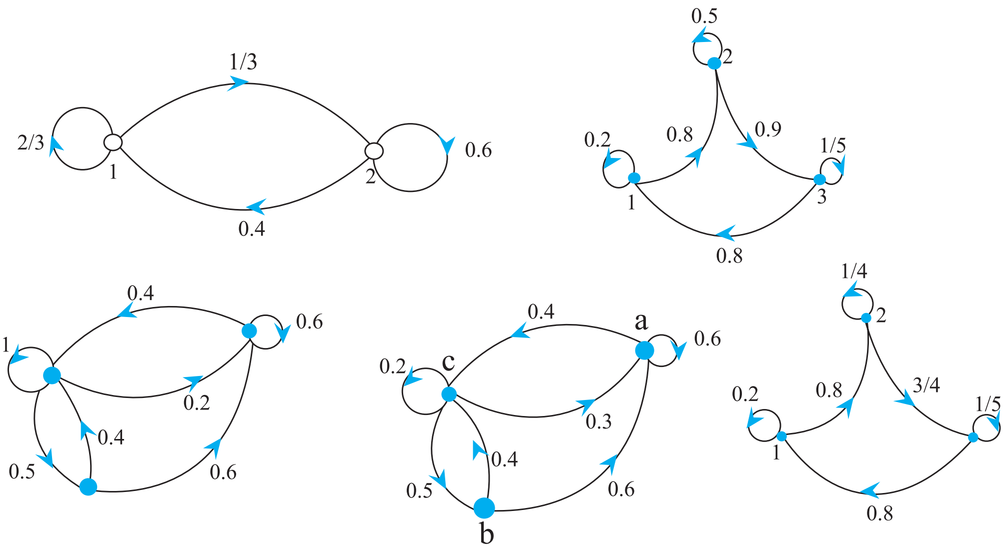
Définitions :

- On appelle **graphe probabiliste** un graphe orienté et pondéré dont la somme des poids des arêtes orientées sortant de chaque sommet vaut 1.
- On appelle **matrice de transition** d'un graphe probabiliste à n sommets, la matrice carrée d'ordre n dont le terme figurant à la i-ième ligne et la j-ième colonne est égal au poids de l'arête allant du sommet i au sommet j, si elle existe,et à 0 sinon.

Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser une évolution d'un état vers un autre. Les sommets du graphe sont les états possibles et le poids d'une arête orientée issue du sommet i et d'extrémité j est la probabilité de transition de l'état i à l'état j.

Activité 2

Parmi les graphes suivants indiquer ceux qui sont des graphes probabilistes et donner leur matrice de transition.



Activité 3

Représenter un graphe probabiliste dont la matrice de transition est :

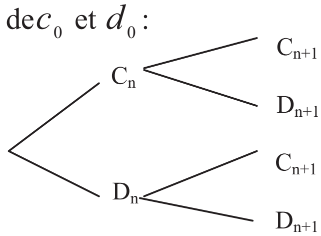
a) $M_1 = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$ b) $M_2 = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,2 & 0,65 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}$ c) $M_3 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,9 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

Activité 4

Reprenons l'activité 1.
A l'état initial, on note C_0 l'événement : « le compte est créditeur » et D_0 l'événement : « le compte est débiteur ».
On pose c_0 la probabilité de C_0 , d_0 la probabilité de D_0, c_n la probabilité de l'événement C_n : « le compte est créditeur à la fin du n-ième mois » et d_n la probabilité de l'événement D_n : « le compte est débiteur à la fin du n-ième mois » .

1) a) A l'aide d'un arbre de probabilité, exprimer en fonction de c_0 et d_0 :

i) c_1 et d_1 . ; ***ii)*** c_2 et d_2 .



b) Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre,et vérifier que pour tout entier n≥ 1 :

$c_{n+1} = 0,4.c_n + 0,65.d_n$

$d_{n+1} = 0,6.c_n + 0,35.d_n$.

2) Notons, pour tout entier n ≥ 1, $p_n = \begin{pmatrix} c_n & d_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste au n-ième mois et $p_0 = (c_0 \quad d_0)$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste à l'état initial.

a)Vérifier, en utilisant les résultats de la première question, que:
$p_1 = p_0 \times M$; $p_2 = p_1 \times M$ et $p_{n+1} = p_n \times M$ où M est la matrice de transition du graphe G
(voir activité1)
b)En déduire alors que, pour tout n∈ IN , $p_n = p_0 \times M^n$

Théorème(admis) :

Soit M la matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre supérieur ou égal à 2.
Si p_n est la matrice ligne décrivant l'état probabiliste à l'étape n et p_0 est la matrice ligne décrivant l'état probabiliste à l'état initial, alors $p_n = p_0 \times M^n$

Remarque :

Si l'état initial est p_1 alors $p_n = p_1 \times M^{n-1}$

Activité 5

Une personne joue à la machine à sou. Elle estime à 0,15 ses chances de gagner au départ .
Puis à chaque jeu, elle pense avoir :
- Une chance sur deux de gagner au jeu suivant si elle vient de gagner.
- Deux chances sur cinq de gagner au jeu suivant si elle vient de perdre.

L'état probabiliste initial est donc $p_0 = (0.15 \quad 0.85)$
On désigne par a_n la probabilité de gagner le n-ième jeu et par b_n celle de le perdre
1) Représenter cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
2) donner sa matrice de transition.
3) Montrer par récurrence que $M^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}+\frac{5}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n & \frac{5}{9}-\frac{5}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n \\ \frac{4}{9}-\frac{4}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n & \frac{5}{9}+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n \end{pmatrix}$
4) En déduire a_n et b_n en fonction de n.
5) Vérifier alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{4}{9}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{5}{9}$
6) Vérifier que (4/9 5/9) est l'unique solution de l'équation $(x \quad y) \times M = (x \quad y)$

Théorème(admis) :

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition ne comporte pas de zéro, l'état p_n à l'étape n converge vers un état p, dit **stable,** indépendante de l'état initial p_0. De plus p est l'unique solution de l'équation $X \times M = X$ où $X = (x \quad y)$ avec $x + y = 1$

Activité 6

On considère une grande population d'acheteurs de yaourts. On suppose que l'effectif de cette population est stable .Une entreprise commercialise des yaourts sous la marque Y. 30 % des acheteurs de yaourts achètent la marque Y.
L'entreprise décide de faire une campagne publicitaire pour améliorer ses ventes.

Au bout d'une semaine, une enquête indique que :
· 20 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts des autres marques achètent maintenant des yaourts Y.
· 10 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts Y achètent maintenant des yaourts des autres marques.
L'entreprise continue sa campagne publicitaire. On fait l'hypothèse que l'évolution des résultats obtenus à l'issue de la première semaine de campagne publicitaire est la même les semaines suivantes.
1) Dessiner le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
2) Soit $X_0 = (\ 0{,}3 \quad 0{,}7\ )$ la matrice ligne décrivant l'état initial de la population.
a) Donner la matrice de transition (notée *A*) associée au graphe précédent.
b) Déterminer la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard après deux semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y.
3) On admet que, pour tout entier naturel *n*, on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)0{,}7^n & \frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)0{,}7^n \\ \frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)0{,}7^n & \frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)0{,}7^n \end{pmatrix}$$

Avec l'hypothèse ci-dessus, l'entreprise peut-elle espérer atteindre une part de marché de 70 % ? Justifier.

Activité7

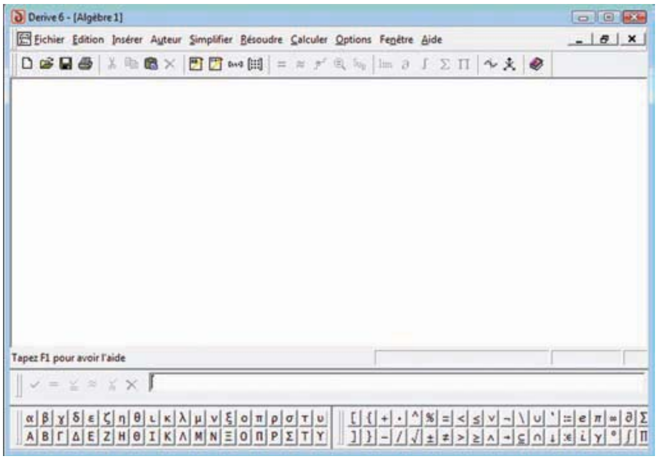
Un guide touristique classe chaque année les hôtels d'une certaine région en deux catégories selon la qualité de leurs prestations. Les plus confortables sont classés dans la catégorie A, les autres dans la catégorie B. On constate que, chaque année, 5% des hôtels de la catégorie A sont relégués dans la catégorie B, alors que 20% des hôtels de la catégorie B sont promus dans la catégorie A.
1) Réaliser un graphe décrivant cette situation.
2) Ecrire la matrice de transition de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique.
3) En 2006, le classement était tel que le quart des hôtels étaient dans la catégorie A.
Calculer l'état de l'année 2007, puis celui de l'année 2008.
4) L'état (0,5 0,5) est-il stable ? Justifier la réponse.
5) Trouver vers quel état converge ce système.

Avec l'ordinateur

Utilisation d'un logiciel de calcul formel (Derive) pour calculer une puissance entière d'une matrice.

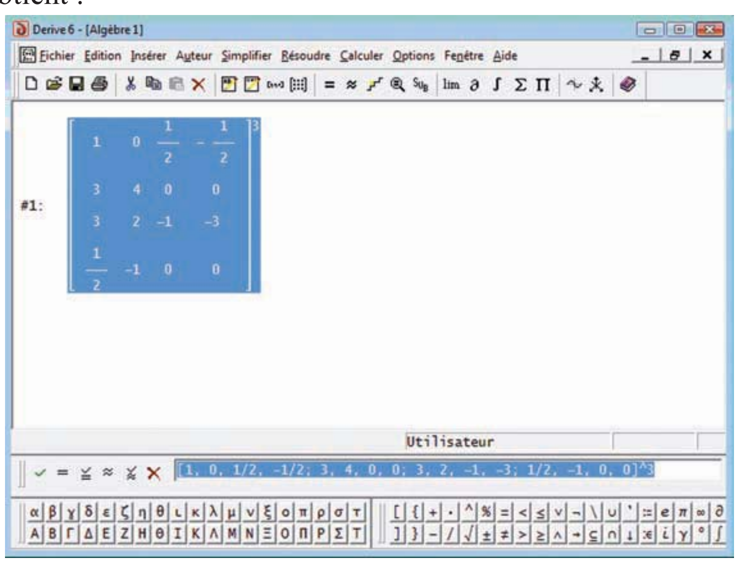
Activité 1

1°) Exécuter le logiciel Derive. On obtient :



4°) On veut calculer $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$, Pour cela on introduit dans la barre de calcul de

Derive $\left[1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2};3,\ 4,\ 0,\ 0;\ 3,\ 2,\ -1,\ -3;\frac{1}{2},\ -1,\ 0,\ 0\right]$^3 et en valide par la touche Entrer au clavier, on obtient :

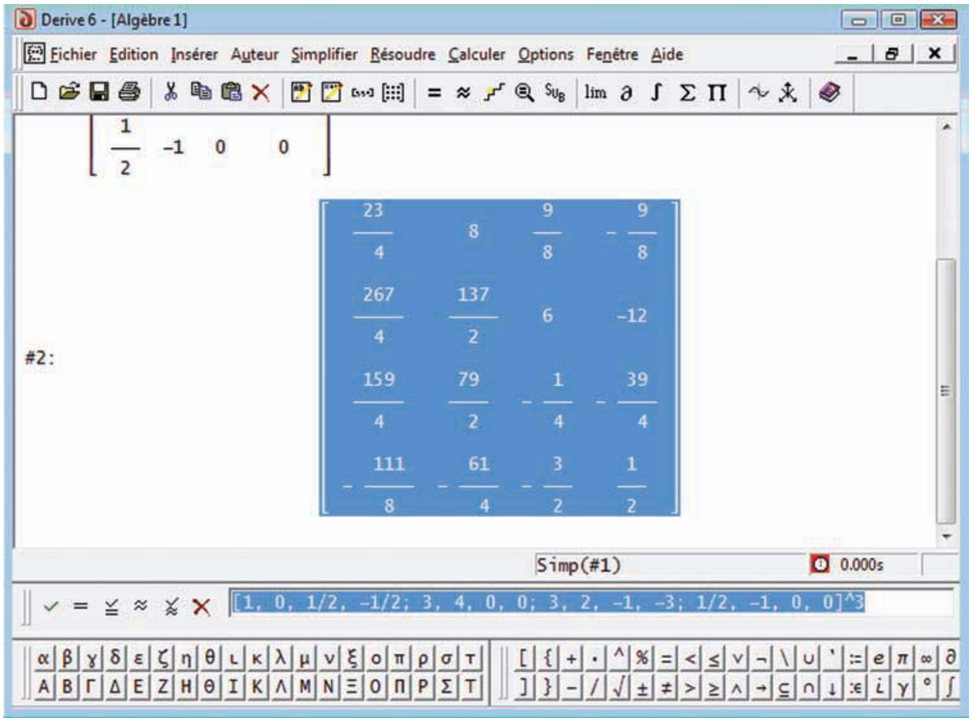


Pour obtenir le résultat : aller dans

Simplifier/ = Basique

Ou bien le raccourci $\boxed{=}$

On obtient :



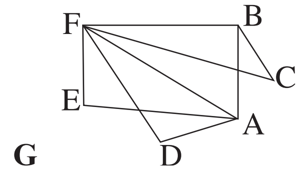
Activité 2

En utilisant le procédé de l'activité 1, calculer :

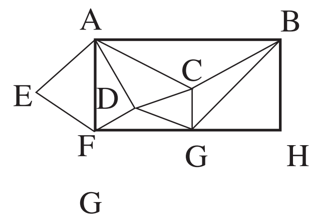
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{10} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & \frac{2}{5} \\ -2 & \frac{1}{2} & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & -3 & -4 \end{pmatrix}^{22}$$

Exercices et problèmes

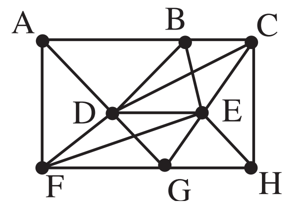
1-Répondre par vrai ou Faux à chacune des affirmations suivantes en justifiant les réponses.
a) Le graphe G ci-contre admet un cycle eulérien.
b) Le graphe G admet une chaîne eulérienne.
c) La chaîne D-A-B-C-F-E-F-A-E est une chaîne eulérienne de G.



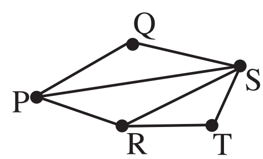
2- Soit le graphe G ci-contre.
a) G admet -il une chaîne eulérienne ? Pourquoi ?
b) G admet -il un cycle eulérien ? Si oui, lequel ? Si non, proposer une modification du graphe pour qu'il en admette un.



3-Le ramassage des ordures ménagères dans la ville dont un plan est représenté ci-contre, à l'aide d'un graphe, doit être effectué en minimisant le trajet à effectuer.
Les sommets sont les différents carrefours et les arêtes les voies de circulation.
a) Est-il possible de partir d'un carrefour et d'y revenir en empruntant chaque voie une fois et seule ?
b) Le graphe ci-dessus admet-il une chaîne eulérienne ? Si oui, en déterminer une.

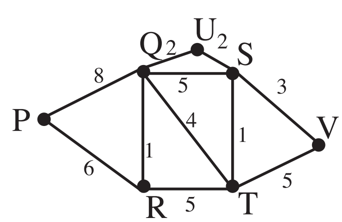


4-Pour chaque question, cocher une case sur chaque ligne, la case «Vrai»ou la case «Faux».
1.Dans le graphe ci-contre, il est possible de définir une chaîne eulérienne…

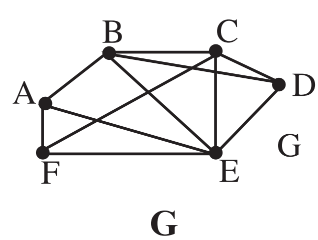


	Vrai	Faux
a) Partant de Q et finissent en T.	☐	☐
b) Partant de S et finissent en S.	☐	☐
c) Partant de P et finissent en R.	☐	☐

2. Dans le graphe pondéré ci-contre, la plus courte chaîne pour aller de P à V…

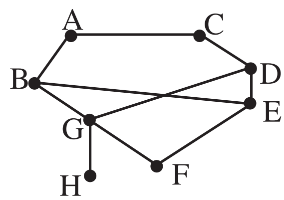


	Vrai	Faux
A pour poids 16.	☐	☐
A pour poids 14.	☐	☐

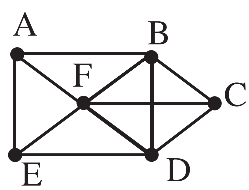


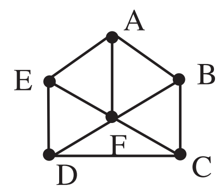
5- a) Citer deux chaînes de longueur 3 reliant les sommets A et D du graphe G ci-contre.
b) Pour chacune des chaînes ci-dessous Donner sa longueur, dire si elle est fermée et préciser s'il s'agit d'un cycle eulérien.
A-B-D-C-F-A ; A-E-C-F-E-A et B-D-C-F-E-A

6- Recopier le graphe ci-dessous et utiliser l'algorithme de Welch-Powell pour le colorier.



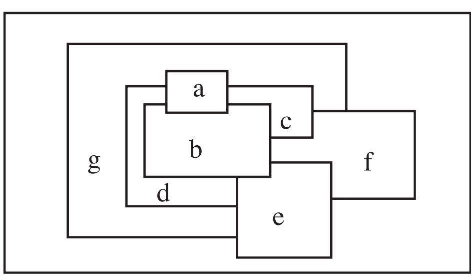
7- Encadrer le nombre chromatique de chacun des graphes ci-dessous par deux nombres entiers (il n'est pas demandé de chercher ce nombre chromatique).





8- Le plan ci-dessous représente différents échantillons de papier posés les uns sur les autres délimitant ainsi sept zones à colorier de telle façon que si deux d'entre elles ont une frontière commune alors elles seront de couleurs différentes.

a) Représenter la situation par un graphe G.
b) Colorier le graphe G avec l'algorithme de Welch-powell.
c) Reproduire le plan et colorier comme souhaité



9- T est le graphe ci-contre .

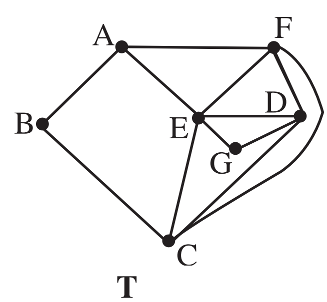
1.On note γ(T)le nombre chromatique de T.

a) Dire pourquoi le sous graphe constitué des sommet C ;D ;E et F est complet.

b) Démontrer que $4 \leq \gamma(T) \leq 6$.

c) Déterminer la valeur de $\gamma(T)$.

2.On considère un groupe d'élèves notés A, B, C, D, E, F et G. Pour un exposé, les élèves se mettent en équipes, mais il faut respecter les incompatibilités entre les élèves.



Dans le tableau ci-après, chaque croix indique une incompatibilité entre les élèves correspondants.

	A	B	C	D	E	F	G
A		X			X	X	
B	X		X				
C		X		X	X	X	
D			X		X	X	X
E	X		X	X		X	X
F	X		X	X	X		
G				X	X		

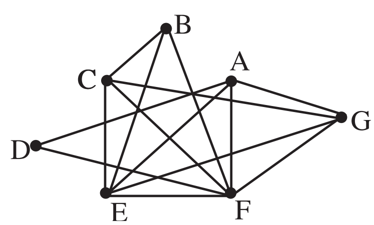
a) Si l'on décide de modéliser ce tableau d'incompatibilité par le graphe T, quel sens faut-il donner à l'existence d'un arrête entre deux sommets ?
b) Combien d'équipes faudra-t-il créer en minimum ?
Proposer une répartition des élèves en équipes (une équipe peut comporter un seul élève).

10- Un laboratoire de produits pharmaceutiques de première urgence doit livrer un médicament le plus rapidement possible à un certain nombre de pharmacie de la région.
Il ne dispose à ce moment que d'un seul véhicule. Le départ est de A et les différentes pharmacies sont nommées B, C, D, E, F et G.
Mettre au point un parcours qui soit le plus rapide possible, sachant que le temps de parcours sont indiqués dans le tableau ci-dessus.

	A	B	C	D	E	F	G
A		8	5	6	3	5	2
B	8		7	9	6	2	9
C	9	7		3	6	5	5
D	6	9	3		9	8	4
E	3	6	6	9		4	6
F	5	2	5	8	4		7
G	2	9	5	4	6	7	

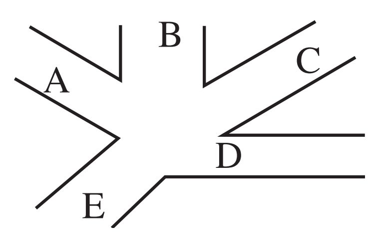
11- Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle. A ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale : A ;B ;C ; D ;E ;F et G.
Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle.
Les arêtes du graphe T ci-contre indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.

1. Colorier le graphe T.
2. Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ?
3. Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.



T

12- Ce schéma représente un carrefour.
Le tableau ci-dessous précise les« franchissements » possibles de ce carrefour. (la circulation de A vers E est considérée comme un « franchissement » même si on ne traverse pas le carrefour).



En arrivant par …	A	B	C	D	E
Il est possible d'aller en …	C, E	A, E, D	A, D	C, A	C, D

Les franchissements AC et BE ne peuvent naturellement pas être autorisés simultanément sous peine de collision.

On se propose de déterminer le nombre minimal de phases des feux de signalisation nécessaire au bon fonctionnement de ce carrefour.

a) Modéliser cette situation à l'aide d'un graphe dont :
- Les sommets représentent les franchissements possibles (AC, CA, AE, BA, BE,…)
- Les arêtes reliant les sommets représentant des franchissements ne peuvent pas être simultanés sous peine de collision.

b) Montrer que (EC ; AC ; DB ; CD ; DA) est un sous graphe complet d'ordre 5.

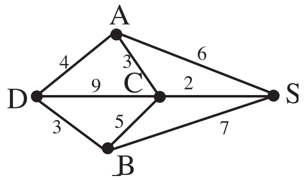
c) Que peut-on dire de sommet DA ? en déduire un encadrement du nombre chromatique du graphe.

d) Proposer une coloration de graphe. En déduire son nombre chromatique.

e) Que peut –on dire d'un ensemble de sommets ayant même couleur ? a quoi peut correspondre le nombre chromatique de ce graphe ?

13- Le graphe suivant représente les différents itinéraires pour aller de D à S.

Le poids des arêtes est le coût, en DT, du trajet effectué entre deux villes nommées par des sommets.



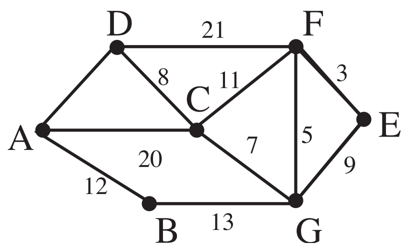
a) Quel est le poids de la chaîne D-A-C-S ?

b) Quelle est la chaîne de poids minimal ?

c) Quelle est la longueur de la chaîne D-A-C-S ?

14- Des touristes sont logés dans un hôtel noté A. Un guide fait visiter six cites touristiques noté B,C,D,E,F et G.

Les tronçons de route qu'il peut emprunter sont représentés sur le graphe ci-contre : (le long de chaque arête figure la distance en kilomètres de différents tronçons).



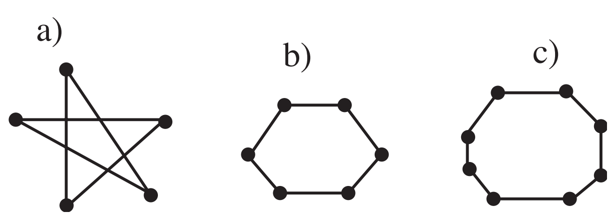
1.a) A partir de l'hôtel, le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une fois et une seule sur chacun d'eux ? Justifier la réponse.

b) Même question s'il doit obligatoirement terminer son circuit à l'hôtel.

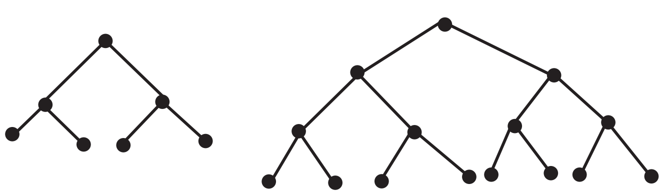
2. Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel A au site E. Justifier la réponse.

15- 1. Caractériser les graphes de diamètre 1.

2. Trouver le diamètre des graphes ci-dessous ?



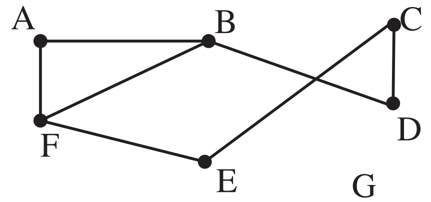
3 Quel est le diamètre de chacun des deux graphes ci- dessous ?



16- Soit G le graphe ci-contre.

1) Donner la matrice M associée à G en écrivant les sommets dans l'ordre alphabétique.

2)On a calculé les matrice M² et M^5 suivantes :



$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad M^5 = \begin{pmatrix} 14 & 21 & 12 & 9 & 9 & 21 \\ 21 & 18 & 9 & 19 & 14 & 26 \\ 12 & 9 & 2 & 12 & 12 & 9 \\ 9 & 19 & 12 & 4 & 7 & 14 \\ 9 & 14 & 12 & 7 & 4 & 19 \\ 21 & 26 & 9 & 14 & 19 & 18 \end{pmatrix}$$

a) En déduire le nombre de chaînes de longueur 2 reliant A et D. Les écrire.

b) Entre quels sommets de ce graphe y a –t-il le plus de chaînes de longueur 2 ? Les écrire.

c) Entre quels sommets y a-t- il 4 chaînes de longueur 2 ?

d) Déterminer le nombre de chaînes de longueur 5 reliant B et F.

17- Représenter un graphe non orienté dont la matrice associée est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

18- M est la matrice d'un graphe non orienté G.

a) Quel est l'ordre de G ?

b) Calculer la somme des degrés des sommets de G.

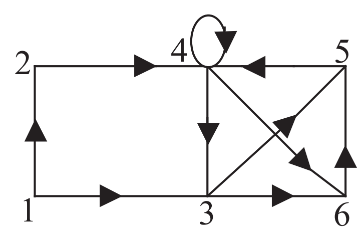
c) Quel est le nombre d'arêtes de G ?

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

19- On considère le graphe orienté ci-contre.

a) Ecrire la matrice A associée à ce graphe.

b) On a calculé les matrices A^5 et A^6 suivantes :



$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 10 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 16 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Donner le nombre de chaînes orientées de longueur 5 du sommet 1 au sommet 5. Les écrire.

d) Le graphe contient – il des chaînes orientées fermées ? Si oui combien ?

20- Dans un groupe de six personnes chacune d'elles doit choisir celles en qui elle a confiance pour partager ces activités de loisir. A, B, C, D, E et F ces personnes. On constate que :

- A n'a confiance qu'en lui-même, mais possède la confiance de B.
- E a confiance en B, C et D mais n'a la confiance que de B et C.
- B et D ont confiance en C.
- F est très méfiant et n'a même pas la confiance en soi.

a) Représenter cette situation à l'aide d'un graphe orienté dans lequel les sommets représentent ces six personnes et les arêtes orientées signifient « a confiance en ».
b) Quelle est la personne qui a la confiance du plus grand nombre d'entre elles ?

21- Cinq personnes notées A, B, C ; D et E et peuvent communiquer entre elles soit par téléphone, soit par courrier électronique.
A et B ; A et C ; B et C peuvent se téléphoner. C peut envoyer et recevoir du courrier électronique avec D et E.
a) Recopier et compléter le tableau suivant :

$\nearrow$	A	B	C	D	E
A	0				
B		0			
C			0		
D				0	
E					0

Dans ce tableau, on inscrit 1 au croisement de la ligne X et la colonne Y si la personne de la ligne X peut communiquer avec la personne de colonne Y et 0 sinon.
b) Ecrire la matrice M associée à cette situation.
c) Construire le graphe associé à cette matrice M.
d) Quelle est la personne qui peut communiquer avec le plus grand nombre directement ?
e) On admet que deux personnes peuvent communiquer par l'intermédiaire d'un troisième.
Si X peut communiquer directement avec Y et Y directement avec Z.
On admet que la matrice M²est

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice $S = M + M^2$.
f) Déduire le résultat que chacune des cinq personnes peut communiquer avec tout autre personne directement ou indirectement.

22- Dans un club de football ; lors de longues séances de tirs au but, le gardien se comporte de la manière suivante :

- S'il arrête un tir, il arrête le suivant avec la probabilité de 0,5 .
- S'il a encaissé un but, il arrête le tir suivant avec la probabilité de 0,2.

1.a) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
b) Donner la matrice de la transition de ce graphe.
2. Le gardien n'a pas arrêté le premier tir. Quelle est la probabilité qu'il arrête le troisième tir ?

23- Un théâtre propose deux types d'abonnement pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles.
On considère un groupe de 2500 personnes qui s'abonnent tous les ans. n étant un entier naturel, on note :
a_n la probabilité qu'une personne ait choisit l'abonnement A l'année n ;
b_n la probabilité qu'une personne choisit l'abonnement B l'année n ;
P_n la matrice $(a_n \ \ b_n)$ traduisant l'état probabiliste l'année n.
Tous les ans, 85% des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55% des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent le même type d'abonnement l'année suivante. Les autres changent d'abonnement.
1.On suppose que, l'année zéro, 1500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1000 personnes ont choisi l'abonnement B.
Déterminer l'état initiale $P_0 = (a_0 \ \ b_0)$.
2.a) Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
b) Déterminer la matrice de transition M de ce graphe
c) En déduire le nombre d'abonnés l'année un.

24- On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs ».
Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,
- 60% des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10% des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.
On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non fumeurs.
On désigne par :
- f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n,
- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n, où n est un entier naturel.
On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.
On a donc $f_0 = g_0 = 0{,}5$
1) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2) Justifier l'égalité matricielle :

$(f_{n+1} \quad g_{n+1}) = (f_n \quad g_n).A$ où A désigne la matrice : $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

3) Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.
4) Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5) Montrer que : pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = 0{,}5.f_n + 0{,}1$
6) On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = f_n - 0{,}2$
a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.
c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $f_n = 0{,}3.0{,}5^n + 0{,}2$
d) Déterminer la limite de la suite(f_n) lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

25- Au cours de la première semaine de l'année scolaire, un professeur propose aux élèves de sa classe le choix entre deux sorties pédagogiques une sortie A et une sortie B.
20% des élèves de la classe sont favorables à la sortie A et tous les autres élèves sont favorables à la sortie B.
Les arguments des uns et des autres font évoluer cette répartition en cours d'année.
Ainsi 30 % des élèves favorables à la sortie A et 20 % des élèves favorables à la sortie B

changent d'avis la semaine suivante.
On note :
a_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la semaine n ;
b_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie B la semaine n ;
Pn la matrice $(a_n \quad b_n)$ n n a b traduisant l'état probabiliste la semaine n.
1) Déterminer l'état initial P_1 .
2) Représenter la situation par un graphe probabiliste.
3) En déduire que $P_{n+1} = P_n \times M$ où M est la matrice $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$
4) Déterminer l'état probabiliste P_3 et en déduire la probabilité qu'un élève soit favorable à la
sortie A la troisième semaine.
5) Déterminer le réel x tel que $(x\ ;\ 1-x).M = (x\ ;\ 1-x)$.
On admet que la suite (a_n) est croissante. La sortie A finira-t-elle par être préférée à la sortie B ?

26- On s'intéresse aux performances réalisées par des étudiants courant le 200 mètres dans les compétitions universitaires. Lors d'une compétition, le score d'un(e) étudiant (e) est son meilleur temps en secondes obtenu aux 200 m. Une enquête a permis d'établir le comportement général suivant, qu'on supposera valable pour les filles et les garçons dans toute la suite :
· Lors de la première compétition, le score d'un(e) étudiant(e) est toujours supérieur ou égal à 25 secondes.
· Si, lors de la n-ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score strictement inférieur à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes lors de la $n+1$-ième compétition est de $\frac{2}{5}$
· Si, lors de la n-ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score supérieur ou égal à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes est $\frac{1}{5}$
On représente les données précédentes par un graphe probabiliste G à deux états.
On note A tout score strictement inférieur à 25 secondes et B tout score supérieur ou égal à 25 secondes.
On note a_n la probabilité d'obtenir un score A lors de la compétition n et b_n la probabilité d'obtenir un score B lors de la compétition n.
L'état probabiliste lors de la compétition n est donc représenté par la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$.
1) Représenter G et donner sa matrice de transition.
2) Mouna, jeune étudiante, se présente à sa première compétition universitaire.
a) Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de cette compétition.
b) Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de sa troisième compétition.
3) Déterminer l'état stable du graphe G.
4) Riadh a déjà de nombreuses compétitions universitaires.
Montrer que, pour sa prochaine compétition, il a environ une chance sur quatre de réaliser un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres.

27- *Étude de l'évolution météorologique d'un jour à l'autre dans une localité.*
Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions rationnelles.

Partie A

· S'il fait sec aujourd'hui, alors il fera encore sec demain avec la probabilité $\frac{5}{6}$, donc il fera humide demain avec la probabilité $\frac{1}{6}$

· S'il fait humide aujourd'hui, alors il fera encore humide demain avec la probabilité $\frac{2}{3}$,

Nous sommes dimanche et il fait sec. On s'intéresse à l'évolution météorologique des jours suivants.

1) Construire un arbre de probabilité représentant la situation de dimanche à mercredi.

2) En déduire la probabilité des évènements suivants :

J : « il fera sec lundi, mardi et mercredi » ;

K : « il fera sec mardi » ;

L : « il fera humide mercredi ».

Partie B

1) Soit n un entier naturel, on note :

s_n la probabilité pour que le jour n, il fasse sec ;

h_n la probabilité pour que le jour n, il fasse humide ;

Pn la matrice $(s_n \quad h_n)$ traduisant l'état probabiliste du temps le jour n. Déterminer une relation entre s_n et h_n.

2) a) Si le premier dimanche est le jour correspondant à $n = 0$, donner la matrice associée à l'état initial du temps.

b) Décrire l'évolution de cet état à l'aide d'un graphe probabiliste.

3) La matrice M de ce graphe est $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

a) Déterminer M^2 .

b) Expliquer comment retrouver à l'aide de la matrice M, la situation du mardi étudiée dans la partie A.

4) a) Déterminer l'état stable associé à l'évolution météorologique.

b) En déduire, qu'à long terme, la probabilité qu'il pleuve un certain jour est $\frac{1}{3}$.

I -Une justification du théorème suivant :

Soit G un graphe de matrice associée A. Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est égal au terme a_{ij} de la matrice A^n.

Soient i et j deux sommets distincts de G.
La solution, comme souvent, vient en cherchant un problème plus facile : chercher le nombre de chemins de longueur 1, puis 2, puis 3 reliant i à j.
Les chaînes de longueur 1 qui joignent i à j sont les arêtes qui joignent i à j. On notera $a_{i;j}$ le nombre de ces chaînes de longueur 1 : il vaut 0 si i n'est pas relié à j par une arête, 1 s'il y a une arête qui joint i à j.
Comment compter les chaînes de longueur 2 joignant i à j? Une telle chaîne est forcément formée d'une chaîne de longueur 1 allant de i à un certain sommet k, puis d'une chaîne de longueur 1 du même sommet k à j; il faut bien sûr envisager toutes les possibilités pour k. Si b_{ij} désigne le nombre de chaînes de longueur 2, on a donc :

$$b_{ij} = \sum_k a_{ik}.a_{kj} \text{ la somme étant}$$

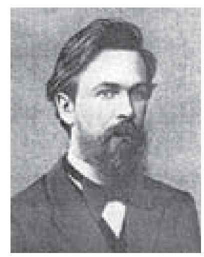
prise sur tous les sommets du graphe.
On reconnaît la formule usuelle du produit de matrices ! Les sommets sont numérotés de 1 à n, on peut donc regrouper les nombres a_{ij} définis ci-dessus en une matrice $A = (a_{ij})$. Si l'on note $B = (b_{ij})$ la matrice des chaînes de longueur 2, on vient de voir que $B = A^2$, le produit étant le produit matriciel usuel.
De même, si l'on note c_{ij} le nombre de chaînes de longueur 3 de i à j, on voit que, puisqu'une telle chaîne se décompose en une chaîne de longueur 1 de i à k, suivie d'une chaîne de longueur 2 de k à i, on a :

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik}.b_{ki}$$

d'où l'on déduit que la matrice $C = (c_{ij})$ vérifie $C = A\times B = A^3$.
Il est alors immédiat de généraliser : le nombre de chaînes de longueur n qui joignent le sommet i au sommet j est le terme d'indice i,j de la matrice A^n.

II -Introduction aux chaînes de Markov

Généralement, un processus stochastique est une suite d'expériences dont le résultat dépend du hasard. Ici, nous admettrons qu'en certains temps 0, 1, 2, ..., t, nous observons un système. Celui-ci peut se trouver dans l'un des états d'une collection finie d'états possibles. L'observation du système est ainsi considérée comme une expérience dont le résultat (aléatoire) est l'état dans lequel se trouve le système.



Nous supposons que nous connaissons pour chaque paire d'états i et j, et pour chaque instant t, la probabilité $p_{ij}(t)$ que le processus soit dans l'état j à l'instant t +1 étant donné qu'il se trouve dans l'état i à l'instant t. De plus, la probabilité $p_{ij}(t)$ sera supposée ne pas dépendre de t.
Un tel processus est appelé chaîne de Markov (à temps discret et avec un ensemble fini d'états), du nom de son inventeur ***Andrei Andreyevich Markov*** (1856-1922), dont vous voyez le visage ci-contre.
Avec ces hypothèses, nous pouvons décrire le système en donnant l'ensemble $\{u_1, ..., u_m\}$ des états u_i possibles et une matrice P de dimensions $m\times m$ dont le terme p_{ij} est la probabilité que le processus soit dans l'état j à l'instant t +1 étant donné qu'il se trouve dans l'état i à l'instant t, pour tout t. P est appelée matrice de transition du système.
On représente généralement P par un graphe orienté G dont les sommets correspondent aux m états et les arcs aux couples ordonnés d'états (i,j) tels que $p_{ij}>0$.

Sommaire